Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (implizit). Was versteht man unter einer Lösung der DGL?

Seien G ein Gebiet im $\mathbb{R}^{n+2}$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $F : G \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

implizite gewöhnliche DGL der Ordnung n.

Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:

1. $\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots x^{(n)}(t)\right) \in G \qquad \forall_{t\in(a,b)}$, und
2. die Gleichung $F = 0$ ist erfühlt $\forall_{t\in(a,b)}$.

Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (explizit).

Sei $\tilde{G}$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^{n+1}$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $f : \tilde{G} \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

explizite gewöhnliche DGL der Ordnung n.

Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:

1. $\left(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots x^{(n-1)}(t)\right) \in \tilde{G} \qquad \forall_{t\in(a,b)}$, und
2. die Gleichung $f = 0$ ist erfühlt für alle $t \in (a, b)$.

Ein Anfangswertproblem heißt *korrekt gestellt*, wenn..

genau eine Lösung existiert und eine stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gewährleistet ist.

Wie löst man $\dot{x} + f(t)x = g(t)$ mit der Eulerschen Methode?

- Multipliziere mit $\exp\left(\int_{t_0}^{t} f(t')\,\mathrm{d}t'\right)$.
- Fasse LHS als eine Abletiung nach x.
- Integriere es auf.

Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?

Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $T : A \to A$ kontrahierend mit Konktraktionszahl q. Dann:

1. T hat genau einen Fixpunkt x^* in A,
2. für beliebige $x_0 \in A$ konvergiert $x_{n+1} = Tx_n$ gegen x^* mit $n \in \mathbb{N}$,
3. es gilt die Abschätzung:

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\mathrm{d}(x_1, x_0)$$

$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (t,x) \mapsto f(t,x)$ genügt einer *Lippschitzbedingung* bzg. des 2. Arguments auf G, wenn

$\exists L > 0 \quad \forall t, x_1, x_2 \quad \text{mit} \quad (t, x_1), (t, x_2) \in G$

$$\left|f((t, x1) - f(t, x_2))\right| \leq L|x_1 - x_2|$$

Definiere die Lippschitzbedingung für Vektorfunktionen.

$\underline{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D(\underline{f} \to \mathbb{R}^n : \quad (t, \underline{x}) \mapsto f(t, vecx)$ genügt einer *Lippschitzbedingung* bzgl. $\underline{x}$ in $D(\underline{f})$, wenn $\forall \underline{x}, \underline{y}$ mit $(t, \underline{x}), (t, \underline{y}) \in D(\underline{f}) \quad \exists L > 0$:

$$\left\|\underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y})\right\|_n \leq L \left\|\underline{x} - \underline{y}\right\|_n$$

$\|\cdot\|_n$ ist beliebige Norm in $\mathbb{R}^n$.

Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Sei $\dot{x} = f(t,x)$ mit $x_0 = x(t_0)$ ein Anfangswertproblem (AWP) gegeben, f erfülle die folgenden Bedingungen:

- $\exists a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass f auf dem Rechteck

  $$Q := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\right\}$$

  stetig und durch M beschränkt ist.
- f ist auf Q Lippschitzstetig bzg. x mit Lippschitzkonstante L.

Dann existiert geanu eine lokale Lösung des AWP, d.h. $\exists \sigma > 0$ so ,dass auf $J := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ genau eine Lösung existiert. Man kann σ so wählen: $\sigma < \min\left\{a, \frac{b}{m}, \frac{1}{L}\right\}$.

Ein explizites Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung der Dimension k ist definiert als:

$$\underline{x}^{(n)} = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \ldots, \underline{x}^{n-1}(t))$$

wobei $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}^k$.

Wie lässt sich eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Dimension k transformieren?

Sei $x \in C^n((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ eine Lösung einer skalaren DGL n-ter Ordnung ($x^{(n)} = f(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ eventuell mit Anfangsbedingungen.

Definiere $\underline{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $z_i(t) = x(t)^{(i-1)}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt $\dot{z}_i = z_{i+1} = x^{(i)}$.

$z = \underline{z}(t)$ eine Lösung des n-dim. DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\underline{\dot{z}}(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \\ f(t, \underline{z}) \end{pmatrix} = \underline{g}(t, \underline{z}) \qquad D(\underline{g}) = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$$

Für $\underline{z}(t_0) = \underline{z_0}$ setze $z_i^0 = x^{(i-1)}(t_0)$.

Definiere den Begriff einer Fortsetzung einer Lösung.

Eine Lösung y des AWP

$$\dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x(t_0) = X_0$$

auf einem Intervall (a', b') heißt *Fortsetzung von x* (x eine lokale Lösung des AWP auf (a, b)), wenn:

- $(a, b) \subset (a', b')$,
- $y(t) \equiv x(t) \forall_{t \in (a,b)}$

Wie lautet der Satz über die Eindeutigkeit der Fortsetzung?

Sei ein

$$\text{AWP: } \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben.

Sei $Q = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$ eine Menge auf der das AWP mit $(t_0, x_0) \in Q$ lokal lösbar ist. Sei x auf $(a, b) \in [t_1, t_2]$ eine Lösung des AWPs. Seien y_1, y_2 zwei Fortsetzungen von x auf $(a', b') \in [t_1, t_2]$. Dann gilt:

$$y_1(t) = y_2(t) \qquad \forall_{t \in (a', b')}$$

Eine Lösung, die nicht mehr fortsetzbar ist, heißt...

... *maximal*.

Eine Lösung heißt *maximal*, wenn...

... sie nicht mehr fortsetzbar ist.

Wie lautet der Satz über die maximale Lösung?

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. $f : G \to \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen vom Satz von Picard/Lindelöf. Dann gilt:

1. $\exists!$ eine maximal Lösung $x_{\max}$ des AWP (auf (a, b)).
2. Für $u := \lim\limits_{t \to a^+} x_{\max}(t)$, $v := \lim\limits_{t \to b^-} x_{\max}(t)$ gilt $(a, u), (b, v) \in \partial G$.

Wie lautet der Satz über die Abschätzung der Differenz von Lösungen (stetige Abhängigkeit)?

Sei $\dot{x} = f(t, x)$, f stetig auf einem Streifen $(a, b) \times \mathbb{R}$. Für jedes abgeschlossene Intervall $[a', b'] \subset (a, b)$ existieren eine Lippschitzkonstante L' mit:

$$\forall_{t \in [a', b']} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} : \quad \big| f(t, x_1) - f(t, x_2) \big| \leq L' \| x_1 - x_2 \|$$

Seien nun $x(t), \hat{x}(t)$ Lösungen eines AWP mit $x(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ auf $[a', b']$ MIT $t_o \in (a', b')$. Dann gilt:

$$\forall_{t \in [a', b']} : \ \big| x(t) - \hat{x}(t) \big| \leq e^{L' |t - t_0|} \cdot \| x_0 - \hat{x}_0 \|$$

Wie ist ein linearer DGL-System 1. Ordnung definiert?

$$\dot{x} = A(t)f(t), \quad \text{homogen falls} \quad f(t) = 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \text{ gegeben auf } t \in I = (a, b)$$

Gibt den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines AWP zu einer linearen DGL an.

Sei $L(t,x) = f(t)$, $x^{(i)}(t_0) = \chi_i$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ein AWP.

Die Koeffizienten $a_i(t)$ von $L(t,x)$ seien aus $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ und stetig auf $I \subset \mathbb{R}$, f stetig auf I. Seien $t_0 \in I, \chi_i \in \mathbb{R}$ gegeben.

Dann besitzt das AWP genau eine Lösung.

Diese existiert auf dem ganzen Intervall I und hängt auf jedem kompakten Teilintervall von I von den ABen $a_i(t), f(t)$ stetig ab.

Sei ein linearer homogener DGL-System 1. Ordnung und n-ten Dimension gegeben. Dann heißt ein System von n lin. unabhängigen Lösungen...

Fundamentalsystem.

Die Fundametalmatrix ist...

die Lösungsmatrix $\Phi(t)$ ($(x_1|x_2|...)$ Lösungen als Spalten.) aus n lin. unabhängigen Lösungen. (Das zugehörige homogene LDGLS ist n-ter Ordnung).

Gib drei äquivalente Aussage zu: Eine quadratische Lösungsmatrix $\Phi(t)$ ist die Fundamentalmatrix.

- Die Spalten von $\Phi(t)$ bzw. die einzelne Lösungen sind linear unabhängig ,
- $\forall_{t\in I}: \quad \text{rang}\Phi(t)$ ist maximal,
- $\exists_{t\in I}: \quad \text{rang}\Phi(t)$ ist maximal.

I Stetigkeitsintervall auf dem das LDGLS gegeben ist.

Wronskideterminante ist definiert als...

... die Determinante der Fundamentalmatrix.

Die Determinante der Fundamentalmatrix heißt...

... Wronskideterminante.

Satz über die Wronski-Determinante. Für n Lösungen eines homogenen LDGLS 1.Ordnung und n-ter Dimension sind äquivalent:

- Die Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.
- ...

...

- $\forall t \in I \ W(t) \neq 0$,
- $\exists t \in I \ W(t) \neq 0$,

I Stetigkeitsintervall auf dem das LDGLS gegeben ist. $W(t)$ Wronski-Determinante.

Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Fundamentalmatrix lautet:

(+Beweisidee)

Es gäbe ein homogenes lineares DGL-System mit der Ordnung 1 und Dimension n.

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x}$$

Die Koeffizientenmatrix $A(t)$ sei stetig auf $I = (a, b)$. Dann existiert,für die obige Gleichung, auf I eine Fundamentalmatrix von n Lösungen.

Beweisidee:
Wähle n beliebige, voneinander linear unabhängige Anfangswerte, für ein festes $t_0 \in I$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung zu jedem der AWP auf ganz I. Es genügt zu zeigen, dass die Lösungen für ein t linear unabhängig sind. Das gilt aber für t_0.

Wie lautet der Satz über die Bedeutung der Fundamentalmatrix?

Es gäbe ein homogenes lineares DGL-System ersten Ordnung:

$$\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x}$$

Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix von dem DGL-System auf (a, b), dann ist die Allgemeine Lösung der Gleichung auf dem Gebiet $G = \big\{(t, x) \mid t \in (a, b), \|x\| < \infty\big\}$:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot c$$

wobei c ein beliebiger Vektor ist.

Wie findet man die Lösung eines inhomogenen linearen DGL-System, falls die Fundamentalmatrix Φ des zugehörigen homogenen DGL-System schon bekannt ist?

Die Lösung hat die Form:

$$x(t) = \underbrace{\Phi \cdot c}_{\text{allg. Lsg. der hom. Glg.}} + \underbrace{\Psi}_{\text{eine spezielle Lsg. der inhom. Glg.}}$$

Sie kann mittels Variation der Konstanten bestimmt werden. Es gilt die folgende Lösungsformel:

$$x(t) = \Phi(t)\left[c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(t')f(t')\,\mathrm{d}t'\right]$$

Es gäbe einen linearen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten**.

$$\dot{x} = Ax$$

Wie löst man das System mit der Ansatzmethode?

Ansatz: $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}^n$.

$\Rightarrow$ Eigenwertgleichung:

$$Ac = \lambda c \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren.

Dann sind $x_i = c_i e^{\lambda_i t}$ Lösungen.

Es gäbe einen linearen homogenen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax$.

Was gilt für Lösungen, die mit der Ansatzmethode bestimmt wurden, falls $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und was gilt für $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

A, c_i, λ_i,komplex: Man bekommt ein Fundamentalsystem falls A n verschiedene Eigenwerte hat. A reellwertig:

- Fundamentalsystem wenn A n lin. unab. Eigenvektoren besitzt.
- Ein komplexer Eigenwert tritt immer gemeinsam mit einem dazu c.c. auf.
- Aus einer komplexen Lösung $x(t)$ bekommt man zwei reelle Lösungen $u(t) = \Re(x(t))$ und $v(t) = \Im(x(t))$.

Es gäbe einen homogenen linearen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax$. Außerdem gäbe es zu dem System ein AWP mit $x(t_0) = x_0$. Dann ist $e^A t$...

... Fundamentalmatrix von dem DGL-System auf $I = (-\infty, \infty)$.

Das Anfangswertproblem hat die Lösung:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$$

Es gäbe ein AWP zu einem inhomogenen linearen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax + f(t), x(t_0) = x_0$. Wie berechnet man die Lösung?

Es gilt die folgende Lösungsformel:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-t')A} f(t')\,\mathrm{d}t' \qquad (1)$$

Wie berechnet man $e^A t$ wenn A diagonal?

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}$$

Wie berechnet man $e^A t$ wenn A diagonalisierbar?

$A = SDS^{-1}$ S eine reguläre Matrix, D ist diagonal.

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$$

Diagonalisieren:

Man findet D mit dem Charakteristischen Polynom $\chi_A = 0$. Als spalten von S nimmt man die zu den Eigenwerten zugehörige Eigenvektoren.

Wie berechnet man $e^A t$ wenn A nicht diagonalisierbar?

Man bringt es auf die Jordansche Normalform mit r Jordan-Blöcken.

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} \\ &= S \operatorname{diag}\left(e^{J_1(\lambda(1))t}, \dots, e^{J_r(\lambda_r)t}\right) S^{-1} \\ &= S \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t} H_1(t), \dots, e^{\lambda_r t} H_r(t)\right) S^{-1} \end{aligned}$$

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$