

Υπολογιστικά Μαθηματικά 2021–2022

Πάυλος Ορφανίδης Γιώργος Χατζηλίγος
Σπύρος Κοντάκης

13 Ιανουαρίου 2022

Περιεχόμενα

1	Πρόβλημα 1	2
1.1	Ερώτημα γ: Μέθοδος <i>Euler</i>	3
1.1.1	Δεδομένα:	3
1.2	Μεταφορική Κίνηση	4
1.3	Μέθοδος <i>Euler</i>	4
1.4	Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευλερ	4
1.4.1	Δεδομένα	4
1.4.2	Μεταφορική Κίνηση	4

Γενικά δεδομένα

$$AM = 4835 \quad (1)$$

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s |s'|s' \quad (2)$$

$$I_z \omega' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta |\omega|\omega \quad (3)$$

$$s(0) = s_0 \quad (4)$$

$$s'(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \quad (5)$$

$$m = 9kg$$

$$d = 1m$$

$$I_z = 0.38kgm^2$$

1 Πρόβλημα 1

Μεταφορική κίνηση

Euler s'

Έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$$s'' = f'(t, s') = (f1 + f2) - bs|s'|s' \quad (6)$$

$$s' = f(t, s) \quad (7)$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./7000]^T$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./8000]^T$$

$$s_0 = \frac{A.M.}{1000}$$

$$\theta_0 = 0$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$$t_n = t_0 + nh$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$t_1 = t_0 + 1h$$

$$t_2 = t_0 + 2h$$

.

.

.

$$t_n = t_0 + nh$$

$$s'_{n+1} = s'_n + hf'(t, s')_n$$

$$s'_1 = s'_0 + hs''_0$$

$$s'_2 = s'_1 + hs''_1$$

.

.

.

Στροφική κίνηση

$$\omega' = \frac{\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega|\omega}{I_z} = f(t, \omega) \quad (8)$$

Euler

$$t_{n+1} = t_0 + nh$$

$$t_1 = t_0 + 1h$$

$$t_2 = t_0 + 2h$$

.

.

.

$$t_{30.000} = t_0 + 29.999h$$

$$\omega_{n+1} = \omega_0 + h\omega'h$$

$$\omega_1 = \omega_0 + h\omega'_0$$

$$\omega_2 = \omega_1 + h\omega'_1$$

.

.

.

$$\omega_{30.000} = \omega_{29.999} + h\omega'_{29.999}$$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s'*

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$$\begin{array}{l|l}
 t_n = t_0 + nh & s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s'_n) + f'(t_n + h, s'_n + hf'(t_n, s'_n))] \\
 \text{το οποίο σημαίνει ότι:} & s'_n + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{|s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m}|}{m}(\frac{s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m}}{m})] \\
 t_1 = t_0 + 1h & \text{το οποίο σημαίνει ότι:} \\
 t_2 = t_0 + 2h & s'_1 = s'_0 + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s|s'_0|s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{|s'_0+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_0|s'}{m}|}{m}(\frac{s'_0+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_0|s'}{m}}{m})] \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 t_n = t_0 + nh & s'_n + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{|s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m}|}{m}(\frac{s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s|s'_n|s'}{m}}{m})]
 \end{array}$$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s*

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$$\begin{array}{ll}
 t_n = t_0 + nh & s_{n+1} = s_n + hf(t, s)n \\
 \text{το οποίο σημαίνει ότι:} & \\
 t_1 = t_0 + 1h & s_{n+1} = s_n + hs'_n \\
 t_2 = t_0 + 2h & s_1 = s_0 + hs'_0 \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 t_n = t_0 + nh &
 \end{array}$$

Στροφική κίνηση

$$\begin{aligned}
 \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{h}{2}[f(t, \omega) + f(t_n + h, \omega_n + f(t, \omega))] \\
 &= \omega_n + \frac{h}{2}[\omega'_n + \frac{(\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega_n + \omega'_n|(\omega_n + \omega'_n))}{I_z}]
 \end{aligned} \tag{9}$$

1.1 Ερώτημα γ: Μέθοδος *Euler*

1.1.1 Δεδομένα:

$$\begin{aligned}
 f_1 + f_2 &= K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s') \\
 K_{ps} &= 5 \\
 K_{ds} &= 15 + \frac{AM}{100} \\
 S_0 &= 0 \\
 S_{des} &= \frac{AM}{200}
 \end{aligned}$$

1.2 Μεταφορική Κίνηση

1.3 Μέθοδος Euler

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' \quad (10)$$

εφόσον ξέρω τον τύπο:

$$s'' = \frac{f_1 + f_2 - b_s|s'|s'}{m} \quad (11)$$

$$(11) \xrightarrow{(10)} s'' = \frac{k_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' - b_s|s'|s'}{m} = f(t, s, s')$$

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s' :

$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + hs''_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s'_2 = s'_1 + hs''_1$ (Διότι έχει άγνωστη s_1)
.	$s'_3 = s'_2 + hs''_2$ (Διότι έχει άγνωστη s_2)
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s :

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + hs'_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s_2 = s_1 + hs'_1$ (Διότι έχει άγνωστη s_1)
.	
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

1.4 Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευλερ

1.4.1 Δεδομένα

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + (AM/100)$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = AM/200$$

1.4.2 Μεταφορική Κίνηση

Για την $s(t)$:

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + hs'_n$
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s_2 = s_1 + hs'_1$
.	.
.	.
.	.
$t_{30.000} = t_0 + 30.000h$	$s_{30.000} = s_{29.999} + hs'_{29.999}$

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n, s_n) + f(t_n + h, s_n + h(f(t_n, s_n)))] \\
&= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n, s_n) \\
&\quad + [-(t_1 + t_2) - K_{ps}(s_{des} - (s_n + h(\frac{-(f_1 + f_2) - K_{ps}(s_{des} - s_n)}{m})))][K_{ds} \\
&\hspace{15em} (12)
\end{aligned}$$

Για τη $s'(t)$:

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s_n) + f'(t_n + h, s'_n + h(f'(t_n, s_n)))]$$

Οπότε,

$$s'_n + (h/2)(f'(t_n, s_n) + \frac{(f_1 + f_2) - b_s(s'_n + h|(f_1 + f_2) - b_s|s'_n|s'_n|}{m} | \frac{S'_n + h(f_1 + f_2) - b_s|s'_n|s'_n|}{m} | m))$$