Υπολογιστικά Μαθηματικά 2021–2022

Παύλος Ορφανίδης　　Γιώργος Χατζηλίγος
Σπύρος Κοντάκης

15 Ιανουαρίου 2022

Περιεχόμενα

Γενικά δεδομένα

$$AM = 4835 \tag{1}$$

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s|s'|s' \tag{2}$$

$$I_z\omega' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta|\omega|\omega \tag{3}$$

$$s(0) = s_0 \tag{4}$$

$$s'(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \tag{5}$$

$$m = 9kg$$

$$d = 1m$$

$$I_z = 0.38kgm^2$$

1 Πρόβλημα 1

Μεταφορική κίνηση

Euler s'

Έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$$s'' = f'(t, s') = (f1 + f2) - bs|s'|s' \tag{6}$$

$$s' = f(t, s) \tag{7}$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./7000]^T$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./8000]^T$$

$$s_0 = \frac{A.M.}{1000}$$

$$\theta_0 = 0$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + hf'(t, s')_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	$s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_1 = t_0 + 1h$	$s'_2 = s'_1 + hs''_1$
$t_2 = t_0 + 2h$	.
.	.
.	.
.	
$t_n = t_0 + nh$	

Στροφική κίνηση

$$\omega' = \frac{\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega|\omega}{I_z} = f(t, \omega) \tag{8}$$

Euler

$t_{n+1} = t_0 + nh$	$\omega_{n+1} = \omega_0 + h\omega' h$
$t_1 = t_0 + 1h$	$\omega_1 = \omega_0 + h\omega'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$\omega_2 = \omega_1 + h\omega'_1$
.	.
.	.
.	.
$t_{30.000} = t_0 + 29.999h$	$\omega_{30.000} = \omega_{29.999} + h\omega'_{29.999}$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler* s'

	Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:
$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s'_n) + f'(t_n + h, s'_n + hf'(t_n, s'_n))]$
το οποίο σημαίνει ότι:	$s'_n + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{\lvert s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m}\rvert}{m}\frac{(s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m})}{m}]$
$t_1 = t_0 + 1h$	το οποίο σημαίνει ότι:
$t_2 = t_0 + 2h$	$s'_1 = s'_0 + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_0\rvert s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{\lvert s'_0+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_0\rvert s'}{m}\rvert}{m}\frac{(s'_0+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_0\rvert s'}{m})}{m}]$
.	.
.	.
.	.
$t_n = t_0 + nh$	$s'_n + \frac{h}{2}[\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m} + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{\lvert s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m}\rvert}{m}\frac{(s'_n+h\frac{f_1+f_2-b_s\lvert s'_n\rvert s'}{m})}{m}]$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler* s

$$s''_n = \frac{k_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' - b_s|s'|s'}{m} = f(t, s, s')$$

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f(t, s, s') + f(t_n + h, s_n + k'_n, s'_n + f(t, s, s'))]$$

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}\frac{k_{ps}(s_{des} - (s_n + hs'_n)) - k_{ds}(s'_n + hs'_n) - b_s|s'_n + hs'_n|(s'_n + hs'_n s'_n + hs'_n)}{m}$$

$$\left\{s'_n + \frac{h}{2}[s''_n + \frac{k_{ps}(s_{des}-(s_n+hs'_n))-k_{ds}(s'n+hs'_n)-b_s|s'_n+hs'_n|(s'_n+hs'_n)}{m}]\right\}$$

$$s_{n+1} = s_n + \frac{h}{2}[s'_n + s'_{n+1}]$$

$$s_1 = s_0 + \frac{h}{2}[s'_0 + s'_1]$$

$$s_2 = s_1 + \frac{h}{2}[s'_1 + s'_2]$$

Στροφική κίνηση

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{h}{2}[f(t, \omega) + f(t_n + h, \omega_n + f(t, \omega))] \\ &= \omega_n + \frac{h}{2}[\omega'_n + \frac{(\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega_n + \omega'_n|(\omega_n + \omega'_n))}{I_z}] \end{aligned} \tag{9}$$

1.1 Ερώτημα γ: Μέθοδος *Euler*

1.1.1 Δεδομένα:

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + \frac{AM}{100}$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = \frac{AM}{200}$$

1.2 Μεταφορική Κίνηση

1.3 Μέθοδος *Euler*

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' \tag{10}$$

εφόσων ξέρω τον τύπο:

$$s'' = \frac{f_1 + f_2 - b_s|s'|s'}{m} \tag{11}$$

$$(11) \xRightarrow{(10)} s'' = \frac{k_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' - b_s|s'|s'}{m} = f(t, s, s')$$

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s':

$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + hs''_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s'_2 = s'_1 + hs''_1$(Διότι έχει άγνωστη s_1)
.	$s'_3 = s'_2 + hs''_2$(Διότι έχει άγνωστη s_2)
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s:

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + hs'_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s_2 = s_1 + hs'_1$
.	
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

1.4 Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευλερ

1.4.1 Δεδομένα

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + (AM/100)$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = AM/200$$

1.4.2 Μεταφορική Κίνηση

Για την $s(t)$:

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + hs'_n$
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s_2 = s_1 + hs'_1$
	.
	.
	.
$t_{30.000} = t_0 + 30.000h$	$s_{30.000} = s_{29.999} + hs'_{29.999}$

$$
\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n,s_n) + f(t_n+h, s_n + h(f(t_n,s_n))] \\
&= s_n + \frac{h}{2}[f(t_n,s_n) \\
&\quad + [-(t_1+t_2) - K_{ps}(s_{des} - (s_n + h(\frac{-(f_1+f_2) - K_{ps}(s_{des}-s_n)}{m}))]]K_{ds}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Για τη $s'(t)$:

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n,s_n) + f(t_n+h, s'_n + h(f'(t_n,s_n)))]$$

Οπότε,

$$s'_n + (h/2)(f'(t_n,s_n) + \frac{(f_1+f_2) - b_s(s'_n + h|(f_1+f_2) - b_s|s'_n|s'_n}{m}|\frac{S'_n + h(f_1+f_2) - b_s|s'_n|s'_n}{m}|m)$$

2 Πρόβλημα 2

2.1 Δεδομένα

$$ms'' = (f_1+f_2) - b_s s' \tag{13}$$

$$f_1 + f_2 = k_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds}(s') \tag{14}$$

2.2 α

$$H(s) = \frac{L(output)}{L(input)}|_{A\Sigma=0}$$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Μέθοδος *Laplase*

$$L(f(t)) = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} dt$$

$f(t) = 0$ για $t < 0$

$$(13) \xRightarrow{(14)} K_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds}s' = b_s = ms''$$

$$\Leftrightarrow ms^2 X(s) = k_{ps}S_{des} - X(s)k_{ps} - k_{ds}(SX(S)) - b_s(sX(s))$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{K_{ps}S_{des}}{ms^2 + s(K_{ds}+b_s) + K_{ps}}$$

Μόνο πόλοι

$$\frac{X(s)}{S_{des}} = \frac{1}{\frac{ms^2}{k_{ps}} + \frac{s(k_{ds}+b_s)}{k_{ps}} + 1}$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{ms^2}{k_{ps}} + \frac{s(k_{ds}+b_s)}{k_{ps}} + 1}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

2.3 γ

$$ms'' = k_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds} - s' - b_s s'$$
$$s'' + \frac{s'(k_{ds} - b_s)}{m} + \frac{k_{ps}s}{m} - \frac{k_{ps}s_{des}}{m} = 0$$
$$r^2 + \frac{r(k_{ds} + b_s)}{m} + \frac{k_{ps}s}{m} = 0$$
$$\Delta = (\frac{k_{ds} + b_s}{m})^2 - 4\frac{k_{ps}}{m}$$
$$r_{1,2} = \frac{-\frac{k_{ds}+b_s}{m} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Άρα έχουμε 2 λύσεις, τις $r1$ και $r2$:

$$r_1 = \frac{-\frac{k_{ds}+b_s}{m} + \sqrt{\Delta}}{2}$$
$$r_2 = \frac{-\frac{k_{ds}+b_s}{m} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

2.3.1 Μερική Λύση

$$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = -\frac{k_{ps}s_{des}}{m}$$
$$s'' + s'\frac{k_{ds} + b_s}{m} + \frac{k_{ps}s}{m} - \frac{k_{ps}s_{des}}{m} = 0 \xrightarrow[s'(0)=0]{s''(0)=0}$$
$$s''(0) + s'(0)\frac{k_{des} + b_s}{m} + \frac{K_{ps}s(0)}{m} - \frac{k_{ps}s_{des}}{m} = 0 \Rightarrow$$
$$s(0) = s_{des}$$
$$s(t) = s_{des}$$

$s(t) = s_{des} = A$ Άρα πολυώνυμο $0^{ου}$ βαθμου

2.3.2 Γενική Λύση

Άρα,

$$s = s_{des} + c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$
$$s' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$$
$$s(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + s_{des} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = -s_{des} \quad (15)$$
$$s'(0) = 0 \Rightarrow c_1 r_1 e^0 + c_2 r_2 e^0 = 0 \Rightarrow_1 r_1 + c_2 r_2 = 0 \quad (16)$$
$$(16) \xrightarrow{(15)} (-c_2 - s_{des})r_1 + c_2 r_2 = 0 \Rightarrow_2 = \frac{s_{des}r_1}{-r_1 + r_2}$$
$$(15) \xrightarrow{(16)} c_1 = -s_{des}r_1(r_2 - r_1) - s_{des} = -s_{des}(\frac{r_1}{r_2 - r_1} + 1)$$

2.3.3 Αναλυτική Λύση

$$s = s_{des} + (-s_{des}(\frac{r_1}{r_2 - r_1} + 1))e^(r_1 t) + \frac{s_{des}r_1 e^{r_2 t}}{-r_1 + r_2}$$