Der Schwarzraum $D(\Omega)$ ist ...

der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, auf Ω, mit kompakten Träger $C_c^\infty(\Omega)$.

Der Schwarzraum S ist...

der Raum der schnell fallenden Funktionen. Das sind $\varphi \in C^\infty$, auf ganz $\mathbb{R}^n$ für die für beliebige Multiindizes α, β und ein Vektor x $x^\alpha D^\beta \varphi$ beschränkt ist.

Wie ist die Konvergenz im Schwarzraum $D(\Omega)$ definiert?

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \varphi \quad \text{in} D$$

falls $\exists K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit:

1. $\forall_{m\in\mathbb{N}}:\ \text{supp}\varphi_m \subseteq K$,
2. $D^\alpha \varphi_m \to D^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf Ω.

Wie ist die Konvergenz im Schwarzraum S definiert? Wie lauten die äquivalente Bedingungen?

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m = \varphi \quad \text{in} S$$

genau dann, wenn $\forall$ Multiindizes α, β

$$x^\alpha D^\beta \varphi_m \to x^\alpha D^\beta \varphi$$

gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Äquivalent dazu ist: $\forall_{k\in\mathbb{N}_0}$ und für jeden Multiindex α gilt

$$\left(1+|x|^2\right)^k D^\alpha \varphi_m(x) \overset{\text{glm.}}{\to} \left(1+|x|^2\right)^k D^\alpha \varphi(x)$$

Auch äquivalent : $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \|\varphi_n - \varphi\|_k \to 0$

Was sind D' und S'.

Die dazugehörige Dualräume. Also Räume der stetigen Funktionale auf D (oder$S$).

Welche Funktionen können mit Distributionen multipliziert werden, um eine neue Distribution zu definieren?

Für $T \in D'(\Omega)$ gilt es für $f \in C^\infty(\Omega)$. Für $T' \in (\Omega)$ gilt es für $f \in P_n^\infty$.

Welche Funktionen erzeugen reguläre Distributionen?

$f \in L^1_{\text{loc}}$ erzeugt $[f] \in D'$.

$f \in P_n$ erzeugt $[f] \in S'$.

Welche Operationen gibt es für Distributionen?

- Addition und skalare Multiplikation (da Vektorraum),
- Multiplikativität,
- Ableitungen,
- schwache Konvergenz,
- Tensorprodukt,
- Faltung (nur geeignete Distributionen),
- Fouriertransformation (nur für $T \in S'$).

Wie definiert man Die Ableitung einer Distribution?

$$(D^\alpha T)(\varphi) :- (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$$

Rechenregel für Ableitungen von Distributionen:

- jedes $T \in D'$ ist beliebig oft diif'bar,
- $D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T) = D^{\alpha+\beta}$,
- Sei $f \in C^\infty$ dann gilt ($\alpha, \beta\gamma$ Multiindizes):

$$D^\gamma(f \cdot T) = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}(D^\alpha f)(D^\beta T)$$

Wie ist der Tensorprodukt regulären Distributionen definiert?

$\Omega_x \subset \mathbb{R}^m, \Omega_y \subset \mathbb{R}^n, \Omega_z = \Omega_x \times \Omega_y \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$

Mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}\langle [f] \otimes [g], \chi \rangle = & \int_{\Omega_z} (f \otimes x)(z)\chi(z) \, \mathrm{d}^{m+n} z \\ = & \langle [f]_x, \langle [g]_x, \chi(x,y) \rangle \rangle \\ = & \langle [g]_y, \langle [f]_y, \chi(x,y) \rangle \rangle\end{aligned}$$

Wie st das Tensorprodukt allgemeiner Distributionen definiert?

$R \coloneqq S \otimes T \in D'(\mathbb{R}^{m+n})$ mit:

- $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^m) \; \forall \psi \in D(\mathbb{R}^n) : \; R(\varphi \otimes \psi) = S(\phi) \cdot T(\psi)$,
- $\forall \rho \in D(\mathbb{R}^{m+n}) : R(\rho) = S(T(\rho_x))$, wobei $\rho_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; y \mapsto \rho(x,y), \quad \rho_x \in D(\mathbb{R}^m)$

Eigenschaften des Tensorprodukts von Distributionen:

- $\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle T_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle \forall\varphi \in D(\Omega_z)$.
- Das Tensorprodukt ist im jedem Faktor stetig.
- Es ist assoziativ.
- Es gilt: $D_x^\alpha D_y^\beta (S_x \otimes T_y) = D_x^\alpha S_x \otimes D_y^\beta T_y$.
- $f \in C^\infty(\Omega_x), g \in C^\infty(\Omega_y), S_x \in D'(\Omega_x), T_y \in D'(\Omega_y)$:

$$(f \otimes g)(S_x \otimes T_y) = (fS_x) \otimes (gT_y)$$

Wie ist der Raum der polynombeschränkten Funktionen (Funktionen von polynomialen Wachstum) P_n (bzw. der Raum P_n^∞) definiert?

$$P_n = \{f \in L^0(\mathbb{R}^n) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \exists m \in \mathbb{N}_0, C > 0 : \\ : |f(x)| \le C(1 + |x|^2)^2\}$$

$$P_n^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \forall\alpha, \exists m \in \mathbb{N}_0, C > 0 : \\ : |D^\alpha f(x)| \le C(1 + |x|^2)^m\}$$

Eine Distribution $T \in D'(\Omega)$ heißt *finit*, wenn...

... supp$T$ kompakt.

Wie definiert man Faltung von finiten Distributionen ?

Seien $S, T \in D'(\mathbb{R}^n)$ Sei T finit. Sei $\eta \in D(\mathbb{R}^n)$, so dass $\exists$ eine Umgebung U von supp$T$ mit $\forall x \in U : \eta(x) = 1$.

Für ein $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ setze $\rho(x,y) := \eta(y)\phi(x+y)$.

Definiere Faltung:

$S{*}T : D(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto S(T(\rho_x)) = \langle S_x, \langle T_y, n(y)\varphi(x{+}y)\rangle\rangle$

Es gilt: $S * T \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Das heißt also, dass zwei Distributionen miteinander faltbar sind, falls eine von denen, finit ist. Das ist aber nur eine hinreichende Bedingung. (Es gibt eine allgemeinere Definition über Grenzwert und mit einer 1 Folge.)

Das η existiert wegen des Lemmas über *glatte Abschmierfunktionen.*

Wie ist die Fouriertransformation definiert?

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definiere:

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f(\xi)) :=(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}}^{n} f(x) e^{-\langle \xi, x \rangle} \, \mathrm{d}^n x$$
$$\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f(\xi)) :=(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}}^{n} f(x) e^{\langle \xi, x \rangle} \, \mathrm{d}^n x$$

Was gilt für die Fouriertransformation der schnell fallenden Funktionen?

Die Fouriertransformation ist eine bijektive, $L^2(\mathbb{R}^n)$-isometrische lineare Abbildung von S_n auf S_n.

Wie ist die Fouriertransformation von Distributionen definiert? Was besagt der Theorem über die Fouriertransformation auf S_n?

$\mathcal{F}(T), T \in S_n$ wird auf folgende Weise definiert:

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$$

Es ist ein linearer Isomorphismus von S' auf sich mit der Inversen:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi(x) \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi(-x)) \rangle$$

$\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ sind stetig in dem Sinne, dass

$$T_m \underset{S'}{\to} T \Rightarrow \mathcal{F}(T_m) \underset{S'}{\to} \mathcal{F}(T)$$

Welche Rechenregel gelten für $\mathcal{F}$ auf S_n bzw. S'_n?

Seien $\varphi \in S_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ Multiindizes, dann

- $D_x^\alpha \mathcal{F}\big[\varphi(x)\big]\,(p) = \mathcal{F}\big[(-ix)^\alpha \varphi(x)\big]\,(p)$,
- $\mathcal{F}\big[D_x^\beta \varphi(x)\big]\,(p) = (ip)^\alpha \mathcal{F}\big[\varphi(x)\big]\,(p)$,
- $p^\beta D_p^\alpha \mathcal{F}\big[\varphi(x)\big]\,(p) = i^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}\big[D_x^\beta (x^\alpha \varphi(x))\big]\,(p)$.

Sei noch T in S'_n. Es gilt

- $D^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}\big[(-ix)^\alpha T\big]$,
- $\mathcal{F}[D^\alpha T] = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T)(\xi)$,
- $D^\alpha \mathcal{F}^{-1}(T) = \mathcal{F}^{-1}\big[(i)^\alpha T\big]$,
- $\mathcal{F}^{-1}[D^\alpha T] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(T)(\xi)$.

Wie ist ein linearer Differential Operator m-ter Ordnung definiert(mit Multiindex)? Wie wendet man solchen Operator auf eine Distribution?

$L(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$

$\langle L(x, D)(T), \varphi \rangle \coloneqq \langle T, L^*(x, D)(\varphi) \rangle$

$L^*(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^\alpha a_\alpha(x) D^\alpha$

L^* Ist der zu L adjungierte Operator.

Definiere eine schwache Lösung einer PDGL.

Betrachte $L(x, D)T = S$, mit $SinD'(\mathbb{R}^n)$. $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ ist eine schwache Lösung dieser Gleichung, auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ falls:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \text{ mit } \operatorname{supp}\varphi \subset G : \langle L(x, D)T, \varphi \rangle = S$$

Wann ist eine Distribution eine *Grundlösung* bzw. eine *Fundamentallösung*?

Sei $L(D)$ ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ ist eine *Grundlösung* von $L(D)$ falls

$$L(D)T = \delta$$

Wie gelang man zur schwachen Lösung der inhomogen PDGL mit konstanten Koeffizienten, falls die Grundlösung schon bekannt ist?

Betrachte $L(D)T = S$ mit $S \in D'(\mathbb{R}^n)$. Ist $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ eine Grundlösung der PDGL, d.h. $L(D)T = \delta$, und $R \coloneqq T' * S'$ existiert, dann ist R eine Lösung der inhomogenen PDGL.