

<p>Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (implizit). Was versteht man unter einer Lösung der DGL?</p>	<p>Seien G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n + 2$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $F : G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt</p> $F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ <p><i>implizite</i> gewöhnliche DGL der Ordnung n.</p> <p>Sei $x \in C^n, x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in G \quad \forall_{t \in (a, b)}$, und 2. die Gleichung $F = 0$ ist erfüllt $\forall_{t \in (a, b)}$.
<p>Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (explizit).</p>	<p>Sei \tilde{G} ein Gebiet im $\mathbb{R}^n + 1$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $f : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt</p> $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ <p><i>explizite</i> gewöhnliche DGL der Ordnung n.</p> <p>Sei $x \in C^n, x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \tilde{G} \quad \forall_{t \in (a, b)}$, und 2. die Gleichung $f = 0$ ist erfüllt für alle $t \in (a, b)$.
<p>Ein Anfangswertproblem heißt <i>korrekt gestellt</i>, wenn..</p>	<p>genau eine Lösung existiert und eine stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gewährleistet ist.</p>
<p>Wie löst man $\dot{x} + f(t)x = g(t)$ mit der Eulerschen Methode?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Multipliziere mit $\exp\left(\int_{t_0}^t f(t') dt'\right)$. • Fasse LHS als eine Ableitung nach x. • Integriere es auf.

<p>Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?</p>	<p>Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $T : A \rightarrow A$ kontrahierend mit Kontraktionszahl q. Dann:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. T hat genau einen Fixpunkt x^* in A, 2. für beliebige $x_0 \in A$ konvergiert $x_{n+1} = Tx_n$ gegen x^* mit $n \in \mathbb{N}$, 3. es gilt die Abschätzung: $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0)$
<p>$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$ genügt einer <i>Lippschitzbedingung</i> bzg. des 2. Arguments auf G, wenn</p>	<p>$\exists L > 0 \quad \forall t, x_1, x_2 \quad \text{mit} \quad (t, x_1), (t, x_2) \in G$</p> $ f((t, x_1) - f(t, x_2)) \leq L x_1 - x_2 $
<p>Definiere die Lippschitzbedingung für Vektorfunktionen.</p>	<p>$\underline{f} : \mathbb{R}^n + 1 \supseteq D(\underline{f}) \rightarrow \mathbb{R}^n : \quad (t, \underline{x}) \mapsto f(t, vec \underline{x})$ genügt einer <i>Lippschitzbedingung</i> bzgl. \underline{x} in $D(\underline{f})$, wenn $\forall \underline{x}, \underline{y}$ mit $(t, \underline{x}), (t, \underline{y}) \in D(\underline{f}) \quad \exists \quad L > 0$:</p> $\left\ \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y}) \right\ _n \leq L \left\ \underline{x} - \underline{y} \right\ _n$ <p>$\ \cdot\ _n$ ist beliebige Norm in \mathbb{R}^n.</p>
<p>Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.</p>	<p>Sei $\dot{x} = f(t, x)$ mit $x_0 = x(t_0)$ ein Anfangswertproblem (AWP) gegeben, f erfülle die folgenden Bedingungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\exists a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass f auf dem Rechteck $Q := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t - t_0 \leq a, x - x_0 \leq b \right\}$ <p>stetig und durch M beschränkt ist.</p> <ul style="list-style-type: none"> • f ist auf Q Lippschitzstetig bzg. x mit Lippschitzkonstante L. <p>Dann existiert genau eine lokale Lösung des AWP, d.h. $\exists \sigma > 0$ so ,dass auf $J := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ genau eine Lösung existiert. Man kann σ so wählen: $\sigma < \min \left\{ a, \frac{b}{m}, \frac{1}{L} \right\}$.</p>

Ein explizites Differentialgleichungssystem n -ter Ordnung der Dimension k ist definiert als:

$$\underline{x}^{(n)} = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \dots, \underline{x}^{(n-1)}(t))$$

wobei $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}^k.$

Wie lässt sich eine Differentialgleichung n -ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Dimension k transformieren?

Sei $x \in C^n((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ eine Lösung einer skalaren DGL n -ter Ordnung $(x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}))$ eventuell mit Anfangsbedingungen.

Definiere $\underline{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $z_i(t) = x(t)^{(i-1)}, i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt $\dot{z}_i = z_{i+1} = x^{(i)}$.

$z = \underline{z}(t)$ eine Lösung des n -dim. DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\dot{\underline{z}}(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \\ f(t, \underline{z}) \end{pmatrix} = \underline{g}(t, \underline{z}) \qquad D(\underline{g}) = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$$

Für $\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0$ setze $z_i^0 = x^{(i-1)}(t_0)$.