Wann nennt man eine Abbildung *Diffeomorphismus*?

definition
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten 2cf30783-9699-47b2-b8a6-ecc059beea33

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Psi : U \to V$ heißt *Diffeomorphismus*, falls Ψ bijektiv und sowohl Ψ als auch $\Psi^{-1} : V \to U$ stetig diff'bar sind.

Was heißt es, dass eine Abbildung *regulär* ist?

definition, 1.1.1
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls Φ injektiv und stetig diff'bar ist, Φ' den Rang k hat und $\Phi^{-1} : \Phi[T] \to T$ stetig ist.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* (UM) des $\mathbb{R}^n$, wenn...

$\forall_a \in M$ $\exists$ offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U$ (d.h. U ist offene Umgebung von a) und ein Diffeomorphismus $\Psi : U \to V$ so, dass

$$\begin{aligned}\Psi\left[U \cap M\right] &= \left\{(y_1, \ldots, y_n) \in V; y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\right\} \\ &= V \cap \left(\mathbb{R}^k \times 0_{n-k}\right)\end{aligned}$$

Jede $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ heißt...

definition, 1.1.2
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Hyperfläche.

definition, 1.1.2
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Was ist eine *Hyperfläche*?

Jede $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

definition, 1.1.2
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

M ist eine k-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wie lässt sich M als *Nullstellenmenge* definieren?

$\forall_a \in M$ $\exists$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von a und $n-k$ stetig diff'bare Funktionen $f_1, \dots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ so, dass

$$M \cap U = \left\{x \in U; f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\right\}$$

und

$$\text{Rang}\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = n-k$$

Das heißt, dass die f_i linear unabhängig sind.

M ist eine k-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wie lässt sich M als *Graph* definieren?

$\forall_a \in M$ gibt es (evt. nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten) offene Umgebungen $U' \in \mathbb{R}^k$ von $a' = (a_1, \dots, a_k)$, $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $a'' = (a_{k+1}, \dots, a_n)$, sowie eine stetig diff'bare Abbildung $g : U' \to U''$ so, dass

$$M \cap \left(U' \times U''\right) = \left\{(x', x'') \in U' \times U''; x'' = g(x')\right\} = G(g)$$

M ist eine k-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wie lässt sich M mittels der *Parameterdarstellung* definieren?

$\forall_a \in M$ $\exists$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$, sowie eine reguläre Abbildung $\Phi : T \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \Phi(T) = U \cap M =: \text{W}$

Wann spricht man von einer *globalen Parametrisierung* einer UM M?

Φ und T wie in der Definition der Parameterdarstellung. (Φ, T) heißt *globale Parametrisierung* falls

$$\Phi(T) = M$$

Sonst spricht man von einer lokalen Parametrisierung.

$\Psi = \Phi^{-1}$, $W = T \cap M$. Φ, T und a wie in der Definition der Parameterdarstellung. Wie nennt man (Ψ, W) und wie heißen die Komponenten von $(t_1, \ldots, t_k) \coloneqq \Psi(a)$?

(Ψ, W) heißt *Karte um* a und die Komponenten des Vektors $\Psi(a)$ heißen *lokale Koordinaten von* a.

M eine UM. Ein *Atlas von* M ist..

ein System von Karten, das M überdeckt.

Wie lautet der Satz über die Parametertransformation (Kartenwechsel)?

Seien M eine k-dimensionale UM des $\mathbb{R}^n$, $a \in M$,(Ψ_1, W_1), (Ψ_2, W_2) zwei Karten um $a \in M$ mit $W \coloneqq W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Dann sind $S_i = \Psi_i(W)$ offene Teilmengen von T; und $h \coloneqq \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : S_1 \to S_2$ ist eine Diffeomorphismus (entsprechend für Diff'barkeit höherer Ordnung).

Die Abbildung h heißt *Kartenwechsel*.

Sei M eine UM des $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an M in a*, wenn ...

es eine stetige, diff'bare Abbildung $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon)m \to M$ gibt mit $\alpha(0) = a, \alpha'(0) = v$.

Sei M eine UM des $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Wie ist ein *Tangentialraum an M in a* definiert?

definition, tangentialraum, 1.2.1
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten

UUID

Ein *Tangentialraum an M in a* ist die Menge aller Tangentialvektoren an M in a und wird mit $T_a(M)$ bezeichnet.

Sei M eine UM des $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor an M in a*, wenn ...

$\forall v \in T_a(M) : w \perp v$ (d.h. orthogonal bzgl. des kanonischen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$).

Sei M eine UM des $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Wie ist ein *Normalraum an M in a* definiert?

definition, tangentialraum, 1.2.1
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten

UUID

Ein *Normalraum an M in a* ist die Menge aller Normalenvektoren an M in a und wird mit $N_a(M)$ bezeichnet.

Seien M eine k-dimensionale UM des $\mathbb{R}^n$, $a \in M$. Wie lässt sich eine Basis von $T_a(M)$ mittels einer Parameterdarstellung finden?

$T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum. Ist eine lokale Parameterdarstellung (Ψ, T), also:

$$T \subseteq \mathbb{R}^k, \Phi : T \to M \quad \text{und} \quad c \in T \quad \text{mit} \quad \Phi(c) = a,$$

dann bilden die Vektoren

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}(c)$$

eine Basis von $T_a(M)$.

Wird M lokal als Nullstellenmenge gegeben, wie lässt sich eine Basis für $N_a(M)$ finden?

$T_a(M)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum. Ist M lokal als Nullstellenmenge gegeben (Beschreibung durch Gleichungen) mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{gathered} f = (f_1, \ldots f_{n-k}) : U \to \mathbb{R}^{n-k}, \\ a \in M \cap U = \big\{x \in U; f(x) = 0\big\}, \\ \operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots x_k)}(a) = n - k. \end{gathered}$$

Dann bilden die Vektoren $\operatorname{grad} f_1(a), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$ eine Basis für $N_a(M)$.

Sei M eine 2-dimensionale UM des $\mathbb{R}^n$. Wie ist *Inhalt von* M definiert?

Es gäbe eine Parameterdarstellung $\Phi : T \to \Phi[T] = M$, wobei T offen und jordanmessbar, und die partiellen Ableitungen von Φ seien beschränkt auf T.

Unter dem *Inhalt von M* versteht man:

$$|M| := \int_T \underbrace{\big\|\Phi_{t_1}(t_1, t_2) \times \Phi_{t_2}(t_1, t_2)\big\| \, \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2}_{\mathrm{d}S}$$

Man nennt $\mathrm{d}S$ das *(2-dim.) Flächenelement (bzgl. Φ)*.

Sei M eine 2-dimensionale UM des $\mathbb{R}^n$. Wie definiert man $\int_M f \, \mathrm{d}S$?

Es gäbe eine Parameterdarstellung $\Phi : T \to \Phi[T] = M$, wobei T offen und jordanmessbar, und die partiellen Ableitungen von Φ seien beschränkt auf T. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion.

$$\begin{aligned} \int_M f \, \mathrm{d}S &:= \int_M f(x) \, \mathrm{d}S(x) \\ &:= \int_T f\big(\Phi(t)\big) \cdot \big\|\Phi_{t_1}(t_1, t_2) \times \Phi_{t_2}(t_1, t_2)\big\| \, \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2 \end{aligned}$$

Das Volumen des k-Parallelepipeds $P(a^{(1)}, \dots a^{(k)})$ ist definiert als ...

$$V_k(a^{(1)}, \dots a^{(k)}) := \sqrt{\det(A^\mathsf{T} A)}$$

Seien(Φ, T) eine lokale Parametrisierung, $t \in T$. Wie sind der metrischer Tensor von Φ (g_{ij}) und $g := \det(g_{ij})$ definiert?

$$(g_{ij}) := (\Phi')^\mathsf{T} \Phi' = \left(\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial t_j} \right\rangle \right)$$

$$g := \det(g_{ij}) = \det\Big((\Phi')^\mathsf{T} \Phi' \Big)$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dim. UM. Sei $M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was heißt es, dass f *über M integrierbar* ist?

Es liege einer der folgenden Fälle vor:

1. $\exists$ eine globale Parametrisierung (Φ, T).
2. $\Phi : T \to M$ sei eine lokale Parameterdarstellung, f habe einen kompakten Träger $\operatorname{supp} f \subseteq \Phi[T]$ (d.h. $f \circ \Phi$ hat kompakten Träger in T).

Dann heißt f *über M integrierbar*, falls $f\Big(\Phi(t)\sqrt{g(t)}\Big)$ über T integrierbar ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_M f(x) \, \mathrm{d}S(x) := \int_T f(\Phi(t)) \cdot \sqrt{g(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dim. UM. Wie definiert man den *k-dim. Inhalt von M* $(|M|)$?

Sei (Φ, T) eine globale Parametrisierung von M. Dann ist

$$|M| := \int_T \sqrt{g(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Wie lautet der Satz über die Unabhängigkeit der Integration von der Parameterdarstellung?

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dim. UM des $\mathbb{R}^n$, seien (Φ_1, T_1) und (Φ_2, T_2) lokale Parameterdarstellungen mit $V = \Phi_1[T_2] = \Phi_2[T_2]$, und habe $f : M \to \mathbb{R}$ kompakten Träger mit $\operatorname{supp} f \subseteq V$. Dann gilt

$$\int_{T_1} f\big(\Phi_1(t)\big) \cdot \sqrt{g^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t} = \int_{T_2} f\big(\Phi_2(s)\big) \cdot \sqrt{g^{(2)}(s)\,\mathrm{d}s}$$

Dabei ist $g^{(i)}$ die Determinante des zu Φ_i gehörenden Tensors.

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $U_1, \dots U_k \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$. Dann $\exists$ die der $U_1 \dots U_k$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf K. Wie ist sie definiert?

Die Zerlegung besteht aus Funktionen $\phi_1 \dots \phi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall_j \in \{1, \dots, k\} : \operatorname{supp} \phi_j \subseteq U_j, 0 \geq \phi \leq 1$
2. $\forall_x \in K : \sum_{j=1}^k \phi_j(x) = 1$

Sei K eine Menge, wann ex. eine Partition der Eins auf K?

Wenn $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und kompakt und $\exists$ offene Mengen $U_1, \dots U_k \in \mathbb{R}^n$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$.

Wie definiert man einen Integral einer Funktion f über eine k-dim. UM M des $\mathbb{R}^n$, wenn es keine globale Parametrisierung gibt? Was wird vorausgesetzt?

Es seien gegeben:

- $f \in C_c^\infty(M) \Rightarrow \exists$ lokale Parametrierungen $\Phi_j : \mathbb{R}^k \supseteq U_j \to V_j \subseteq M (j \in \{1, \dots, m\})$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq \bigcap_{j=1}^m V_j$.
- offene Mengen $W_j \in \mathbb{R}^n$ mit $V_j = M \cap W_j$.
- Eine der Überdeckung $W_1 \dots$ zugeordnete Zerlegung der Eins auf $\operatorname{supp} f$: $\phi_1, \dots \phi_m$.

Dann setzt man:

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}S(x) \coloneqq \sum_{j=1}^m \int_{V_j} (\phi_j f)(x)\,\mathrm{d}S(x).$$

Seien V ein k-dim. Vektorraum, $B_1 = (v_1, \dots, v_k)$, $B_2 = (w_1, \dots, w_k)$ zwei Basen von V. B_1 und B_2 heißen *gleichorientiert*, falls...

$$\det A > 0$$

wobei $A = (a_{ij})$ über

$$\forall_i \in \{1, \dots' k\} : w_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} v_j$$

definiert ist.

Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *orientierungserhaltend* und bzgl. der kanonischen Basis durch die Matrix C dargestellt, dann gilt:

$\det C > 0$

Worüber wird die Orientierung einer UM definiert?

Tangentialräume

Sei M eine k-dim. UM des $\mathbb{R}^n$. Eine Basis in $T_a(M)$ heißt positiv orientiert , wenn...

sie das Bild einer positiv orientierten Basis in $\mathbb{R}^k$ unter $\Phi'(c)$ ist. Wobei

$$\Phi : \mathbb{R}^k \supseteq T \to M \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine Parametrisierung und $\Phi(c) = a$.

Die Basis $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(c), \dots\right)$ ist positiv orientiert.

M heißt *orientierbar*, wenn es...

ein System O von Karten (h, W) gibt mit:

1. $\bigcup_{W \in O} W = M$,
2. $(W_1, W_2 \in O \wedge W_1 \cap W_2 \neq \emptyset) \Rightarrow \forall_{a \in W_1 \cap W_2}$ liefern (h_1, W_1) und (h_2, W_2) die gleiche Orientierung von $T_a(M)$.

Man sagt auch: Für M gibt es eine lokal verträgliche Menge von Orientierungen der Tangentialräume.

Zwei Karten (h_1, W_1), (h_2, W_2) heißen gleichorientiert (bzw. der zugehörige Kartenwechsel orientierungserhaltend), wenn...

$\det(h_2 \circ h_1^{-1}) > 0$.

Eine k-dim. UM M des $\mathbb{R}^n$

ist genau dann orientierbar, wenn... es einen Atlas aus gleichorientierten Karten gibt.

lemma, orientierung, 1.4.3
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Sei M eine $(n-1)$-dim. UM des $\mathbb{R}^n$. Dann ex. ein eindeutige Beziehung zwischen den Orientierungen von M und den stetigen Einheitsnormaleinvektorfeldern auf M.

Erkläre den Beweis zu dem Lemma (Beweisidee).

Sei M orientierbar, $a \in M$, es gäbe eine lokale Parametrisierung (Φ, T) mit $T(c) = a$. $\dim(T_a) = n - 1$.

Also es gibt zwei auf T_a orthogonale Einheitsvektoren (in 1D, unterschied in der Orientierung der Vektoren).

Wähle $n(a)$ so, dass $(n(a), \Phi'(c)e^{(1)}, \ldots, \Phi'(c)e^{(n-1)})$ positiv orientiert in $\mathbb{R}^n$ ist.

Tue das für jeden Punkt im $M \to$ gesuchtes Vektorfeld.

definition, rand, 1.5) Wie sind $\mathbb{R}^k_-$ und $\partial\mathbb{R}^k_-$. definiert?

(

- $\mathbb{R}^k_- = \left\{(t1, \ldots, t_k)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^k; t_1 \leq 0\right\}$
- $\partial\mathbb{R}^k_- = \left\{(t1, \ldots, t_k)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^k; t_1 = 0\right\}$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine K-dim. UM mit Rand, wenn ...

es um jeden Punkt $p \in M$ eine lokale Parameterdarstellung (Φ, T) mit $p \in \Phi[T]$ und T offen im $\mathbb{R}^k_-$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine K-dim. UM mit Rand. (Φ, T) eine lokale Parametrisierung. Der Punkt $p \in M$ heißt Randpunkt von M, wenn...

$p = \Phi(t)$ mit $t \in T \cap \partial\mathbb{R}^k_-$.

Eine Parameterdarstellung (Φ, T) heißt *randadaptiert* falls...

$$T \cap \partial\mathbb{R}^k_- \neq \emptyset$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dim. UM mit Rand. Dann gilt: (zwei Aussagen)

1. ∂M ist eine k-1 dimensionale UM ohne Rand.
2. M orientierbar $\Rightarrow \partial M$ orientierbar.

Wann ist ∂M positiv orientiert?

Seien $p \in \partial M$ und (Φ, T) randadaptiert. Eine Basis (B) von $T_p(\partial M)$ sei genau dann positiv orientiert, wenn die Basis (v|B) in $T_p(M)$ es ist. Wobei

$$v \coloneqq \Phi'(t)e^{(1)} \in T_p(M)$$

Wie definiert man einen regulären und einen singulären Randpunkt? Wie ist der Normaleneinheitsvektor definiert?

Sei G ein Gebiet so, dass $B\bar{G}$ kompakt ist.Ein Punkt $a \in \partial B$ heißt regulärer Randpunkt von B, wenn es eine offene Umgebung U um a gibt und $g : U \to \mathbb{R}$ stetig mit:

1. $B \cap U = \{x \in U;\ g(x) \leq 0\}$,
2. $\forall_x \in U :$ grad $g(x) \neq 0$.

Menge aller regulären Randpunkte in ∂B wird mit $\partial_r B$ bezeichnet. $(a \in \partial B \wedge a \notin \partial B_r)$, dann heißt a singulärer Randpunkt. Analog ist $\partial_s B = \partial B \setminus \partial_r B$.

$$n(a) \coloneqq \frac{\mathrm{grad} u g(a)}{\|\mathrm{grad} g(a)\|}$$

ist der (äußere) Normaleineinheitsvektor an ∂B in a.

Ein Teilmenge G heißt Gebiet, falls...

es offen, nichtleer und zusammenhängend ist.

Eine Teilraum ist zusammenhängend, falls...

es nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen geschrieben werden kann.

Es gibt viele äquivalente Definitionen.

Sei B kompakt. Sei $\partial_s B = \emptyset$ dann heißt B...

Kompaktum mit glatten Rand.

definition, gauss, 1.5.3
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Was ist ein Kompaktum mit glatten Rand?

Es ist eine kompakte Menge (M) mit $\partial_s M = \emptyset$.

Wie lautet der Satz von Gauß?

satz, gauss, stokes, 1.5.4, 1.5.5
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Seien $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glatten Tand, $n : \partial B \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld, $F : B \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\int_B \operatorname{div} F(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial B} \big\langle F(x), n(x) \big\rangle \,\mathrm{d}S$$

Wie lautet der klassische Satz von Stokes?

satz, gauss, stokes, 1.5.4, 1.5.5
mathe2::1sem::untermanigfaltigkeiten UUID

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte 2-dimensionale UM mit Rand ∂M. M sei durch ein Einheitsnormalenvektorfeld $n : M \to \mathbb{R}^3$ orientiert. ∂M habe die von M induzierte Orientierung. $t : \partial M \to \mathbb{R}^3$ bezeichne das Tangenteneinheitsfeld an die Kurve ∂M. Sei $F : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig diff'bares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_M \langle \mathrm{rot} F, n \rangle \, \mathrm{d}S = \int_{\partial M} \langle F, t \rangle \, \mathrm{d}s$$