Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (implizit). Was versteht man unter einer Lösung der DGL?

Seien G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n + 2$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}, t \rightarrowtail x(t)$ n mal differenzierbar und $F : G \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

implizite gewöhnliche DGL der Ordnung n.

Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \rightarrowtail \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:

1. $\Big(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots x^{(n)}(t)\Big) \in G \qquad \forall_{t\in(a,b)}$, und
2. die Gleichung $F = 0$ ist erfüllt $\forall_{t\in(a,b)}$.

Definiere eine gewöhnliche Differentialgleichung (explizit).

Sei $\tilde{G}$ ein Gebiet im $\mathbb{R}^n + 1$, I ein Intervall, eine Funktion $x : I \to \mathbb{R}, t \rightarrowtail x(t)$ n mal differenzierbar und $f : \tilde{G} \to \mathbb{R}$. Dann heißt

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

explizite gewöhnliche DGL der Ordnung n.

Sei $x \in C^n$, $x : (a, b) \rightarrowtail \mathbb{R}$. x ist eine Lösung der DGL falls:

1. $\Big(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots x^{(n-1)}(t)\Big) \in \tilde{G} \qquad \forall_{t\in(a,b)}$, und
2. die Gleichung $f = 0$ ist erfühlt für alle $t \in (a, b)$.

Ein Anfangswertproblem heißt *korrekt gestellt*, wenn..

genau eine Lösung existiert und eine stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen gewährleistet ist.

Wie löst man $\dot{x} + f(t)x = g(t)$ mit der Eulerschen Methode?

- Multipliziere mit $\exp\Big(\int_{t_0}^t f(t')\,\mathrm{d}t'\Big)$.
- Fasse LHS als eine Abletiung nach x.
- Integriere es auf.

Wie lautet der Banachsche Fixpunktsatz?

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, $T : A \to A$ kontrahierend mit Konktraktionszahl q. Dann:

1. T hat genau einen Fixpunkt x^* in A,
2. für beliebige $x_0 \in A$ konvergiert $x_{n+1} = Tx_n$ gegen x^* mit $n \in \mathbb{N}$,
3. es gilt die Abschätzung:

$$\mathrm{d}(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \mathrm{d}(x_1, x_0)$$

$f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (t, x) \rightarrowtail f(t, x)$ genügt einer *Lippschitzbedingung* bzg. des 2. Arguments auf G, wenn

$\exists L > 0 \quad \forall t, x_1, x_2 \quad \text{mit} \quad (t, x_1), (t, x_2) \in G$

$$\big| f((t, x1) - f(t, x_2)) \big| \leq L |x_1 - x_2|$$

Definiere die Lippschitzbedingung für Vektorfunktionen.

$\underline{f} : \mathbb{R}^n + 1 \supseteq D(\underline{f} \to \mathbb{R}^n : \quad (t, \underline{x}) \rightarrowtail f(t, vecx)$ genügt einer *Lippschitzbedingung* bzgl. $\underline{x}$ in $D(\underline{f})$, wenn $\forall \underline{x}, \underline{y}$ mit $(t, \underline{x}), (t, \underline{y}) \in D(\underline{f}) \quad \exists \quad L > 0$:

$$\Big\| \underline{f}(t, \underline{x}) - \underline{f}(t, \underline{y}) \Big\|_n \leq L \Big\| \underline{x} - \underline{y} \Big\|_n$$

$\|\cdot\|_n$ ist beliebige Norm in $\mathbb{R}^n$.

Wie lautet der Satz von Picard-Lindelöf über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Sei $\dot{x} = f(t, x)$ mit $x_0 = x(t_0)$ ein Anfangswertproblem (AWP) gegeben, f erfülle die folgenden Bedingungen:

- $\exists a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass f auf dem Rechteck

  $$Q := \Big\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b \Big\}$$

  stetig und durch M beschränkt ist.
- f ist auf Q Lippschitzstetig bzg. x mit Lippschitzkonstante L.

Dann existiert geanu eine lokale Lösung des AWP, d.h. $\exists \sigma > 0$ so ,dass auf $J := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ genau eine Lösung existiert. Man kann σ so wählen: $\sigma < \min \Big\{ a, \frac{b}{m}, \frac{1}{L} \Big\}$.

Ein explizites Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung der Dimension k ist definiert als:

$$\underline{x}^{(n)} = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \dots, \underline{x}^{n-1}(t))$$

wobei $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \cdot k} \supseteq D(f) \to \mathbb{R}^k$.

Wie lässt sich eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Dimension k transformieren?

Sei $x \in C^n((\alpha, \beta), \mathbb{R})$ eine Lösung einer skalaren DGL n-ter Ordnung ($x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ eventuell mit Anfangsbedingungen.

Definiere $\underline{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $z_i(t) = x(t)^{(i-1)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt $\dot{z}_i = z_{i+1} = x^{(i)}$.

$z = \underline{z}(t)$ eine Lösung des n-dim. DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\underline{\dot{z}}(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \\ f(t, \underline{z}) \end{pmatrix} = \underline{g}(t, \underline{z}) \qquad D(\underline{g}) = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$$

Für $\underline{z}(t_0) = \underline{z_0}$ setze $z_i^0 = x^{(i-1)}(t_0)$.

Definiere den Begriff einer Fortsetzung einer Lösung.

Eine Lösung y des AWP

$$\dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x(t_0) = X_0$$

auf einem Intervall (a', b') heißt *Fortsetzung von x* (x eine lokale Lösung des AWP auf (a, b)), wenn:

- $(a, b) \subset (a', b')$,
- $y(t) \equiv x(t) \forall_{t \in (a,b)}$

Wie lautet der Satz über die Eindeutigkeit der Fortsetzung?

Sei ein

$$\text{AWP: } \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)), D(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gegeben.

Sei $Q = [t_1, t_2] \times [x_1, x_2]$ eine Menge auf der das AWP mit $(t_0, x_0) \in Q$ lokal lösbar ist. Sei x auf $(a, b) \in [t_1, t_2]$ eine Lösung des AWPs. Seien y_1, y_2 zwei Fortsetzungen von x auf $(a', b') \in [t_1, t_2]$. Dann gilt:

$$y_1(t) = y_2(t) \qquad \forall_{t \in (a', b')}$$

Eine Lösung, die nicht mehr fortsetzbar ist, heißt...

... *maximal*.

Eine Lösung heißt *maximal*, wenn...

... sie nicht mehr fortsetzbar ist.

Wie lautet der Satz über die maximale Lösung?

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. $f : G \to \mathbb{R}$ genüge den Bedingungen vom Satz von Picard/Lindelöf. Dann gilt:

1. $\exists!$ eine maximal Lösung $x_{\max}$ des AWP (auf (a, b)).
2. Für $u \coloneqq \lim\limits_{t\to a^+} x_{\max}(t)$, $v \coloneqq \lim\limits_{t\to b^-} x_{\max}(t)$ gilt $(a, u), (b, v) \in \partial G$.

Wie lautet der Satz über die Abschätzung der Differenz von Lösungen (stetige Abhängigkeit)?

Sei $\dot{x} = f(t, x)$, f stetig auf einem Streifen $(a, b) \times \mathbb{R}$. Für jedes abgeschlossene Intervall $[a', b'] \subset (a, b)$ existieren eine Lippschitzkonstante L' mit:

$$\forall_{t\in[a',b']}\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} : \quad \big|f(t, x_1) - f(t, x_2)\big| \leq L'\|x_1 - x_2\|$$

Seien nun $x(t), \hat{x}(t)$ Lösungen eines AWP mit $x(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ auf $[a', b']$ MIT $t_o \in (a', b')$. Dann gilt:

$$\forall_{t\in[a',b']} : \ \big|x(t) - \hat{x}(t)\big| \leq e^{L'|t-t_0|} \cdot \|x_0 - \hat{x}_0\|$$