Υπολογιστικά Μαθηματικά 2021–2022

Παύλος Ορφανίδης Γιώργος Χατζηλίγος
Σπύρος Κοντάκης

11 Ιανουαρίου 2022

Περιεχόμενα

Γενικά δεδομένα

$$AM = 4835 \tag{1}$$

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s|s'|s' \tag{2}$$

$$I_z\omega' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta|\omega|\omega \tag{3}$$

$$s(0) = s_0 \tag{4}$$

$$s'(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \tag{5}$$

$$m = 9kg$$

$$d = 1m$$

$$I_z = 0.38kgm^2$$

1 Πρόβλημα 1

1.1 Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.$A.T$ με την Μέθοδο του *Euler* και την βελτιωμένη μέθοδο του *Euler* με τις παρακάτω τιμές για τις εισόδους και τις αρχικές συνθήκες

Μεταφορική κίνηση

Euler s'

Έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$$s'' = f'(t, s') = (f1 + f2) - bs|s'|s' \tag{6}$$

$$s' = f(t, s) \tag{7}$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./7000]^T$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./8000]^T$$

$$s_0 = \frac{A.M.}{1000}$$

$$\theta_0 = 0$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + hf'(t, s')_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	$s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_1 = t_0 + 1h$	$s'_2 = s'_1 + hs''_1$
$t_2 = t_0 + 2h$	.
.	.
.	.
.	
$t_n = t_0 + nh$	

Στροφική κίνηση

$$\omega' = \frac{\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega|\omega}{I_z} = f(t, \omega) \tag{8}$$

Euler

$t_{n+1} = t_0 + nh$	$\omega_{n+1} = \omega_0 + h\omega' h$
$t_1 = t_0 + 1h$	$\omega_1 = \omega_0 + h\omega'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$\omega_2 = \omega_1 + h\omega'_1$
.	.
.	.
.	.
$t_{30.000} = t_0 + 29.999h$	$\omega_{30.000} = \omega_{29.999} + h\omega'_{29.999}$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler* s'

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$t_n = t_0 + nh$ $\quad s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s'_n) + f'(t_n + h, s'_n + hf'(t_n, s'_n))]$

το οποίο σημαίνει ότι:

$t_1 = t_0 + 1h$ $\quad s'_n + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{|s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m}|}{m} \frac{(s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m})}{m}]$

$t_2 = t_0 + 2h$

.

.

.

$t_n = t_0 + nh$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler* s

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$t_n = t_0 + nh$ $\quad s_{n+1} = s_n + hf(t, s)n$

το οποίο σημαίνει ότι:

$t_1 = t_0 + 1h$ $\quad s_{n+1} = s_n + hs'_n$

$t_2 = t_0 + 2h$ $\quad s_1 = s_0 + hs'_0$

.

.

.

$t_n = t_0 + nh$

Στροφική κίνηση

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{h}{2}[f(t,\omega) + f(t_n + h, \omega_n + f(t,\omega))] \\ &= \omega_n + \frac{h}{2}[\omega'_n + \frac{(\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega_n + \omega'_n|(\omega_n + \omega'_n))}{I_z}] \end{aligned} \tag{9}$$

1.2 Ερώτημα γ: Μέθοδος *Euler*

1.2.1 Δεδομένα:

$$f_1 + f_2 = Kps(sdes - s) - Kds(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + \frac{AM}{100}$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = \frac{AM}{200}$$

1.3 Μεταφορική Κίνηση

$$s' = \frac{(f_1 + f_2) - Kps(s_{des} - s)}{K_{ds}} = f(t, s)$$

Άρα, για την συνάρτηση $s(t)$ έχουμε:

$t_n = t_0 + nh$ $\quad s_{n+1} = s_n + hs'_n$
$t_1 = t_0 + 1h$ $\quad s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$ $\quad s_2 = s_1 + hs'_1$

.
.
.

$t_{30.000} = t_0 + 30.000h$ $\quad s30.000 = s29.999 + hs'29.999$

Για την συνάρτηση $s'(t)$:

$$S'' = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s') - b_s|s'|s'$$

Άρα, προκύπτει:

$t_n = t_0 + nh$ $\quad s'_{n+1} = s''_n + hs''_n$
$t_1 = t_0 + 1h$ $\quad s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_2 = t_0 + 2h$ $\quad s_2 = s'_1 + hs''_1$

.
.
.

$t_{30.000} = t_0 + 30.000h$ $\quad s_{30.000} = s_{29.999} + hs''29.999$

1.4 Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευλερ

1.4.1 Δεδομένα

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$
$$K_{ps} = 5$$
$$K_{ds} = 15 + (AM/100)$$
$$S_0 = 0$$
$$S_{des} = AM/200$$

1.4.2 Μεταφορική Κίνηση

Για την $s(t)$:

$t_n = t_0 + nh$ $\quad s_{n+1} = s_n + hs'_n$
$t_1 = t_0 + 1h$ $\quad s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$ $\quad s_2 = s_1 + hs'_1$

.
.
.

$t_{30.000} = t_0 + 30.000h$ $\quad s_{30.000} = s_{29.999} + hs'_{29.999}$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n, s_n) + f(t_n + h, s_n + h(f(t_n, s_n))] \\ &= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n, s_n) \\ &\quad + [-(t_1 + t_2) - K_{ps}(s_{des} - (s_n + h(\frac{-(f_1 + f_2) - K_{ps}(s_{des} - s_n)}{m}))]]K_{ds} \end{aligned} \tag{10}$$

Για τη $s'(t)$:

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s_n) + f(t_n + h, s'_n + h(f'(t_n, s_n)))]$$

Οπότε,

$$s'_n + (h/2)(f'(t_n, s_n) + \frac{(f_1 + f_2) - b_s(s'_n + h|(f_1 + f_2) - b_s|s'_n|s'_n}{m}|\frac{S'_n + h(f_1 + f_2) - b_s|s'_n|s'_n}{m}|m)$$