

<p>Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (implizit). Was versteht man unter einer Lösung der DGL?</p>	<p>Seien G ein Gebiet im \mathbb{R}^{n+2}, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $F : G \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt</p> $F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$ <p><i>implizite</i> gewöhnliche DGL der Ordnung n.</p> <p>Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\left(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) \in G \quad \forall_{t \in (a, b)}$, und 2. die Gleichung $F = 0$ ist erfüllt $\forall_{t \in (a, b)}$.
<p>Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (explizit).</p>	<p>Sei \tilde{G} ein Gebiet im \mathbb{R}^{n+1}, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x(t)$ n mal differenzierbar und $f : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt</p> $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ <p><i>explizite</i> gewöhnliche DGL der Ordnung n.</p> <p>Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\left(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right) \in \tilde{G} \quad \forall_{t \in (a, b)}$, und 2. die Gleichung $f = 0$ ist erfüllt für alle $t \in (a, b)$.
<p>Ein Anfangswertproblem heißt <i>korrekt gestellt</i>, wenn..</p>	<p>genau eine Lösung existiert und eine stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gewährleistet ist.</p>
<p>Wie löst man $\dot{x} + f(t)x = g(t)$ mit der Eulerschen Methode?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Multipliziere mit $\exp\left(\int_{t_0}^t f(t') \, dt'\right)$. • Fasse LHS als eine Ableitung nach x. • Integriere es auf.

<p>Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?</p>	<p>Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $T : A \rightarrow A$ kontrahierend mit Kontraktionszahl q. Dann:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. T hat genau einen Fixpunkt x^* in A, 2. für beliebige $x_0 \in A$ konvergiert $x_{n+1} = Tx_n$ gegen x^* mit $n \in \mathbb{N}$, 3. es gilt die Abschätzung: $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0)$
<p>$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$ genügt einer <i>Lippschitzbedingung</i> bzg. des 2. Arguments auf G, wenn</p>	<p>$\exists L > 0 \quad \forall t, x_1, x_2 \quad \text{mit} \quad (t, x_1), (t, x_2) \in G$</p> $ f((t, x_1) - f(t, x_2)) \leq L x_1 - x_2 $
<p>Definiere die Lippschitzbedingung für Vektorfunktionen.</p>	<p>$\underline{f} : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq D(\underline{f}) \rightarrow \mathbb{R}^n : (t, \underline{x}) \mapsto f(t, \text{vec } \underline{x})$ genügt einer <i>Lippschitzbedingung</i> bzgl. \underline{x} in $D(\underline{f})$, wenn $\forall \underline{x}, \underline{y}$ mit $(t, \underline{x}), (t, \underline{y}) \in D(\underline{f}) \quad \exists L > 0$:</p> $\left\ \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y}) \right\ _n \leq L \left\ \underline{x} - \underline{y} \right\ _n$ <p>$\ \cdot\ _n$ ist beliebige Norm in \mathbb{R}^n.</p>
<p>Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.</p>	<p>Sei $\dot{x} = f(t, x)$ mit $x_0 = x(t_0)$ ein Anfangswertproblem (AWP) gegeben, f erfülle die folgenden Bedingungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\exists a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass f auf dem Rechteck $Q := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t - t_0 \leq a, x - x_0 \leq b \right\}$ <p>stetig und durch M beschränkt ist.</p> <ul style="list-style-type: none"> • f ist auf Q Lippschitzstetig bzg. x mit Lippschitzkonstante L. <p>Dann existiert genau eine lokale Lösung des AWP, d.h. $\exists \sigma > 0$ so ,dass auf $J := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ genau eine Lösung existiert. Man kann σ so wählen: $\sigma < \min \left\{ a, \frac{b}{m}, \frac{1}{L} \right\}$.</p>

<p>Ein explizites Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung der Dimension k ist definiert als:</p>	$\underline{x}^{(n)} = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \dots, \underline{x}^{(n-1)}(t))$ <p>wobei $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}^k.$</p>
<p>Wie lässt sich eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Dimension k transformieren?</p>	<p>Sei $x \in C^n((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ eine Lösung einer skalaren DGL n-ter Ordnung $(x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}))$ eventuell mit Anfangsbedingungen.</p> <p>Definiere $\underline{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $z_i(t) = x(t)^{(i-1)}, i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt $\dot{z}_i = z_{i+1} = x^{(i)}$.</p> <p>$z = \underline{z}(t)$ eine Lösung des n-dim. DGL-Systems 1. Ordnung:</p> $\dot{\underline{z}}(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \\ f(t, \underline{z}) \end{pmatrix} = \underline{g}(t, \underline{z}) \quad D(\underline{g}) = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ <p>Für $\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0$ setze $z_i^0 = x^{(i-1)}(t_0)$.</p>
<p>Definiere den Begriff einer Fortsetzung einer Lösung.</p>	<p>Eine Lösung y des AWP</p> $\dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x(t_0) = X_0$ <p>auf einem Intervall (a', b') heißt <i>Fortsetzung von x</i> (x eine lokale Lösung des AWP auf (a, b)), wenn:</p> <ul style="list-style-type: none"> $(a, b) \subset (a', b')$, $y(t) \equiv x(t) \forall t \in (a, b)$
<p>Wie lautet der Satz über die Eindeutigkeit der Fortsetzung?</p>	<p>Sei ein</p> $\text{AWP: } \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ <p>gegeben.</p> <p>Sei $Q = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$ eine Menge auf der das AWP mit $(t_0, x_0) \in Q$ lokal lösbar ist. Sei x auf $(a, b) \in [t_1, t_2]$ eine Lösung des AWP. Seien y_1, y_2 zwei Fortsetzungen von x auf $(a', b') \in [t_1, t_2]$. Dann gilt:</p> $y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in (a', b')$

<p>Eine Lösung, die nicht mehr fortsetzbar ist, heißt...</p>	<p>... <i>maximal</i>.</p>
<p>Eine Lösung heißt <i>maximal</i>, wenn...</p>	<p>... sie nicht mehr fortsetzbar ist.</p>
<p>Wie lautet der Satz über die maximale Lösung?</p>	<p>Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen vom Satz von Picard/Lindelöf. Dann gilt:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\exists!$ eine maximal Lösung x_{\max} des AWP (auf (a, b)). 2. Für $u := \lim_{t \rightarrow a^+} x_{\max}(t)$, $v := \lim_{t \rightarrow b^-} x_{\max}(t)$ gilt $(a, u), (b, v) \in \partial G$.
<p>Wie lautet der Satz über die Abschätzung der Differenz von Lösungen (stetige Abhängigkeit)?</p>	<p>Sei $\dot{x} = f(t, x)$, f stetig auf einem Streifen $(a, b) \times \mathbb{R}$. Für jedes abgeschlossene Intervall $[a', b'] \subset (a, b)$ existieren eine Lippschitzkonstante L' mit:</p> $\forall_{t \in [a', b']} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} : \quad f(t, x_1) - f(t, x_2) \leq L' \ x_1 - x_2\ $ <p>Seien nun $x(t), \hat{x}(t)$ Lösungen eines AWP mit $x(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ auf $[a', b']$ MIT $t_o \in (a', b')$. Dann gilt:</p> $\forall_{t \in [a', b']} : \quad x(t) - \hat{x}(t) \leq e^{L' t-t_0 } \cdot \ x_0 - \hat{x}_0\ $

<p>Wie ist ein linearer DGL-System 1. Ordnung definiert?</p>	$\dot{x} = A(t)f(t), \quad \text{homogen falls } f(t) = 0$ $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$ $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \text{ gegeben auf } t \in I = (a, b)$
<p>Gibt den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines AWP zu einer linearen DGL an.</p>	<p>Sei $L(t, x) = f(t), x^{(i)}(t_0) = \chi_i, i \in \{0, \dots, n - 1\}$ ein AWP.</p> <p>Die Koeffizienten $a_i(t)$ von $L(t, x)$ seien aus \mathbb{C} oder \mathbb{R} und stetig auf $I \subset \mathbb{R}, f$ stetig auf I. Seien $t_0 \in I, \chi_i \in \mathbb{R}$ gegeben.</p> <p>Dann besitzt das AWP genau eine Lösung.</p> <p>Diese existiert auf dem ganzen Intervall I und hängt auf jedem kompakten Teilintervall von I von den ABen $a_i(t), f(t)$ stetig ab.</p>
<p>Sei ein linearer homogener DGL-System 1. Ordnung und n-ten Dimension gegeben. Dann heißt ein System von n lin. unabhängigen Lösungen...</p>	<p><i>Fundamentalsystem.</i></p>
<p>Die Fundametalmatrix ist...</p>	<p>die Lösungsmatrix $\Phi(t)$ ($(x_1 x_2 ...)$ Lösungen als Spalten.) aus n lin. unabhängigen Lösungen. (Das zugehörige homogene LDGLS ist n-ter Ordnung).</p>

<p>Gib drei äquivalente Aussage zu: Eine quadratische Lösungsmatrix $\Phi(t)$ ist die Fundamentalmatrix.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Die Spalten von $\Phi(t)$ bzw. die einzelne Lösungen sind linear unabhängig , $\forall t \in I : \text{rang} \Phi(t)$ ist maximal, $\exists t \in I : \text{rang} \Phi(t)$ ist maximal. <p>I Stetigkeitsintervall auf dem das LDGLS gegeben ist.</p>
<p>Wronskideterminante ist definiert als...</p>	<p>... die Determinante der Fundamentalmatrix.</p>
<p>Die Determinante der Fundamentalmatrix heißt...</p>	<p>... Wronskideterminante.</p>
<p>Satz über die Wronski-Determinante. Für n Lösungen eines homogenen LDGLS 1.Ordnung und n-ter Dimension sind äquivalent:</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Lösungen bilden ein Fundamentalsystem. ... 	<p>...</p> <ul style="list-style-type: none"> $\forall t \in I \ W(t) \neq 0,$ $\exists t \in I \ W(t) \neq 0,$ <p>I Stetigkeitsintervall auf dem das LDGLS gegeben ist. $W(t)$ Wronski-Determinante.</p>

<p>Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Fundamentalmatrix lautet:</p> <p>(+Beweisidee)</p>	<p>Es gäbe ein homogenes lineares DGL-System mit der Ordnung 1 und Dimension n.</p> $\dot{x} = A(t)x$ <p>Die Koeffizientenmatrix $A(t)$ sei stetig auf $I = (a, b)$. Dann existiert, für die obige Gleichung, auf I eine Fundamentalmatrix von n Lösungen.</p> <p>Beweisidee: Wähle n beliebige, voneinander linear unabhängige Anfangswerte, für ein festes $t_0 \in I$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung zu jedem der AWP auf ganz I. Es genügt zu zeigen, dass die Lösungen für ein t linear unabhängig sind. Das gilt aber für t_0.</p>
<p>Wie lautet der Satz über die Bedeutung der Fundamentalmatrix?</p>	<p>Es gäbe ein homogenes lineares DGL-System ersten Ordnung:</p> $\dot{x} = A(t)x$ <p>Ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix von dem DGL-System auf (a, b), dann ist die Allgemeine Lösung der Gleichung auf dem Gebiet $G = \{(t, x) \mid t \in (a, b), \ x\ < \infty\}$:</p> $x(t) = \Phi(t) \cdot c$ <p>wobei c ein beliebiger Vektor ist.</p>
<p>Wie findet man die Lösung eines inhomogenen linearen DGL-System, falls die Fundamentalmatrix Φ des zugehörigen homogenen DGL-System schon bekannt ist?</p>	<p>Die Lösung hat die Form:</p> $x(t) = \underbrace{\Phi \cdot c}_{\text{allg. Lsg. der hom. Glg.}} + \underbrace{\Psi}_{\text{eine spezielle Lsg. der inhom. Glg.}}$ <p>Sie kann mittels Variation der Konstanten bestimmt werden. Es gilt die folgende Lösungsformel:</p> $x(t) = \Phi(t) \left[c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(t') f(t') dt' \right]$
<p>Es gäbe einen linearen DGL-System der Dimension n mit konstanten Koeffizienten.</p> $\dot{x} = Ax$ <p>Wie löst man das System mit der Ansatzmethode?</p>	<p>Ansatz: $x(t) = c \cdot e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}^n.$ \Rightarrow Eigenwertgleichung:</p> $Ac = \lambda c \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$ <p>Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren. Dann sind $x_i = c_i e^{\lambda_i t}$ Lösungen.</p>

Es gäbe einen linearen homogenen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax$.

Was gilt für Lösungen, die mit der Ansatzmethode bestimmt wurden, falls $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und was gilt für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

A, c_i, λ_i , komplex: Man bekommt ein Fundamentalsystem falls A n verschiedene Eigenwerte hat. A reellwertig:

- Fundamentalsystem wenn A n lin. unab. Eigenvektoren besitzt.
- Ein komplexer Eigenwert tritt immer gemeinsam mit einem dazu c.c. auf.
- Aus einer komplexen Lösung $x(t)$ bekommt man zwei reelle Lösungen $u(t) = \Re(x(t))$ und $v(t) = \Im(x(t))$.

Es gäbe einen homogenen linearen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax$. Außerdem gäbe es zu dem System ein AWP mit $x(t_0) = x_0$. Dann ist $e^{At} \dots$

... Fundamentalmatrix von dem DGL-System auf $I = (-\infty, \infty)$.

Das Anfangswertproblem hat die Lösung:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$$

Es gäbe ein AWP zu einem inhomogenen linearen DGL-System der Dimension n **mit konstanten Koeffizienten** $\dot{x} = Ax + f(t), x(t_0) = x_0$. Wie berechnet man die Lösung?

Es gilt die folgende Lösungsformel:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-t')A} f(t') dt' \quad (1)$$

Wie berechnet man e^{At} wenn A diagonal?

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}$$

<p>Wie berechnet man e^{At} wenn A diagonalisierbar?</p>	<p>$A = SDS^{-1}$ S eine reguläre Matrix, D ist diagonal.</p> $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$ <p>Diagonalisieren:</p> <p>Man findet D mit dem Charakteristischen Polynom $\chi_A = 0$. Als spalten von S nimmt man die zu den Eigenwerten zugehörige Eigenvektoren.</p>
<p>Wie berechnet man e^{At} wenn A nicht diagonalisierbar?</p>	<p>Man bringt es auf die Jordansche Normalform mit r Jordan-Blöcken.</p> $ \begin{aligned} e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} \\ &= S \operatorname{diag}\left(e^{J_1(\lambda(1))t}, \dots, e^{J_r(\lambda_r)t}\right)S^{-1} \\ &= S \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}H_1(t), \dots, e^{\lambda_r t}H_r(t)\right)S^{-1} \end{aligned} $ $ H_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ & & & 1 \end{pmatrix} $