

Υπολογιστικά Μαθηματικά 2021–2022

Παύλος Ορφανίδης Γιώργος Χατζηλίγος
Σπύρος Κοντάκης

10 Ιανουαρίου 2022

Περιεχόμενα

1	Πρόβλημα 1	2
1.1	Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ με την Μέθοδο του <i>Euler</i> και την βελτιωμένη μέθοδο του <i>Euler</i> με τις παρακάτω τιμές για τις εισόδους και τις αρχικές συνθήκες	2
1.2	Ερώτημα γ: Μέθοδος <i>Euler</i>	3
1.2.1	Δεδομένα:	3
1.3	Μεταφορική Κίνηση	3
1.4	Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευλερ	4
1.4.1	Δεδομένα	4
1.4.2	Μεταφορική Κίνηση	4

Γενικά δεδομένα

$$AM = 4835 \quad (1)$$

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s |s'|s' \quad (2)$$

$$I_z \omega' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta |\omega|\omega \quad (3)$$

$$s(0) = s_0 \quad (4)$$

$$s'(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \quad (5)$$

$$m = 9kg$$

$$d = 1m$$

$$I_z = 0.38kgm^2$$

1 Πρόβλημα 1

1.1 Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ με την Μέθοδο του *Euler* και την βελτιωμένη μέθοδο του *Euler* με τις παρακάτω τιμές για τις εισόδους και τις αρχικές συνθήκες

Euler s'

Έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$$s'' = f'(t, s') = (f_1 + f_2) - b_s |s'| s' \quad (6)$$

$$s' = f(t, s) \quad (7)$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./7000]^T$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./8000]^T$$

$$s_0 = A.M./1000$$

$$\theta_0 = 0$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$$t_n = t_0 + nh$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$t_1 = t_0 + 1h$$

$$t_2 = t_0 + 2h$$

.

.

.

$$t_n = t_0 + nh$$

$$s'_{n+1} = s'_n + hf'(t, s')_n$$

$$s'_1 = s'_0 + hs'_0$$

$$s'_2 = s'_1 + hs'_1$$

.

.

.

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s'*

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$$t_n = t_0 + nh$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$t_1 = t_0 + 1h$$

$$t_2 = t_0 + 2h$$

.

.

.

$$t_n = t_0 + nh$$

$$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2} [f'(t_n, s'_n) + f'(t_n + h, s'_n + hf'(t_n, s'_n))]$$

$$s'_n + \frac{h}{2} \left[\frac{f_1 + f_2 - b_s |s'_n| s'_n}{m} + \frac{f_1 + f_2}{m} - \frac{|s'_n + h \frac{f_1 + f_2 - b_s |s'_n| s'_n}{m}|}{m} (s'_n + h \frac{f_1 + f_2 - b_s |s'_n| s'_n}{m}) \right]$$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s*

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$$t_n = t_0 + nh \quad s_{n+1} = s_n + hf(t, s)n$$

το οποίο σημαίνει ότι:

$$t_1 = t_0 + 1h \quad s_{n+1} = s_n + hs'_n$$

$$t_2 = t_0 + 2h \quad s_1 = s_0 + hs'_0$$

.

.

.

$$t_n = t_0 + nh$$

1.2 Ερώτημα γ: Μέθοδος *Euler*

1.2.1 Δεδομένα:

$$f_1 + f_2 = Kps(s_{des} - s) - Kds(s') \quad (8)$$

$$K_{ps} = 5 \quad (9)$$

$$K_{ds} = 15 + (AM/100) \quad (10)$$

$$S_0 = 0 \quad (11)$$

$$S_{des} = AM/200 \quad (12)$$

1.3 Μεταφορική Κίνηση

$$s' = -[(f_1 + f_2) - Kps(s_{des} - s)]/K_{ds} = f(t, s)$$

Άρα, για την συνάρτηση $s(t)$ έχουμε:

$$t_n = t_0 + nh \quad s_{n+1} = s_n + hs'_n$$

$$t_1 = t_0 + 1h \quad s_1 = s_0 + hs'_0$$

$$t_2 = t_0 + 2h \quad s_2 = s_1 + hs'_1$$

.

.

.

$$t_{30.000} = t_0 + 30.000h \quad s_{30.000} = s_{29.999} + hs'_{29.999}$$

Για την συνάρτηση $s'(t)$:

$$S'' = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s') - b_s|s'|s'$$

Άρα, προκύπτει:

$$t_n = t_0 + nh \quad s'_{n+1} = s'_n + hs''_n$$

$$t_1 = t_0 + 1h \quad s'_1 = s'_0 + hs''_0$$

$$t_2 = t_0 + 2h \quad s'_2 = s'_1 + hs''_1$$

.

.

.

$$t_{30.000} = t_0 + 30.000h \quad s'_{30.000} = s'_{29.999} + hs''_{29.999}$$

1.4 Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος Ευлер

1.4.1 Δεδομένα

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + (AM/100)$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = AM/200$$

1.4.2 Μεταφορική Κίνηση

Για την $\sigma(\tau)$:

$$\tau_n = \tau_0 + n\eta \quad \sigma_{n+1} = \sigma_n + \eta \zeta'_n$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 + 1\eta \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \eta \zeta'_0 \quad \tau_2 = \tau_0 + 2\eta \quad \sigma_2 = \sigma_1 + \eta \zeta'_1 \dots \tau_{30.000} \\ &= \tau_0 + 30.000\eta \quad \sigma_{30.000} = \sigma_{29.999} + \eta \zeta'_{29.999} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_n + (\eta/2) * [\varphi(\tau_n, \sigma_n) + \varphi(\tau_n + \eta, \sigma_n + \eta(\varphi(\tau_n, \sigma_n) \\ &+ (\eta/2) * [\varphi(\tau_n, \sigma_n) + [- (\tau_1 + \tau_2) - K_{ps}(\sigma_{des} - (\sigma_n + \eta([-(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ &K_{ps} * (\sigma_{des} - \sigma_n)] / \mu)] K_{ds} \end{aligned}$$

$$\text{Για τη } \zeta'(\tau): \zeta'_{n+1} = \zeta'_n + (\eta/2) * [\varphi'(\tau_n, \sigma_n) + \varphi(\tau_n + \eta, \zeta'_n + \eta(\varphi'(\tau_n, \sigma_n) \\ + (\eta/2) * [\varphi'(\tau_n, \sigma_n) + [(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta(\zeta'_n + \eta(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta \zeta'_n)] / \mu, \\ + (\eta/2) * [\varphi'(\tau_n, \sigma_n) + [(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta(\zeta'_n + \eta(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta \zeta'_n)] / \mu, \mu]$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε, } \Sigma'_n &+ (\eta/2) * [\varphi'(\tau_n, \sigma_n) + [(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta(\zeta'_n + \eta(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &- \beta \zeta \zeta'_n)] / \mu, [\Sigma'_n + \eta(\varphi_1 + \varphi_2) - \beta \zeta \zeta'_n] / \mu, \mu \end{aligned}$$