Was versteht man unter einer *Zielfunktion*?

Die Funtktion $f : G \to \mathbb{R}$, die minimiert wird.

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Was ist der *zulässiger Bereich* G ?

Definitionsbereich der Zielfunktion. $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Was verstehen wir unter einer (globalen) Lösung einer OA Aufgabe.

Ein $x^* \in G$ das die Zielfunktion minimiert.

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Was ist eine *lokale Lösung* x^* einer OA Aufgabe?

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in G \cap U(x^*),$$

und es existiert so eine Umgebung von x^*.

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

aufgabenstellungKOMOT::Optimierungsprobleme UUID

Was ist eine *isolierte Lösung*?

Es existiert eine Umgebung $U(x*)$, so dass $f(x^*) < f(x)$. Bzw. es gibt keine witeren lokalen Loßungen in der Umgebung.

Wie heißt $f_{\min} \coloneqq f(x^*)$?

Optimalwert oder *Minimalwert*

Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn ...

$\forall_{x,y \in G}$ die Verebindungstrecke zwischen den Punkten auch in G liegt. Formel:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in G, \quad \forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0, 1))$$

Sei G *konvex*. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *konvex auf* G, wenn...

$\forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0, 1))$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Wann ist eine Funktion *streng konvex* auf einer kompakten Menge G?

Wie bei normalen konvexität, aber mit $<$ statt $\leq$.

Sei G *konvex*. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig konvex auf* G, wenn...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall (x, y, \lambda) \in (G \times G \times (0, 1))$:

$f(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \gamma\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *konvex* g.d.w. ...

$\forall_{x,y \in G}$:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x).$$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *streng konvex* g.d.w. ...

$\forall_{x,y \in G}, x \neq y$:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x).$$

B offen G konvex und $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f *gleichmäßig konvex* g.d.w. ...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall_{x,y \in G}$:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x) + \gamma \|x - y\|^2.$$

Wann ist eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$*positiv semidefinit*?

wenn $s^\mathsf{T} M s \geq 0 \forall s \in \mathbb{R}^n$. ($\Leftrightarrow$: Alle Eigenwerte ≥ 0.)

Wann ist eine quadratische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$*positiv definit*?

wenn $s^\mathsf{T} M s > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^n / \{0\}$. ($\Leftrightarrow$: Alle Eigenwerte > 0.)

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *konvex* auf G, genau dann wenn...

$\forall x \in G : \nabla^2 f(x)$ positiv semidefinit.

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *streng konvex* auf G, genau dann wenn...

$\forall x \in G : \nabla^2 f(x)$ positiv definit.

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar. Dann f is *streng konvex* auf G, genau dann wenn...

$\exists \gamma > 0$, so dass $\forall s, x \in G$:

$$s^\mathsf{T} \nabla^2 f(x) s \geq \gamma \|s\|^2$$

Die Zielfunktion sei konvex, was gibt uns das(bezogen auf Lösugnen)?

Jede lokale Lösung ist auch eine globale Lösung

Die Zielfunktion sei streng konvex, was gibt uns das(bezogen auf Lösugnen)?

Es gibt höchstens eine globale Lösung.

Die Zielfunktion sei gleichmäßig konvex, was gibt uns das (bezogen auf Lösugnen)?

Falls G nicht nur konvex aber auch abgeschlossen und nichtleer, dann besitzt die OA *genau eine* Lösung.

Was ist die Definition der *quasikonvexität*?

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *quasikonvex* auf G, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

Was bedeutet, dass eine Funktion *pseudokonvex* ist?

Sei G konvex, B offen mit $G \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ diff'bar. f ist pseudokonvex auf G, wenn $\forall x, y \in G$:

$$(y-x)^\mathsf{T} \nabla f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Was ist stärker, *pseudokonvexität* oder *quasikonvexität*?

pseudokonvexität

Definiere den Kegel der zulässigen Richtungen in $x \in G$.

$$Z(x) := \operatorname{cone}\left\{d \in \mathbb{R}^n \mid x + \alpha d \in G, \quad \forall \alpha \in [0,1]\right\}$$

, wobei $\operatorname{cone}(S) := \left\{\lambda s \mid s \in S, \quad \lambda \in [0,\infty)\right\}$.

Sei G konvex, die Zielfunktion f [... (1)] x^* [... (2)], und es gilt [... (3)], dann ist x^* eine globale Lösung der OA.

1. pseudokonvex
2. lokale Lösung
3. $\nabla f(x^*)^\mathsf{T}(x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in G$