Definiere ein metrischer Raum (und Metrik).

Sien $M \neq \emptyset$ eine Menge und $d : M : M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, d heißt *Metrik* in M, wenn $\forall x, y, z \in M$ gilt:

1. (**Definitheit**) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. (**Symmetrie**) $d(x, y) = d(y, x)$,
3. (**Dreiecksungleichung**) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(M, d) heißt dann *metrischer Raum*.

Definiere einen normieren Raum.

Seien V Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ eine Abbildung. Die Abb. heißt *Norm* auf V, wenn $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$(bzw. $\in \mathbb{C}$) gilt:

1. (**Definitheit**) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = \Leftrightarrow x = 0$,
2. (**Homogenität**) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. (**Dreiecksungleichung**) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|\cdot\|)$ heißt *Normierter Raum*.

Ein <u>vollständiger</u> normierter Raum heißt...

... *Banach-Raum*.

Ein Banach-Raum ist...

... ein vollständiger normierter Raum.

Wie lautet die Minkowski-Ungleichung?

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $x, y \in l^p$, dann

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Also Dreiecksungleichung für die p-Norm. Analoge Aussage gilt für L^p.

Wie lautets die Hölder-Ungleichung?

Für $x \in l^1, y \in l^\infty$ gilt:

$$xy := (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1. \quad \text{und} \quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_\infty$$

Definiere einen unitären Raum.

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften $\forall \varphi, \psi, \chi \in V, c \in \mathbb{C}$ gilt:

i) $\langle\varphi,\varphi\rangle \geq 0$ und $\langle\varphi,\varphi\rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$,

ii) $\langle\varphi,\psi+\chi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,\chi\rangle$,

iii) $\langle\varphi, c\cdot\psi\rangle = \cdot\langle\varphi,\psi\rangle$,

iv) $\langle\varphi,\psi\rangle = \overline{\langle\varphi,\psi\rangle}$.

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *unitärer Raum.*

Ein *Hilbertraum* ist ein...

... vollständiger unitärer Raum.

Ein vollständiger unitärer Raum heißt...

... Hilbertraum.

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *seperabel*, wenn...

... es eine abzählbare Menge $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$ gibt, die dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

Wie ist ein Abstand von einer Teilmenge in einem Hilbertraum definiert?

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\phi \in \mathcal{H}, K \neq \emptyset, K \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen und konvex. Dann ist:

$$\operatorname{dist}(\phi, K) \coloneqq \inf \left\{ \|\phi - \psi\| | \psi \in K \right\}$$

Wie lautet der Satz über die Existenz des Abstands?

Seine $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $K \subseteq \mathcal{H}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge und $\varphi_0 \in \mathcal{H}$. Dann $\exists!\ \psi_0 \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi_0 - \psi_0\| = \operatorname{dist}(\varphi_0, K)$. Außerdem gilt:

$$\forall \psi \in K : \Re\langle \psi, \varphi_0 - \psi_0 \rangle \leq \Re\langle \psi_0, \varphi_0 - \psi_0 \rangle$$

Wie ist das orthogonale Komplement definiert?

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $M \subseteq \mathcal{H}$. Die Menge

$$M^{\perp} := \{\varphi \in \mathcal{H} | \forall \psi \in M : \varphi \perp \psi\}$$

heißt *orthogonales Komplement* von M.

Wie lautet der Projektionssatz?

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, Ł $\subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann hat jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ eine eindeutige Darstellung:

$$\varphi = \psi + \psi^{\perp} \quad \text{mit} \quad \psi \in L \text{ und } \psi^{\perp} \in L^{\perp}$$

ψ heißt *orthogonale Projektion* von φ auf L.

Durch $\varphi \mapsto P_{\varphi} := \psi$ wird ein linearer Operator definiert. Es gilt $P^2 = P$ und $\forall \varphi \in \mathcal{H} : \left\|P_{\varphi}\right\| \leq \|\varphi\|$.

Was sind die Aussagen des Satzes über die Orthonormalsysteme in Hilberträumen?

Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und (ϕ_n) ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Die folgende Aussagen sind äquivalent:

i) $\operatorname{span}\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

ii) $\forall \varphi \in \mathcal{H} :\ \phi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, \varphi \rangle \varphi_n := \lim\limits_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \varphi_n, \varphi \rangle \varphi_n$

iii) $\forall \varphi \in\ Hi$ gilt die Parservalsche Gleichung:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle \varphi_n, \varphi \rangle\right|^2$$

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Wie ist eine *Orthonormalbasis* von $\mathcal{H}$ definiert?

Ein Orthonormalsystem (ϕ_n) in $\mathcal{H}$, für das $\operatorname{span}\{\varphi_n \mid n \in \ltimes\}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, heißt *Orthonormalbasis*.

Der Satz über die Orthonormalbasis eines Hilbertraumes besagt, dass...

jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis hat.

Was sind die wichtigen Bemerkungen zum Thema Orthogonalbasen nov Hilberträumen?

- Reihenfolge von (φ_n) ist eigentlich nicht relevant.
- $\mathcal{H}$ seperabel $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$hat eine anzählbare ONB.
- Mächtigkeit allen ONBen zu einem Hilbertraum ist gleich und wird Hilbertraum Dimension von $\mathcal{H}$ genannt.
- jeder seperable Hilbertraum ist isomorph zu l^2.

Erkläre die Isomorphie eines separablen $\mathcal{H}$ zu l^2.

(φ_n) ONB von $\mathcal{H}$. Die Abbildung

$$J : \mathcal{H} \to l^2, \quad \varphi \mapsto \big(\langle \varphi_n, \varphi \rangle\big)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist:

- **linear** (da das Skalarprodukt im 2. Eintrag es ist.) ,
- **bijektiv** (da Darstellung bzgl. einer ONB eindeutig ist),
- **isometrisch**.

Mit **linear** folgt J *Vektorraumhomomorphismus* weiter mit **bijektiv** J *Vektorraumisomorphismus*. mit **Isometrie** $\Rightarrow$ *isometrische Isomorphie*.

Definiere den *Dualraum* zu $\mathcal{H}$.

Der Dualraum zu $\mathcal{H}$ ist der Vektorraum aller linearen stetigen Funktionale auf $\mathcal{H}$ mit der Norm:

$$\|f\|_{\mathcal{H}'} \coloneqq \sup \Big\{ \big|f(\varphi)\big| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \le 1 \Big\}$$

Er wird mit $\mathcal{H}'$ bezeichnet.

Wie lautet der Satz von Riesz?

- $\forall f \in \mathcal{H}'$ gibt es ein **eindeutiges** $\psi \in \mathcal{H}$ so, dass $f \coloneqq f_\psi$, wobei $f_\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle \psi, \varphi \rangle$.
- Die Abbildung $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad \psi \mapsto f_\psi$ ist **bijektiv** und **konjugiert linear**.
- Es gilt $\forall \psi \in \mathcal{H} : \quad \|\Psi\| = \|f_\Psi\|_{\mathcal{H}'}$.