Was versteht man unter einer *Zielfunktion*?

Die Funtktion $f : G \to \mathbb{R}$, die minimiert wird.

Was ist der *zulässiger Bereich* G ?

Definitionsbereich der Zielfunktion. $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Was verstehen wir unter einer (globalen) Lösung einer OA Aufgabe.

Ein $x^* \in G$ das die Zielfunktion minimiert.

Was ist eine *lokale Lösung* x^* einer OA Aufgabe?

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in G \cap U(x^*),$$

und es existiert so eine Umgebung von x^*.

Was ist eine *isolierte Lösung*?

aufgabenstellung KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Es existiert eine Umgebung $U(x*)$, so dass $f(x^*) < f(x)$. Bzw. es gibt keine witeren lokalen Loßungen in der Umgebung.

aufgabenstellung KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Wie heißt $f_{\min} \coloneqq f(x^*)$?

aufgabenstellung KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Optimalwert oder *Minimalwert*

aufgabenstellung KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn ...

konvexitaet KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

$\forall_{x,y \in G}$ die Verebindungstrecke zwischen den Punkten auch in G liegt. Formel:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in G, \quad \forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0,1))$$

konvexitaet KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Sei G *konvex*. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *konvex auf* G, wenn...

konvexitaet KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

$\forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0,1))$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

konvexitaet KOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Wann ist eine Funktion *streng konvex* auf einer kompakten Menge G?

Wie bei normalen konvexität, aber mit $<$ statt $\leq$.

Sei G *konvex*. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig konvex auf* G, wenn...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0, 1))$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) - \gamma \lambda (1 - \lambda) \|x - y\|^2$$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *konvex* g.d.w. ...

$\forall_{x,y \in G}$:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y - x).$$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *streng konvex* g.d.w. ...

$\forall_{x,y \in G}, x \neq y$:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y - x).$$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *gleichmäßig konvex* g.d.w. ...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall_{x,y \in G}$:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x) + \gamma \|x - y\|^2.$$

Wann ist eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$*positiv semidefinit*?

wenn $s^\mathsf{T} M s \geq 0 \forall s \in \mathbb{R}^n$. ($\Leftrightarrow$: Alle Eigenwerte ≥ 0.)

Wann ist eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$*positiv definit*?

wenn $s^\mathsf{T} M s > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n / \{0\}$. ($\Leftrightarrow$: Alle Eigenwerte > 0.)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *konvex* auf G, genau dann wenn...

$\forall x \in G : \nabla^2 f(x)$ positiv semidefinit.

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *streng konvex* auf G, genau dann wenn...

$\forall x \in G : \nabla^2 f(x)$ positiv definit.

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *streng konvex* auf G, genau dann wenn...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall s, x \in G$:

$$s^\mathsf{T} \nabla^2 f(x) s \geq \gamma \|s\|^2$$

Die Zielfunktion sei konvex, was gibt uns das(bezogen auf Lösugnen)?

Jede lokale Lösung ist auch eine globale Lösung

Die Zielfunktion sei streng konvex, was gibt uns das(bezogen auf Lösugnen)?

Es gibt höchstens eine globale Lösung.

Die Zielfunktion sei gleichmäßig konvex, was gibt uns das (bezogen auf Lösugnen)?

Falls G nicht nur konvex aber auch abgeschlossen und nichtleer, dann besitzt die OA *genau eine* Lösung.

Was ist die Definition der *quasikonvexität*?

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *quasikonvex* auf G, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

Was bedeutet, dass eine Funktion *pseudokonvex* ist?

Sei G konvex, B offen mit $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f ist pseudokonvex auf G, wenn $\forall x, y \in G$:

$$(y-x)^{\mathsf{T}} \nabla f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Was ist stärker, *pseudokonvexität* oder *quasikonvexität*?

pseudokonvexität

Definiere den Kegel der zulässigen Richtungen in $x \in G$.

$$Z(x) \coloneqq \operatorname{cone}\left\{d \in \mathbb{R}^n \mid x + \alpha d \in G, \quad \forall \alpha \in [0,1]\right\}$$

, wobei $\operatorname{cone}(S) \coloneqq \left\{\lambda s \mid s \in S, \quad \lambda \in [0,\infty)\right\}$.

Sei G konvex, die Zielfunktion f [... (1)], x^* [... (2)], und es gilt [... (3)], dann ist x^* eine globale Lösung der OA.

1. pseudokonvex
2. eine lokale Lösung
3. $\nabla f(x^*)^\mathsf{T}(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in G$

Definiere den *Tangentialkegel*

$$T(x) \coloneqq \left\{ d = \lim_{v\to\infty} \frac{x^v - x}{t_v} \;\middle|\; \{x^v\} \subset G, \{t_v\} \subset (0,\infty), \lim_{v\to\infty} x^v = x,\ \lim_{v\to\infty} t_v = 0 \right\}$$

Wann ist $T(x)$ *Tangentialkegel* gleich $\mathbb{R}^n$?

Falls x im inneren von G ist.

Definiere den *Linearisierungskegel*.

$$L(x) \coloneqq \left\{ d \mid \nabla g_i(x)^\mathsf{T} d \leq 0 \text{ für } \; i \in I_0(x), \nabla h(x)^\mathsf{T} d = 0 \right\}$$

mit $I_0(x) \coloneqq \left\{ i \in I \mid g <_i (x) = 0 \right\}$.

Wie nennt man die Bedingung, dass $T(x) = L(x)$?

*Abadie Constraint Qualification (**ACG**)*

Wie nennt man die Bedingung, dass $\operatorname{conv} \left(\bar{T}(x)\right)$?

*Guignard Constraint Qualification (**GCQ**)*

Wann ist *ACG* erfüllt?

Falls $T(x) = L(x)$

Wann ist GCQ erfüllt?

Falls $L(x)$ gleich der abgeschlossener konvexen Hülle

Wie heißt eine Bedingung die ACQ impliziert?

Regularitätsbedingung

Nenne fünf Regularitätsbedingungen.

EBCQ Error Bound Constraint Qualification

MFCQ Mangasarian–Fromori Constraint Qualification

LICQ Linear Independence Constraint Qualification

Slater Bedinugng

Affinität $g_i, i \in I_0(x)$ und h sind affin.

Wann gilt $EBCQ$?

$\exists \delta > 0, C > 0$, sodass $\forall z \in B(x, \delta)$

$$\operatorname{dist}[z, G] \leq C\left(\left\|\max\left\{0, g(z)\right\}\right\| + \left\|h(z)\right\|\right)$$

Wann gilt *MFCQ*?

Die Vektoren $\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_p(x)$ sind linear unabhängig und es gibt ein $s \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\nabla g_i(x)^\mathsf{T} s > 0, \quad \forall i \in I_0(x)$$

und

$$\nabla h(x)^\mathsf{T} s = 0.$$

Wann gilt *LICQ*?

Die Vektoren in der Familie

$$\left\{\nabla g_i(x)\ I\ i \in I_0(x)\right\} \cup \left\{\nabla h_j(x) \mid j \in J\right\}$$

sind linear unabhängig.

Wann gilt die *Slater Bedingung*?

Die Funktionen $g_1, \dots, g_m$ sind **konvex** und $J = \emptyset$. Außerdem $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $g_i(\bar{x}) < 0 \ \ \forall i \in I$.

Wie Lautet die KKT Bedingung (kurz)?

$\nabla f(x^*)^\mathsf{T} d \geq 0 \ \ \forall d \in L(x^*)$

Was besagt *das Lemma von Farkas*?

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ c \in \mathbb{R}^n$. Dann ist von den folgenden zwei Systemen

$$A^\mathsf{T} z \leq 0,\ B^\mathsf{T} z = 0,\ c^\mathsf{T} z > 0 \tag{1}$$
$$Au + Bv = c, \quad u \geq 0 \tag{2}$$

nur ein lösbar.

Wann gielten die KKK-Bedingungen ?

GCQ muss erfüllt werden. Man sucht nach einer Regularitätsbedingung.

Schreibe das KKT System auf

$$\begin{gathered}
\nabla_x \mathcal{L}(x,u,v) = 0 \\
h(x) = 0 \\
g(x) \leq 0 \\
u \geq 0 \\
u^\mathsf{T} g(x) = 0
\end{gathered}$$

und $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$

Wie ist die Lagrangefunktion definiert?

$$\mathcal{L}(x,u,v) = f(x) + u^\mathsf{T} g(x) + v^\mathsf{T} h(x)$$

$\forall (x,u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$

Sei (x^*, u^*, v^*) ein KKT–Punkt, wann ist x^* eine globale Lösung?

Falls f *pseudokonvex*, alle g_i *quasikonvex* und h_j *affin linear*.

Definiere einen *Sattelpunkt* einer Lagrangefuntion.

Ein Punkt $(x^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ heißt *Sattelpunkt der Langrange Funtion* $\mathcal{L}$, wenn

$$\mathcal{L}(x^*, u, v) \leq \mathcal{L}(x^*, u^*, v^*) \leq \mathcal{L}(x, u^*, v^*)$$

$\forall (x, u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$.

Sei (x^*, u^*, v^*) ein Sattelpunkt von $\mathcal{L}$, dann ...

... x^* eine globale Lösung der OA.