Wann ist eine linearer Operator aus $\mathcal{H}$ *dicht definiert*?

Wenn $D(A)$ *Definitionsbereich* dicht in $\mathcal{H}$ ist.

Wie ist ein beschränkter Operator definiert?

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. A heißt beschränkt, falls für jede beschränkte Menge $M \subset D(A)$ gilt, dass $A[M]$ beschränkt ist.

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. A heißt stetig, falls

für jede Folge (φ_n) in $D(A)$ mit $\varphi_n \to \varphi \in D(A)$ gilt, dass

$$A\varphi_n \to A\varphi$$

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Welche Aussagen sind äquivalent zu

- A ist beschränkt ?

- $\exists c > 0 : \forall \varphi \in D(A) \|A\phi\| \leq c\|phi\|$,
- A ist stetig,
- A ist stetig in 0.

Wann lässt sich ein linearer Operator A auf ganz $\mathcal{H}$ fortsetzen?

Falls $D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$ und A stetig, lässt sich A **stetig** auf $\mathcal{H}$ fortsetzen.

Was ist $B(\mathcal{H})$?

$B(\mathcal{H})$ ist der Vektorraum aller **beschränkten** linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$. Es ist ein Vektorraum ,da für ein skalar c und zwei beschränkte Operatoren A_1, A_2 $A_1 + A_2$ und cA auch beschränkt sind.

Wie ist die Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$ definiert?

$$\|T\| \coloneqq \inf\big\{c > 0 \mid \forall\varphi \in \mathcal{H} : \|T\varphi\| \leq c\|\varphi\|\big\}$$

Was besagt der Satz Norm auf $B(\mathcal{H})$, außer dass die definierte Operatornorm tatsächlich einer Norm auf $(\mathcal{H})$ ist?

$\big(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|\big)$ ist ein Banach-Raum.

Es gilt die *Submultiplikativität* der Norm, also $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Welche äquivalente zu

$$\|T\| := \inf\{c < 0 \mid \forall\varphi \in \mathcal{H} \|T\varphi\| \leq \|\varphi\|\}$$

Charakterisierungen der Operatornorm auf $B(\mathcal{H})$ gibt es (Es sind 4.)?

$$\|T\| = \sup\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| \leq 1\}$$
$$\|T\| = \sup\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1\}$$
$$\|T\| = \sup\{\|T\varphi\| \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| < 1\}$$
$$\|T\| = \sup\Big\{\big|\langle\psi, T\varphi\rangle\big| \mid \psi, \varphi \in \mathcal{H}, \big(\|\psi\| \leq 1 \wedge \|\varphi\| \leq 1\big)\Big\}$$

Ein Operator aus $B(\mathcal{H})$ heißt *endlich-dimensional*, wenn ...

... der Bildbereich von diesem Operator endlich-dimensional ist.

Wann existiert der inverse Operator zu einem linearen Operator A?

Falls $A : D(A) \to \mathrm{im} A$ injektiv. Dann ist A^{-1} auch linear.

Was besagt der Satz über den inversen Operator?

Wenn $A \in B(\mathcal{H})$, $\mathrm{im} A = \mathcal{H}$ und A^{-1} existiert, dann ist $A^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

Was besagt der Sagt über den adjungierten Operator?

Zu jedem $T \in B(\mathcal{H})$ existiert genau ein $T^* \in B(\mathcal{H})$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}: \quad \langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^* \varphi, \psi \rangle$$

T^* heißt der zu T adjungierte Operator. Es gilt: $\|T\| = \|T^*\|$

$(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ist eine C^*-Algebra mit Eins-Element, d.h. ...

...

i) $B(\mathcal{H})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer **Multiplikation** (assoziative, bilineare Abbildung)

$$B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \ni (S, T) \mapsto S \circ T$$

Als Vektorraum mit **assoziativer bilinearer** Abbildung ist $B(\mathcal{H})$ eine Abbildung. Das Eins-Element dieser Algebra ist Einheitsoperator $\mathbb{1}$.

ii) $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ist eine **normierte** Algebra, d.h. $\|\cdot\|$ ist **submultiplikativ**:

$$\forall S, T \in B(\mathcal{H}) : \|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Es ist eine **Banach-Algebra** (also vollständig und normiert).

iii) $B(\mathcal{H})$ ist eine ***-Algebra**.

iv) Die Norm erfüllt die C^***-Algebra**, d.h. $\forall T \in B(\mathcal{H}) : \|T^*T\| = \|T\|^2$.

$B(\mathcal{H})$ ist eine ***-Algebra**, d.h. ...

... es gibt eine Abbildung $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}), \quad T \mapsto T^*$ mit

$\forall S, T \in B(\mathcal{H}), \forall \lambda \in \mathbb{C}:$

1. $(\lambda S + T)^* = \bar{\lambda} S^* + T^*$,
2. $(ST)^* = T^* S^*$,
3. $S^{**} = S$

Eine solche Abbildung heißt *Involution*.