Wann ist eine linearer Operator aus $\mathcal{H}$ *dicht definiert*?

Wenn $D(A)$ *Definitionsbereich* dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Wie ist ein beschränkter Operator definiert?

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. A heißt beschränkt, falls für jede beschränkte Menge $M \subset D(A)$ gilt, dass $A[M]$ beschränkt ist.

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. A heißt stetig, falls

für jede Folge (φ_n) in $D(A)$ mit $\varphi_n \to \varphi \in D(A)$ gilt, dass

$$A\varphi_n \to A\varphi$$

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Welche Aussagen sind äquivalent zu

- A ist beschränkt ?

- $\exists c > 0 : \forall \varphi \in D(A) \|A\phi\| \leq c\|phi\|$,
- A ist stetig,
- A ist stetig in 0.

Wann lässt sich ein linearer Operator A auf ganz $\mathcal{H}$ fortsetzen?

Falls $D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$ und A stetig, lässt sich A **stetig** auf $\mathcal{H}$ fortsetzen.

Was ist $B(\mathcal{H})$?

$B(\mathcal{H})$ ist der Vektorraum aller **beschränkten** linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$. Es ist ein Vektorraum ,da für ein skalar c und zwei beschränkte Operatoren A_1, A_2 $A_1 + A_2$ und cA auch beschränkt sind.

Wie ist die Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$ definiert?

$$\|T\| := \inf\big\{c > 0 \mid \forall \varphi \in \mathcal{H} : \|T\varphi\| \leq c\|\varphi\|\big\}$$

Was besagt der Satz Norm auf $B(\mathcal{H})$, außer dass die definierte Operatornorm tatsächlich einer Norm auf $(\mathcal{H})$ ist?

$\big(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|\big)$ ist ein Banach-Raum.

Es gilt die *Submultiplikativität* der Norm, also $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Welche äquivalente zu

$$\|T\| \coloneqq \inf\big\{c < 0 \mid \forall\varphi \in \mathcal{H} \|T\varphi\| \leq \|\varphi\|\big\}$$

Charakterisierungen der Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$ gibt es (Es sind 4.)?

$$\|T\| = \sup\big\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1\big\}$$
$$\|T\| = \sup\big\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1\big\}$$
$$\|T\| = \sup\big\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| < 1\big\}$$
$$\|T\| = \sup\Big\{\big|\langle\psi, T\varphi\rangle\big| \mid \psi, \varphi \in \mathcal{H}, \big(\|\psi\| \leq 1 \wedge \|\varphi\| \leq 1\big)\Big\}$$

Ein Operator aus $B(\mathcal{H})$ heißt *endlich-dimensional*, wenn ...

... der Bildbereich von diesem Operator endlich-dimensional ist.

Wann existiert der inverse Operator zu einem linearen Operator A?

Falls $A : D(A) \to \mathrm{im}A$ injektiv. Dann ist A^{-1} auch linear.

Was besagt der Satz über den inversen Operator?

Wenn $A \in B(\mathcal{H})$, $\mathrm{im}A = \mathcal{H}$ und A^{-1} existiert, dann ist $A^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

Was besagt der Sagt über den adjungierten Operator?

Zu jedem $T \in B(\mathcal{H})$ existiert genau ein $T^* \in B(\mathcal{H})$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}: \quad \langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^*\varphi, \psi \rangle$$

T^* heißt der zu T adjungierte Operator. Es gilt: $\|T\| = \|T^*\|$

$(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ist eine C^*-Algebra mit Eins-Element, d.h. ...

...

i) $B(\mathcal{H})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer **Multiplikation** (assoziative, bilineare Abbildung)

$$B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (S, T) \mapsto S \circ T$$

Als Vektorraum mit **assoziativer bilinearer** Abbildung ist $B(\mathcal{H})$ eine Abbildung. Das Eins-Element dieser Algebra ist Einheitsoperator $\mathbb{1}$.

ii) $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ist eine **normierte** Algebra, d.h. $\|\cdot\|$ ist **submultiplikativ**:

$$\forall S, T \in B(\mathcal{H}) : \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Es ist eine **Banach-Algebra** (also vollständig und normiert).

iii) $B(\mathcal{H})$ ist eine ***-Algebra**.

iv) Die Norm erfüllt die C^***-Algebra**, d.h. $\forall T \in B(\mathcal{H}) : \|T^*T\| = \|T\|^2$.

$B(\mathcal{H})$ ist eine ***-Algebra**, d.h. ...

... es gibt eine Abbildung $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}), \quad T \mapsto T^*$ mit

$\forall S, T \in B(\mathcal{H}), \forall \lambda \in \mathbb{C}:$

1. $(\lambda S + T)^* = \bar{\lambda} S^* + T^*$,
2. $(ST)^* = T^* S^*$,
3. $S^{**} = S$

Eine solche Abbildung heißt *Involution*.

Wie lautet der Satz über das orthogonale Komplement des Bildes?

Sei $T \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt

$$(\mathrm{im} T)^\perp = \ker T^*$$
$$(\mathrm{im} T^*)^\perp = \ker T$$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *selbstadjungiert*, wenn...

... $T = T^*$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *positiv*, wenn...

...$\forall \varphi \in \mathcal{H} : \langle T\varphi, \varphi \rangle \geq 0$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *unitär*, wenn...

... $T^{-1} = T^*$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *normal*, wenn...

... $T^*T = TT^*$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *Projektion*, wenn...

... $T^2 = T$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt , wenn...

...

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *Orthogonalprojektion*, wenn...

... T Projektion ist und $T = T^*$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *isometrich*, wenn...

... $\forall \varphi \in \mathcal{H} : \|T\varphi\| = \|T\|$

Ein Operator $T \in B(\mathcal{H})$ heißt *partiell isometrisch*, wenn...

... eine Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ existiert mit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ ist isometrisch und $\mathcal{H}_2 = \ker T$.

$\mathcal{H}_1$ ist der *Anfangsbereich* und im$T$ der *Endbereich* der partiellen Isometrie.

Wann existiert ein - zum unbeschränkten Operator - adjungierte Operator?

Wenn der Operator dicht definiert ist.

Sei $T : D(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator. Es existiert also der zu T adjungierte Operator $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$. Wie ist T^* definiert?

$D(T*) = D^* := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid D(T) \ni \mapsto \langle \psi, T\varphi \rangle \in \mathbb{C} \text{ ist stetig} \right\}$

$\forall \varphi \in D(T) \forall \psi \in D^* : \langle T^* \psi, \phi \rangle = \langle \psi, T\phi \rangle$

Welche wichtige Bemerkungen gibt es zu unbeschränkten adjungierten Operatoren?

- Aus "T dicht definiert"folgt **nicht**, dass auch T^* dicht definiert!
- Falls T^* nicht dicht definiert ist, kann man T^{**} nicht eindeutig definieren.
- Auch wenn $D(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ gilt nicht unbedingt, dass $T^{**} = T$!!

Was bedeuten (und was sind die Unterschiede): *hermitesch*, *symmetrich* und *selbstadjungiert*, für unbeschränkte Operatoren?

- *hermitesch* oder *formal adjungiert*: $\forall \varphi, \psi \in D(T)$: $\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, T\varphi\rangle$. T muss hier **nicht** dicht definiert sein!
- *symmetrisch*: T hermitesch und dicht definiert. Also es gilt insbesondere $T \subset T^*$.
- *selbstadjungiert* :T dicht definiert und sowohl $D(T) \subset D(T^*)$, als auch $D(T^*) \subset D(T)$, also $T^* = T$ gilt. Insbesondere $D(T^*) = D(T)$ und T *symmetrisch*.

Wie ist die *Resolventenmenge* un das *Spektrum* eines beschränkten Operators definiert?

Sei $T \in B(\mathcal{H})$,

i) Die Menge

$$\varrho(T) \coloneqq \left\{ \lambda \in C \mid \exists (T - \lambda \mathbb{1})^{-1} \in B(\mathcal{H}) \right\}$$

heißt *Resolventenmenge von* T, für $\lambda \in \varrho(T)$ gilt also: $(T - \lambda\mathbb{1}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist bijektiv.

Der Operator $R_\lambda(T) \coloneqq (T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ heißt *Resolvente von* T *im Punkt* λ.

ii) Die Menge $\sigma(T) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$ heißt *Spektrum von* T.

Was sind die Aussagen des Satzes über die Eigenschaften der Resolventenmenge?

i) Für $\lambda, \mu \in \varrho(T)$ kommutieren die Operatoren $R_\lambda(T)$ und $R_\mu(T)$ und es gilt die *Resolventengleichung*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) \cdot R_\mu(T)$$

ii) Für λ mit $|\lambda| < \|T\|$ gilt $\lambda \in \varrho(T)$. $R_\lambda(T)$ wird durch die ***Neumannsche Reihe*** beschrieben

$$R_\lambda(T) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$$

Es gilt die Abschätzung $\left\|(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

iii) Für $\lambda_0 \in \varrho(T)$ gilt: $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - \lambda_0| < \left\|R_{\lambda_0}\right\|^{-1} \Rightarrow$ die Reihe

$$R_{\lambda_0}(T) \left[\mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda = \lambda_0)^k \left(R_{\lambda_0}(T)\right)^k \right]$$

konvergiert und es ist gleich $R_\lambda(T)$. Also $\lambda \in \varrho(T)$ und $\varrho(T)$ ist offen.

Was besagt der Satz über die Kompaktheit des Spektrums?

Sei $T \in B(\mathcal{H})$. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist eine kompakte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Es gilt $\sigma(T) \subset \lambda \in \mathbb{C} \mid \left|\lambda \leq \|T\|\right|$

Wie ist ein Punktspektrum σ_p definiert?

$$\begin{aligned}\sigma_p :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda\mathbb{1}) \text{ nicht injektiv}\} \\ :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\} : T\varphi = \lambda\varphi\}\end{aligned}$$

Wie ist das stetige Spektrum eines Operators T definiert?

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda\mathbb{1}) \text{ injektiv, nicht surjektiv,} \\ & (T - \lambda\mathbb{1})[\mathcal{H}] \text{ dicht in } \mathcal{H}\} \\ :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid D := (T - \lambda\mathbb{1})[\mathcal{H}] \text{ dicht in } \mathcal{H}, \\ & \exists (T - \lambda\mathbb{1})^{-1} : D \to \mathcal{H}, \text{ nicht dicht in } \mathcal{H}\}\end{aligned}$$

Wie ist das Restspektrum von einem Operator T definiert?

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda\mathbb{1}) \text{ injektiv,} \\ & (T - \lambda\mathbb{1})[\mathcal{H}] \text{ nicht dicht in } \mathcal{H}\} \\ :=& \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \sigma_p, (T - \lambda\mathbb{1})[\mathcal{H}] \text{ nicht dicht in } \mathcal{H}\}\end{aligned}$$

Zusammenhang Spektrum adjungierter und nicht adjungierter beschränkten Operatoren:

$$\begin{aligned}\sigma(T^*) =& \overline{\sigma(T)} \\ \varrho(T^*) =& \overline{\varrho(T)}\end{aligned}$$

hier — c.c. der Elemente.

$$R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)$$

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_p &\Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(T*) \cup \sigma_r(T^*) \\ \lambda \in \sigma_r(T) &\Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \\ \lambda \in \sigma_c(T) &\Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)\end{aligned}$$

Was gilt für Spektrum im Spezialfall der **selbstadjungierten** beschränkten Operatoren?

Sei $T = T^* \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt:

i) $\sigma_r(T) = \emptyset$,

ii) für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lambda \in \varrho(T) \Leftrightarrow \exists c > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{H} : \big\|(T - \lambda \mathbb{1})\varphi\big\| \geq c\|\varphi\|$$

iii) Weylsches Kriterium: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists \text{ Folge } (\varphi_n) \in \mathcal{H}\big(\text{ mit } \forall n \in \mathrm{N} : \|\varphi_n\| = 1\big) \text{ und } \big\|(T - \lambda \mathbb{1})\varphi_n\big\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

iv) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und die Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal aufeinander.

Wie lautet der Satz über den Rand des Spektrums?

Sei $T = T^* \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt $\|T\| \in \sigma(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma(T)$.

Wie lautet das Lemma über die Darstellung von $|T|$, falls T ein selbstadjungierter Operator?

Seit $T = T^* \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt:

$$\|T\| = \sup\Big\{\big|\langle\varphi, T\varphi\rangle\big| \mid \|\varphi\| \leq 1\Big\}$$

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Menge $M \subset \mathcal{H}$ heißt (folgen-)kompakt, wenn

jede Folge $(\psi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ in m ein Teilfolge $(\psi_n k)_{k\in\mathrm{N}}$ enthält, die gegen ein Element aus M konvergiert.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Menge $M \subset \mathcal{H}$ heißt relativ kompakt, wenn

der Abschluss $\overline{M}$ kompakt ist, mit anderen Worten, jde Folge in M enthält eine Teilfolge die gegen ein Element aus $\mathcal{H}$ konvergiert.

Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt kompakt,

wenn für jede beschränkte Menge $M \subset \mathcal{H}$ gilt, dass $T[M]$ eine relativ kompakte Menge ist.

$K(\mathcal{H})$ ist ein... in $B(\mathcal{H})$.

abgeschlossenes zwei-seitiges *-Ideal

$K(\mathcal{H})$ ist eine abgeschlossenes zwe-seitiges *-Ideal, d.h. ...

...

a) $K(\mathcal{H})$ ist ein Vektorraum.

b) $\forall (T_n) \in K(\mathcal{H})$ mit $\exists T \in B(\mathcal{H}), T_n \to T$ (bzgl. der Operatornorm) gilt: $T \in K(\mathcal{H})$.

c) Idealeigenschaft: $\big(T \in K(\mathcal{H}) \wedge S \in B(\mathcal{H})\big) \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(ST \in K(\mathcal{H}) \wedge TS \in K(\mathcal{H})\big)$.

d) $T \in K(\mathcal{H}) \Rightarrow T^* \in K(\mathcal{H})$

Ideal = a + c; *-Ideal = Ideal + d; Abgeschlossenheit = b, Zwei-Seitigkeit = c für TS **und** ST.

Welche beziehlung gilt zwischen $F(\mathcal{H})$, also den Raum der endlich-dimensionalen Operatoren, und $K(\mathcal{H})$?

- $F(\mathcal{H}) \subseteq K(\mathcal{H})$
- $F(\mathcal{H})$ liegt dicht in $K(\mathcal{H})$

Was besagt der Satz über das Spektrum der kompakten selbstadjungierten Operatoren?

Sie $\mathcal{H}$ ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $T = T^* \in K(\mathcal{H})$. Dann gilt:

i) $0 \in \sigma(T)$,

ii) jedes $\lambda \in \sigma(T)$ ist ein EIgenwert endlicher Vielfachheit,

iii) ist T nicht von endlichem Rang, so bilden die Eigenwerte von T eine Nullfolge.

Was besagt der Spektraltheorem für kompakte selbstadjungierte Operatoren?

Sei $T = T^* >\in K(\mathcal{H}), \lambda_1 \lambda_2 \cdots$ seien die von Null verschiedenen Eigenwerte. Sei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Seien P_i die (endlich-dimensionalen) orthogonalen Projektionen auf die Eigenräume zu λ_i. Dann gilt:

$$T = \sum_j \lambda_j P_j$$

Falls T nicht endlich-dimensional ist (d.h. abzählbar viele Eigenwerte ungleich Null), dann konvergiert die unendliche Reihe bzgl. der Operatornorm.

Wie lautet der Hilbert-Schmidtscher Entwicklungssatz?

Sei $T = T^* \in K(\mathcal{H})$. Dann existiert eine Folge (μ_i) in $\mathbb{R}$ (endlich oder Nullfolge) und ein Orthonormalsystem (ϕ_i) in $\mathcal{H}$ so, dass

$$\forall \varphi in \mathcal{H}: \quad T\varphi = \sum_i \mu_i \langle \varphi_i, \varphi \rangle \varphi_i$$

Wie ist ein Spurklassenoperator definiert?

Ein kompakter, positiver, selbstadjungierter Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt *nuklear* oder *Spurklassenoperator*, wenn für eine ONB (ψ_k) von $\mathcal{H}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k, T\psi_k \rangle < \infty$$

Ein Spurklassenoperator heißt *Dichteoperator*, wenn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi_k, T\psi_k \rangle = 1$$

(ψ_k) eine ONB.