

Υπολογιστικά Μαθηματικά 2021–2022

Πάυλος Ορφανίδης Γιώργος Χατζηλίγος
Σπύρος Κοντάκης

15 Ιανουαρίου 2022

Περιεχόμενα

1	Πρόβλημα 1	2
1.1	Ερώτημα γ: Μέθοδος <i>Euler</i>	3
1.1.1	Δεδομένα:	3
1.2	Μεταφορική Κίνηση	4
1.3	Μέθοδος <i>Euler</i>	4
1.4	Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος <i>Euler</i>	4
1.4.1	Δεδομένα	4
1.4.2	Μεταφορική Κίνηση	5
1.5	Γραφικές παραστάσεις	7
2	Πρόβλημα 2	18
2.1	Δεδομένα	18
2.2	α	18
2.3	γ	19
2.3.1	Μερική Λύση	20
2.3.2	Γενική Λύση	20
2.3.3	Αναλυτική Λύση	20
2.4	Εικόνες	22
2.5	2.γ)	22

Γενικά δεδομένα

$$AM = 4835 \quad (1)$$

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s |s'|s' \quad (2)$$

$$I_z \omega' = \frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b_\theta |\omega|\omega \quad (3)$$

$$s(0) = s_0 \quad (4)$$

$$s'(0) = 0, \quad \omega(0) = 0 \quad (5)$$

$$m = 9kg$$

$$d = 1m$$

$$I_z = 0.38kgm^2$$

1 Πρόβλημα 1

Μεταφορική κίνηση

Euler s'

Έχουμε από τα δεδομένα ότι:

$$s'' = f'(t, s') = (f1 + f2) - bs|s'|s' \quad (6)$$

$$s' = f(t, s) \quad (7)$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./7000]^T$$

$$[f_1, f_2]^T = [A.M./7000, A.M./8000]^T$$

$$s_0 = \frac{A.M.}{1000}$$

$$\theta_0 = 0$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$$\begin{array}{ll} t_n = t_0 + nh & s'_{n+1} = s'_n + hf'(t, s')_n \\ \text{το οποίο σημαίνει ότι:} & s'_1 = s'_0 + hs''_0 \\ t_1 = t_0 + 1h & s'_2 = s'_1 + hs''_1 \\ t_2 = t_0 + 2h & . \\ . & . \\ . & . \\ t_n = t_0 + nh & . \end{array}$$

Euler s

Εφαρμόζουμε την μέθοδο *Euler*:

$$\begin{array}{ll} t_n = t_0 + nh & s_{n+1} = s_n + hs'_n \\ \text{το οποίο σημαίνει ότι:} & s_1 = s_0 + hs'_0 \\ t_1 = t_0 + 1h & s_2 = s_1 + hs'_1 \\ t_2 = t_0 + 2h & . \\ . & . \\ . & . \\ t_n = t_0 + nh & . \end{array}$$

Στροφική κίνηση

$$\omega' = \frac{\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega|\omega}{I_z} = f(t, \omega) \quad (8)$$

Euler

$$\begin{array}{ll} t_{n+1} = t_0 + nh & \omega_{n+1} = \omega_0 + h\omega'_n \\ t_1 = t_0 + 1h & \omega_1 = \omega_0 + h\omega'_0 \\ t_2 = t_0 + 2h & \omega_2 = \omega_1 + h\omega'_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ t_{30.000} = t_0 + 29.999h & \omega_{30.000} = \omega_{29.999} + h\omega'_{29.999} \end{array}$$

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s'*

	Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο <i>Euler</i> :
$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[f'(t_n, s_n + s'_n, s'_n) + f'(t_n + h, s'_n + hf'(t_n, s'_n))]$
το οποίο σημαίνει ότι:	$s'_{n+1} = s'_n + \frac{h}{2}[s''(n) + \frac{f_1+f_2}{m} - \frac{(b_s s'_n+hs''_n (s'_n+hs''_n))}{m}]$
$t_1 = t_0 + 1h$	το οποίο σημαίνει ότι:
$t_2 = t_0 + 2h$	$s'_1 = s'_0 + \frac{h}{2}[s''_0 + \frac{f_1+f_2}{m} + \frac{ b_s s'_0 + h s''_0 (b_s s'_0 + h s''_0)}{m}]$
.	.
.	.
.	.
$t_n = t_0 + nh$	

Βελτιωμένη μέθοδος *Euler s*

Η πεπλεγμένη μορφή που μας βοηθά και θα εφαρμόσουμε είναι:

Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + \frac{h}{2}[s'_n + s'_{n+1}]$
το οποίο σημαίνει ότι:	$s_1 = s_0 + \frac{h}{2}[s'_0 + s'_1]$
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_2 = s_1 + \frac{h}{2}[s'_1 + s'_2]$
$t_2 = t_0 + 2h$.
.	.
.	.
.	.
$t_n = t_0 + nh$	

Στροφική κίνηση

$$\begin{aligned}
 \omega_{n+1} &= \omega_n + \frac{h}{2}[f(t, \omega) + f(t_n + h, \omega_n + f(t, \omega))] \\
 &= \omega_n + \frac{h}{2}[\omega'_n + \frac{(\frac{d}{2}(f_2 - f_1) - b\theta|\omega_n + \omega'_n|(\omega_n + \omega'_n))}{I_z}]
 \end{aligned} \tag{9}$$

1.1 Ερώτημα γ: Μέθοδος *Euler*

1.1.1 Δεδομένα:

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + \frac{AM}{100}$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = \frac{AM}{200}$$

1.2 Μεταφορική Κίνηση

1.3 Μέθοδος *Euler*

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' \quad (10)$$

εφόσον ξέρω τον τύπο:

$$s'' = \frac{f_1 + f_2 - b_s|s'|s'}{m} \quad (11)$$

$$(11) \xrightarrow{(10)} s'' = \frac{k_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}s' - b_s|s'|s'}{m} = f(t, s, s')$$

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s' :

$t_n = t_0 + nh$	$s'_{n+1} = s'_n + hs''_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s'_1 = s'_0 + hs''_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s'_2 = s'_1 + hs''_1$ (Διότι έχει άγνωστη s_1)
.	$s'_3 = s'_2 + hs''_2$ (Διότι έχει άγνωστη s_2)
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

Εφαρμόζουμε *Euler* για την s :

$t_n = t_0 + nh$	$s_{n+1} = s_n + hs'_n$
το οποίο σημαίνει ότι:	
$t_1 = t_0 + 1h$	$s_1 = s_0 + hs'_0$
$t_2 = t_0 + 2h$	$s_2 = s_1 + hs'_1$
.	
.	
.	
$t_n = t_0 + nh$	

1.4 Πρόβλημα 1γ: Βελτιωμένη Μέθοδος *Euler*

1.4.1 Δεδομένα

$$f_1 + f_2 = K_{ps}(s_{des} - s) - K_{ds}(s')$$

$$K_{ps} = 5$$

$$K_{ds} = 15 + (AM/100)$$

$$S_0 = 0$$

$$S_{des} = AM/200$$

$$s'' = \frac{k_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds}s' - b_s|s'|s'}{m} = f'(t, s, s')$$

$$s' = f(t, s)$$

1.4.2 Μεταφορική Κίνηση

Για την $s'(t)$:

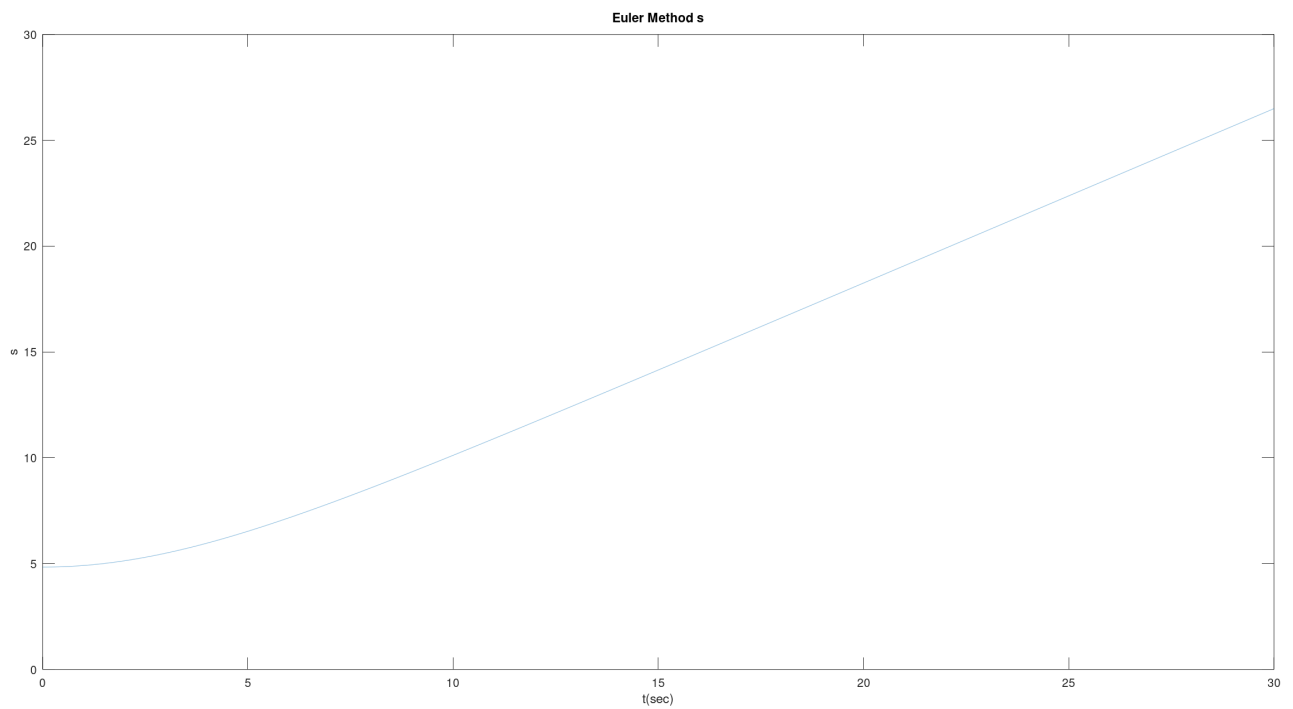
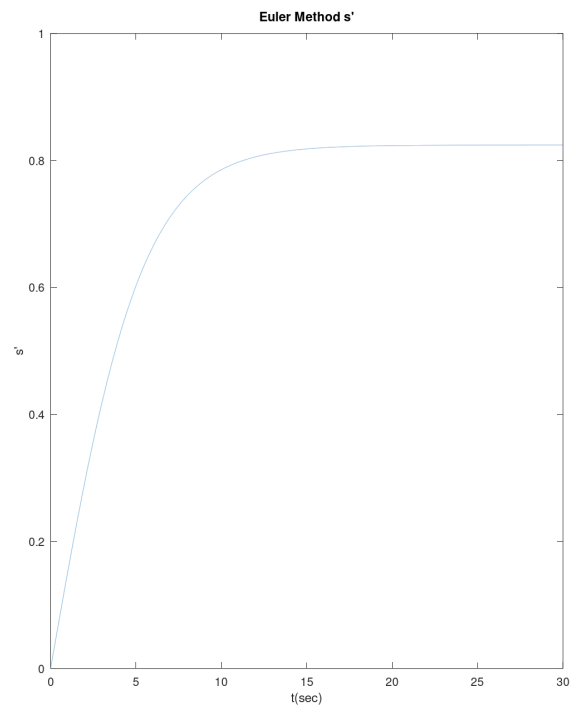
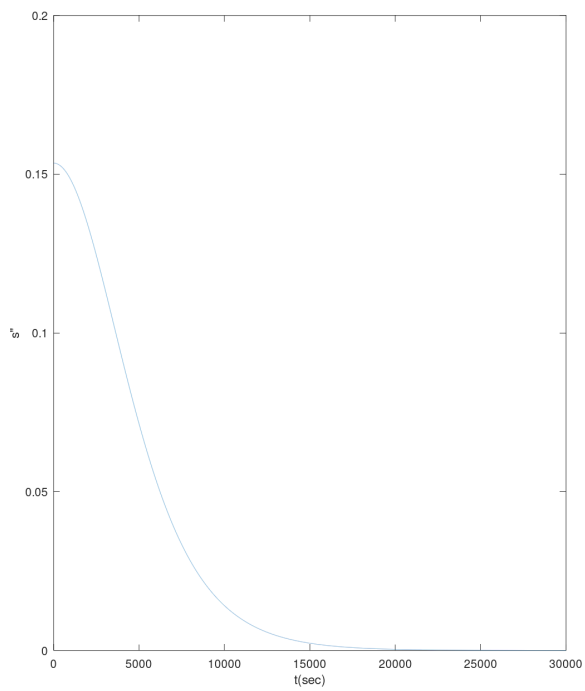
$$\begin{aligned}
 t_n &= t_0 + nh & s'_{n+1} &= s'_n + \frac{h}{2} [f'(t, s, s') + f'(t_n + h, s_n + f(t_n, s), s'_n + f'(t, s, s'))] \\
 t_1 &= t_0 + 1h & s'_{n+1} &= s'_n + \frac{h}{2} [s''_n + \frac{(k_{ps}(s_{des} - (s_n + hs'_n)) - k_{ds}(s'_n + hs''_n) - b_s |s'_n + h''_n| (s'_n + h''_n))}{m}] \\
 t_2 &= t_0 + 2h & s'_1 &= s'_0 + \frac{h}{2} [s''_0 + \frac{(k_{ps}(s_{des} - (s_0 + hs'_0)) - k_{ds}(s'_0 + hs''_0) - b_s |s'_0 + h''_0| (s'_0 + h''_0))}{m}] \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 & & & \cdot \\
 t_{30.000} &= t_0 + 30.000h
 \end{aligned}$$

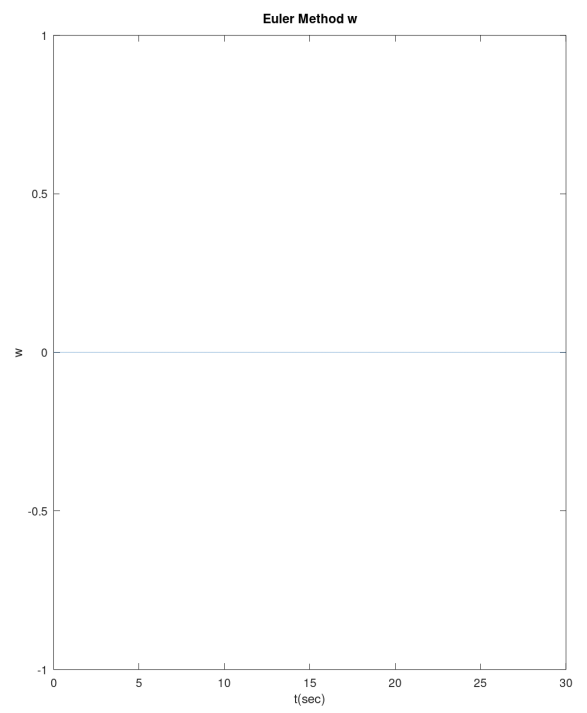
Εφαρμόζουμε την βελτιωμένη μέθοδο *Euler*:

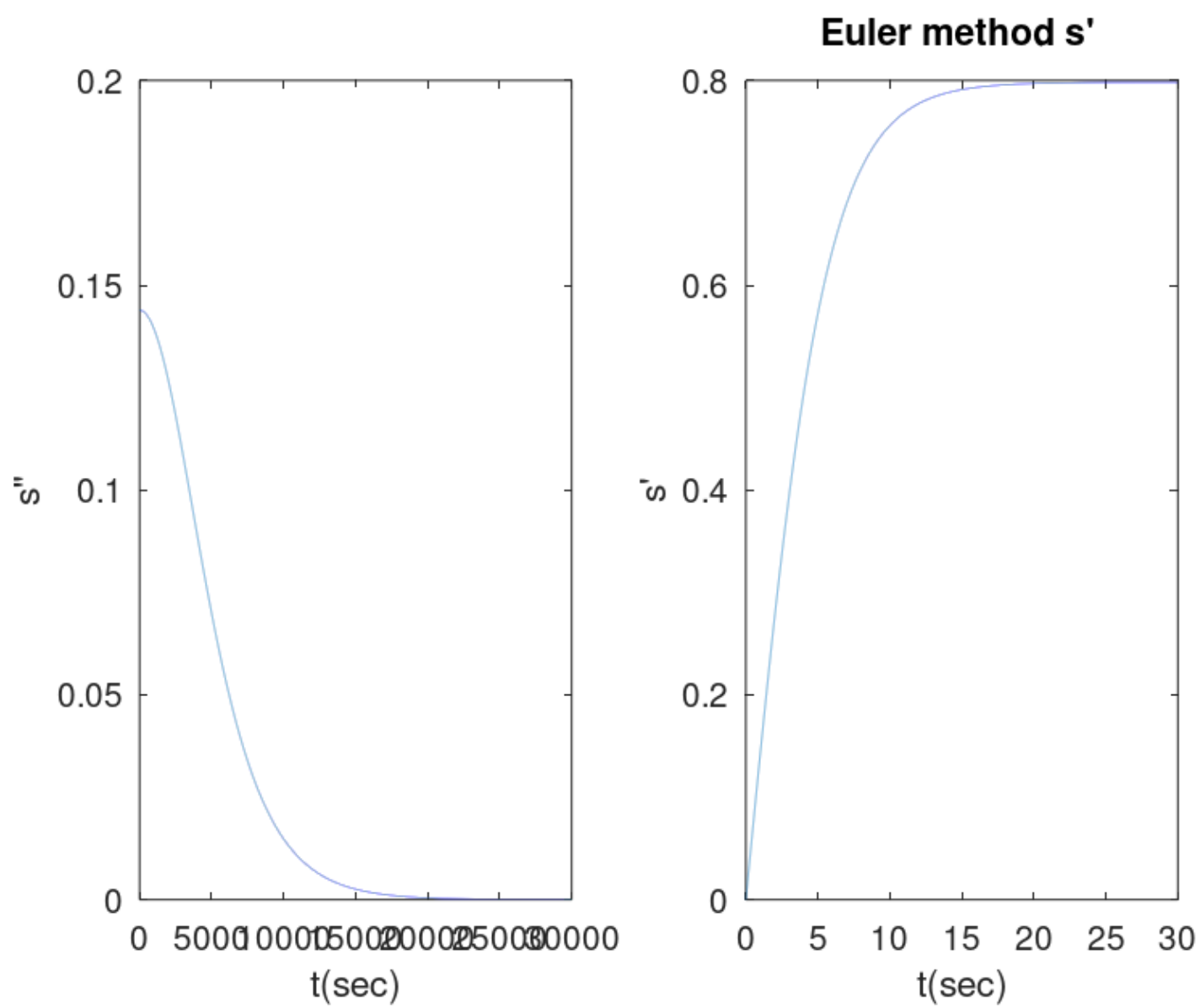
$$\begin{array}{l|l}
 t_n = t_0 + nh & s_{n+1} = s_n + \frac{h}{2} [s'_n + s'_{n+1}] \\
 \text{το οποίο σημαίνει ότι:} & s_1 = s_0 + \frac{h}{2} [s'_0 + s'_1] \\
 t_1 = t_0 + 1h & s_2 = s_1 + \frac{h}{2} [s'_1 + s'_2] \\
 t_2 = t_0 + 2h & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 t_n = t_0 + nh &
 \end{array}$$

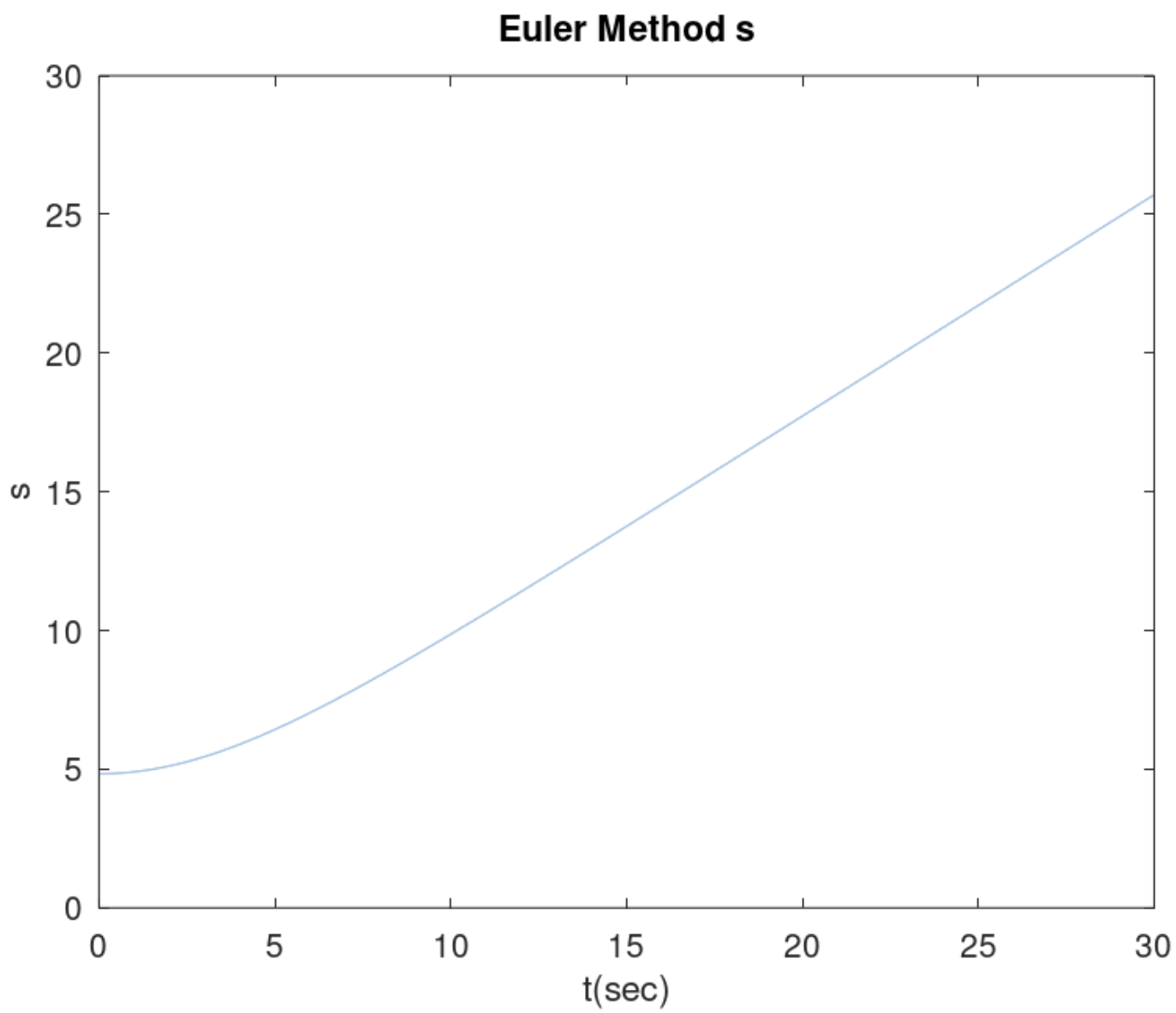
1.5 Γραφικές παραστάσεις

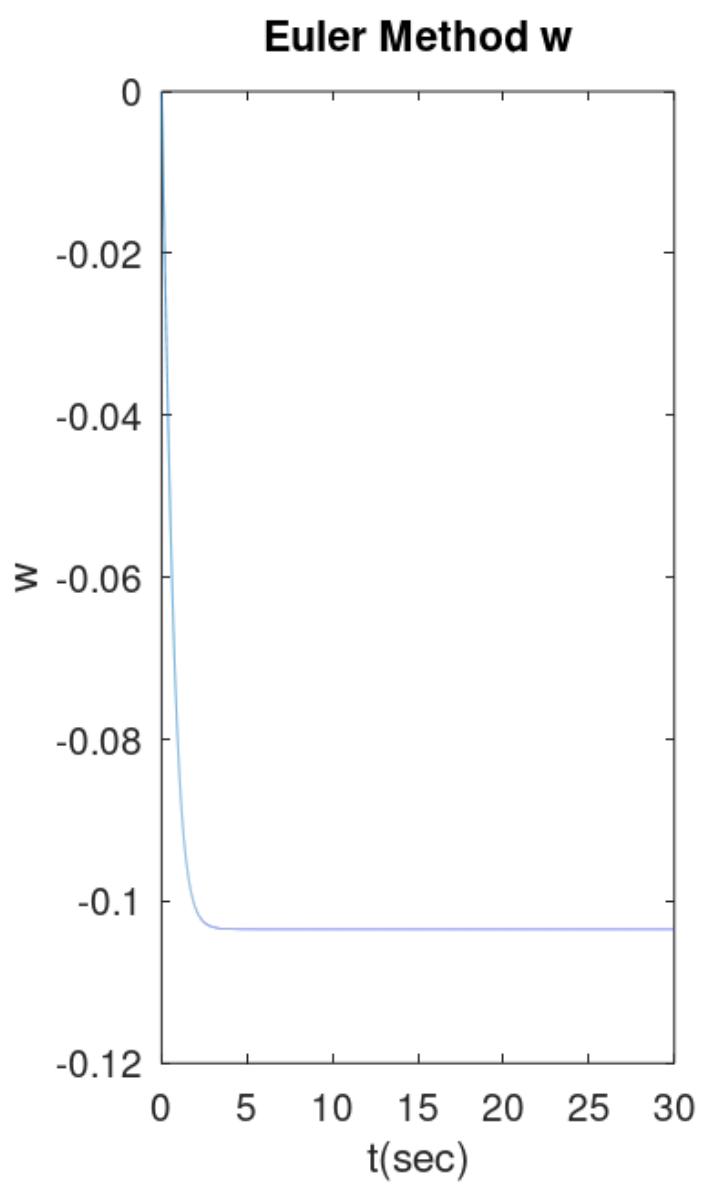
1α) *Euler*





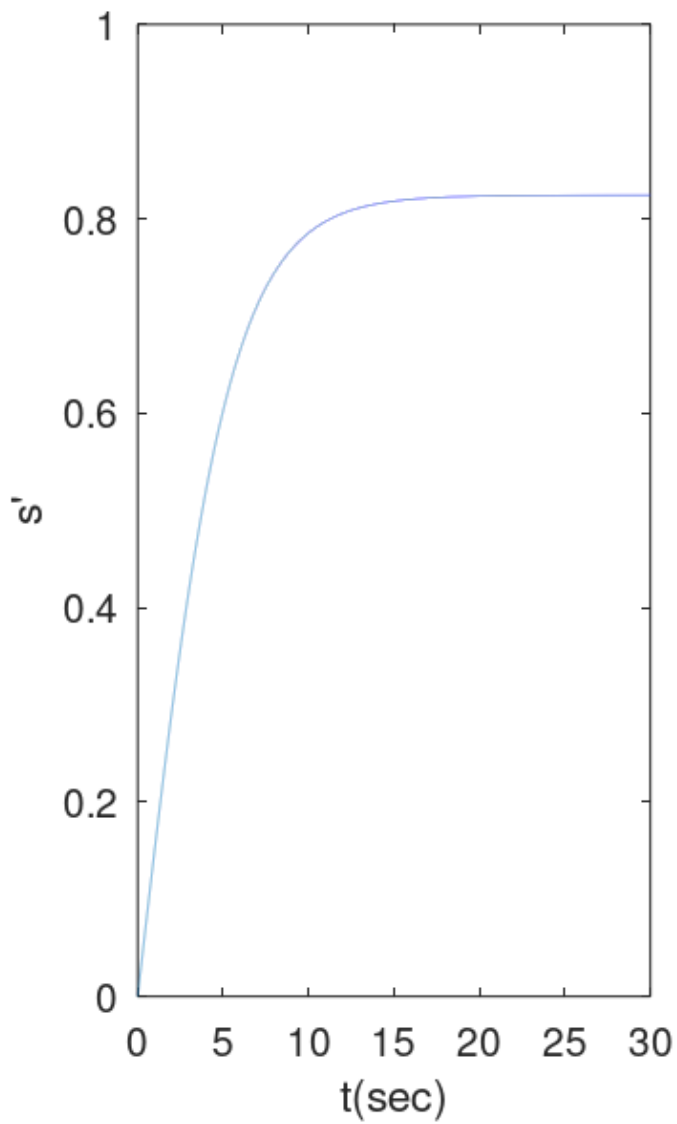




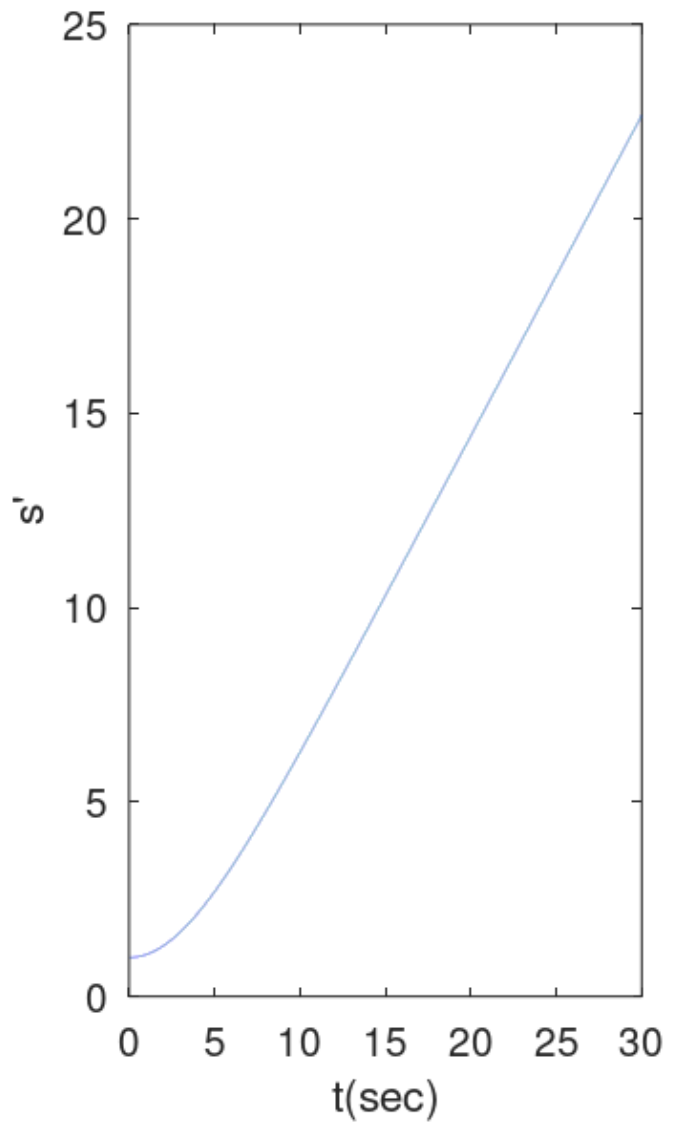


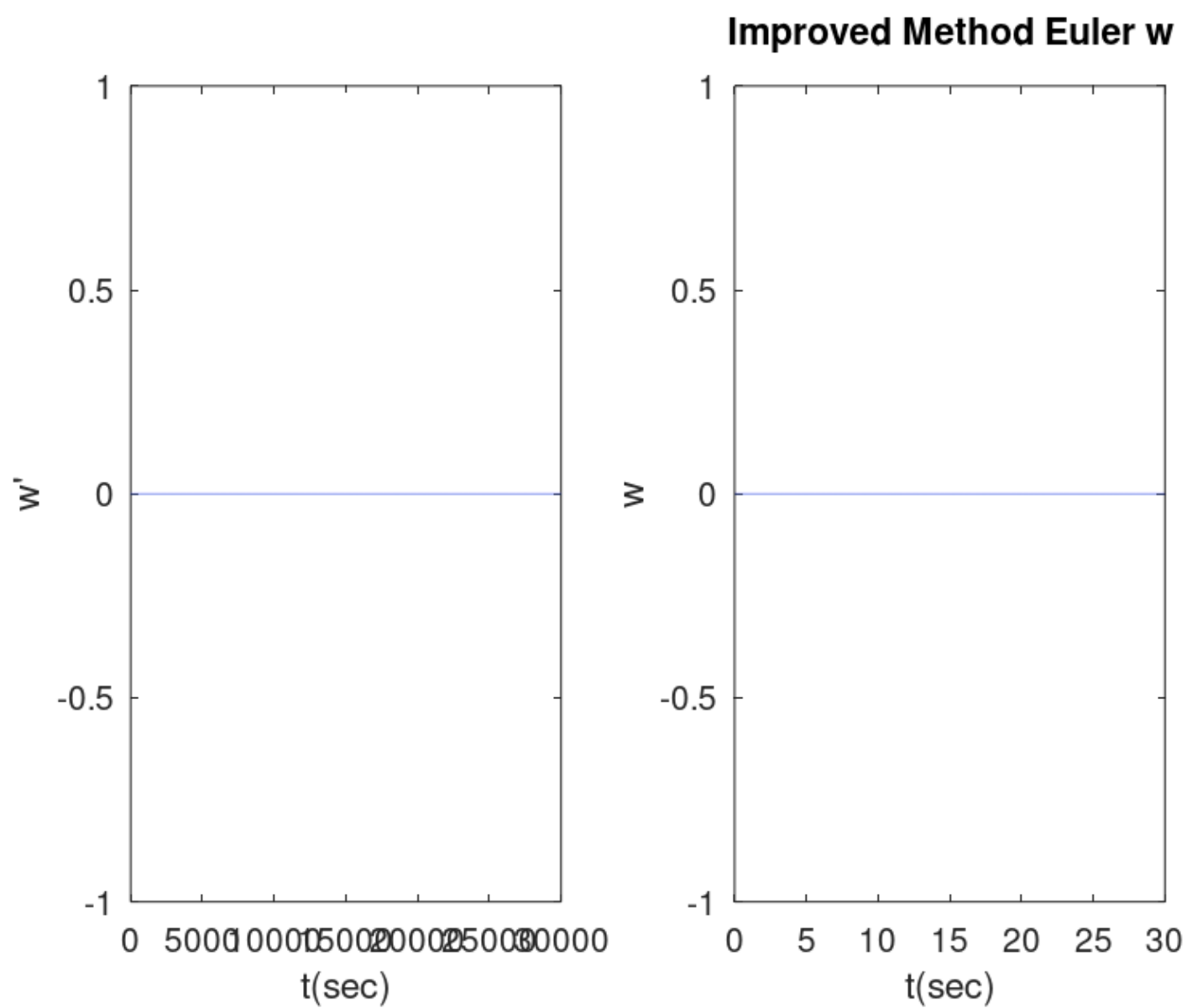
1α) Βελτιωμένη *Euler*

Improved method s'

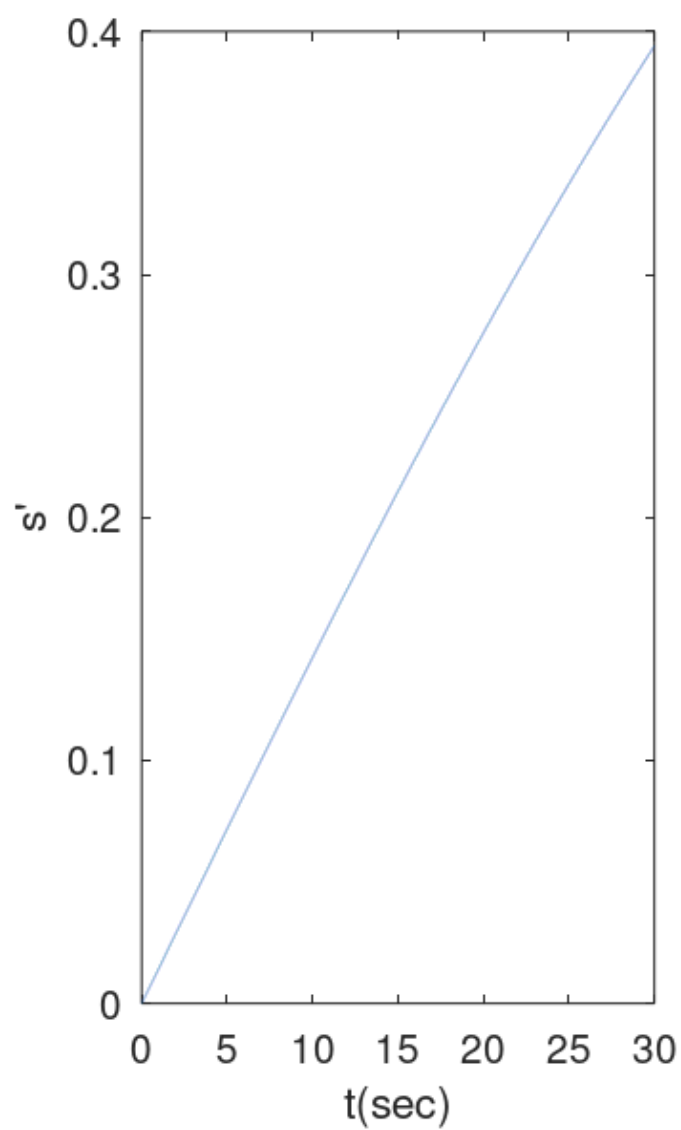


Improved Method Euler s

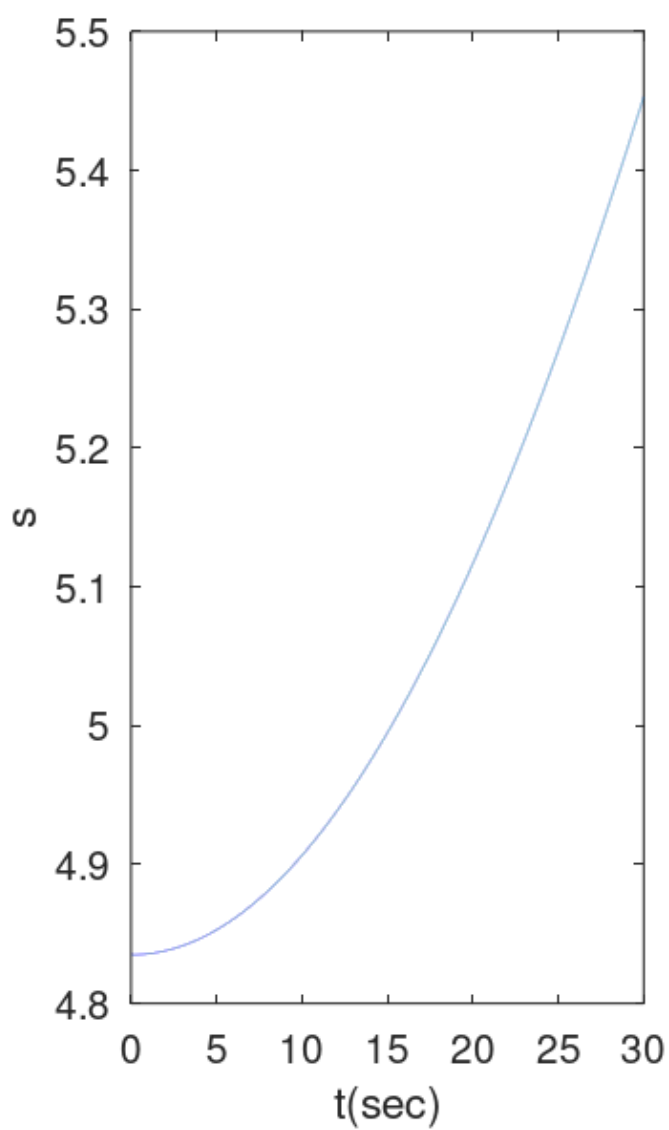


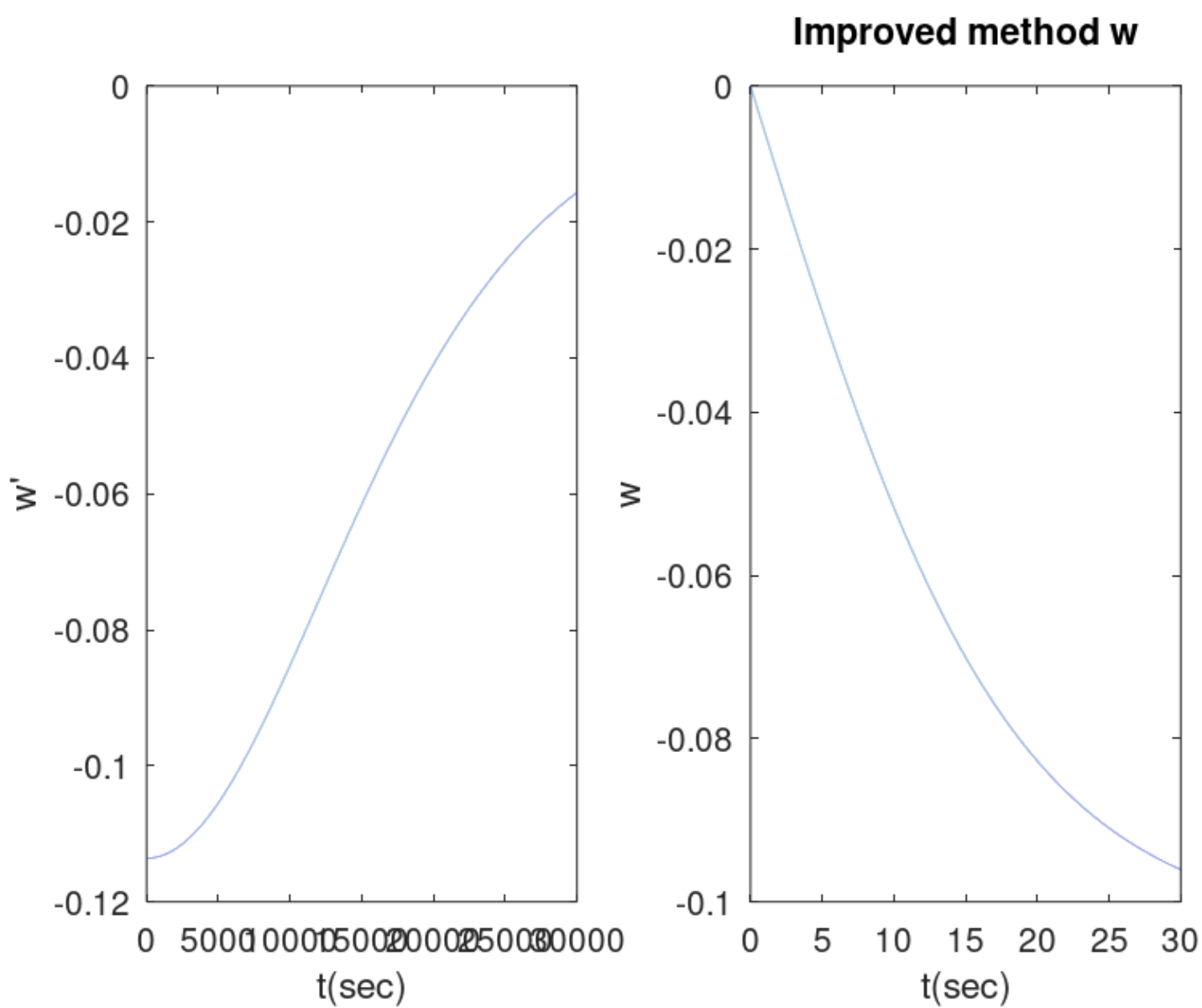


Improved method euler s'



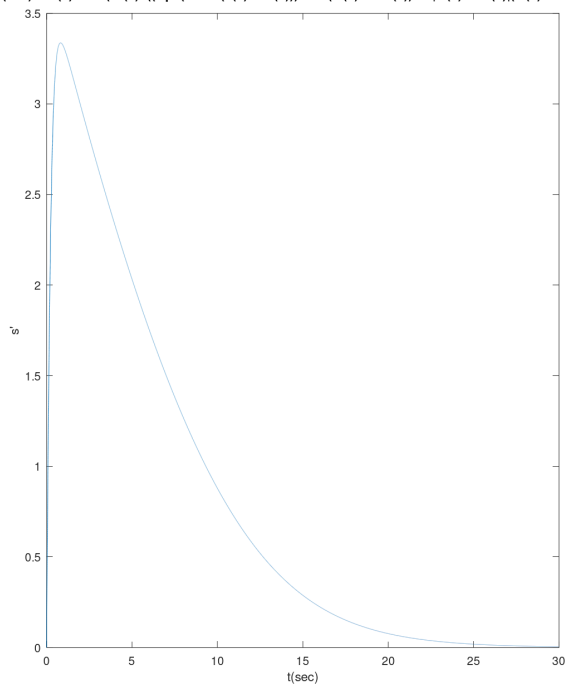
Improved Method euler s



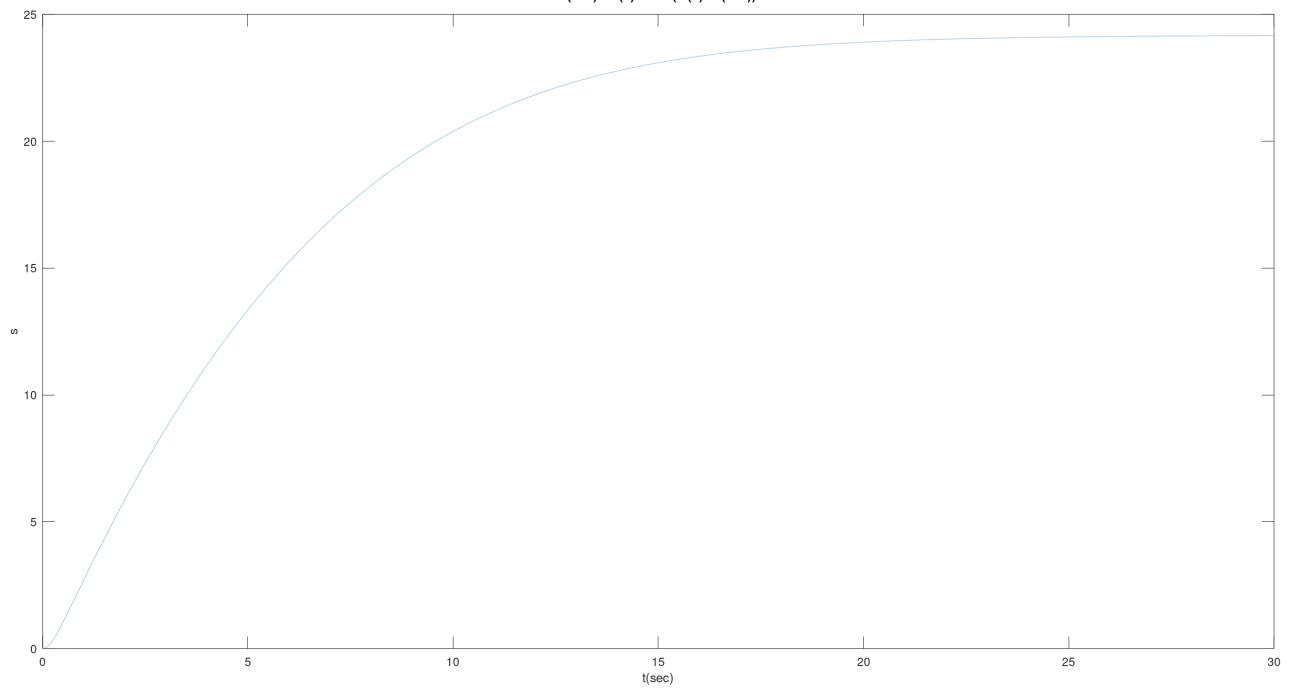


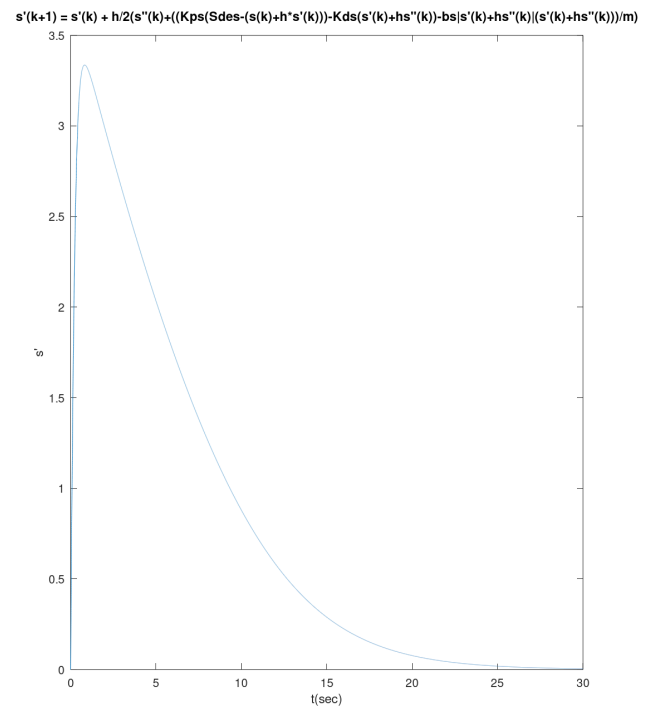
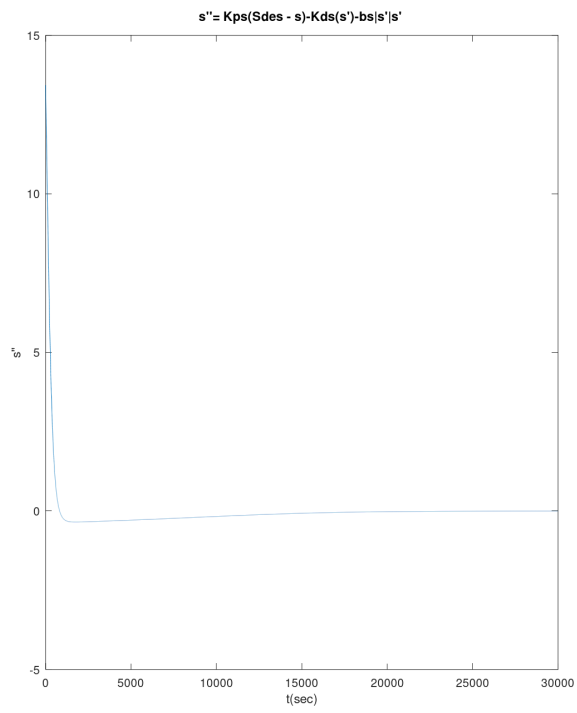
1γ) Euler και βελτιωμένη

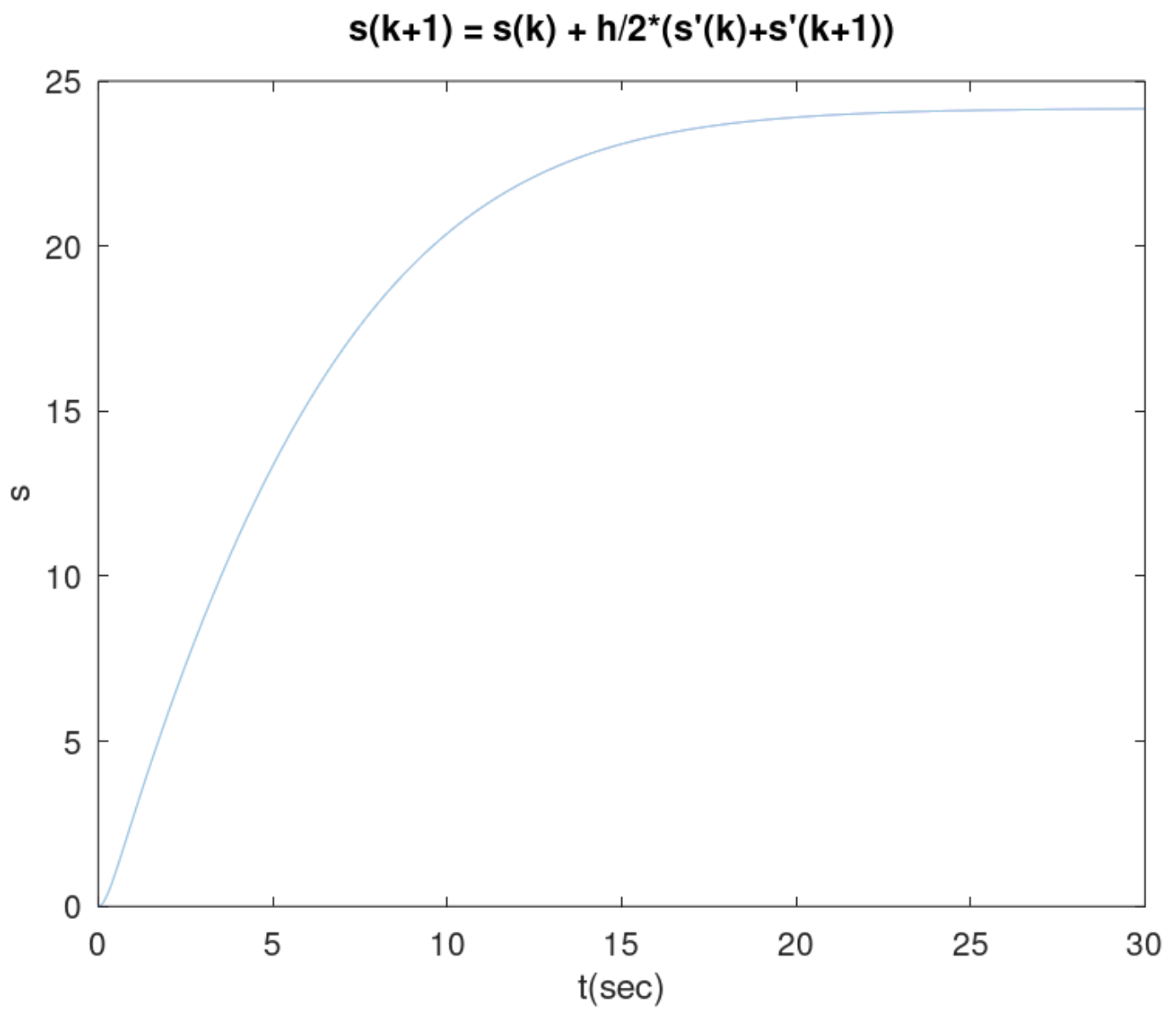
$$s'(k+1) = s'(k) + \frac{h}{2} \left(s''(k) + \left(\frac{Kps(Sdes - (s(k) + hs'(k))) - Kds(s'(k) + h's''(k)) - bs|s'(k) + hs''(k)|}{(s'(k) + hs''(k))} \right) / m \right)$$



$$s(k+1) = s(k) + \frac{h}{2} (s'(k) + s'(k+1))$$







2 Πρόβλημα 2

2.1 Δεδομένα

$$ms'' = (f_1 + f_2) - b_s s' \quad (12)$$

$$f_1 + f_2 = k_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds}(s') \quad (13)$$

2.2 α

$$H(s) = \frac{L(output)}{L(input)} \Big|_{A\Sigma=0}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

Μέθοδος *Laplace*

$$L(f(t)) = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} dt$$

$f(t) = 0$ για $t < 0$

$$(12) \xrightarrow{(13)} K_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds}s' = b_s = ms''$$

$$\Leftrightarrow ms^2 X(s) = k_{ps}S_{des} - X(s)k_{ps} - k_{ds}(SX(S)) - b_s(sX(s))$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{K_{ps}S_{des}}{ms^2 + s(K_{ds} + b_s) + K_{ps}}$$

Μόνο πόλοι

$$\frac{X(s)}{S_{des}} = \frac{1}{\frac{ms^2}{k_{ps}} + \frac{s(k_{ds} + b_s)}{k_{ps}} + 1}$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{ms^2}{k_{ps}} + \frac{s(k_{ds} + b_s)}{k_{ps}} + 1}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

Λύνω το πολυώνυμο 2_{ov} βαθμού $\frac{mr^2}{k_{ps}} + s \frac{k_{ds} + b_s}{k_{ps}} + 1$

Άρα οι πόλοι είναι:

$$\Delta = \frac{k_{ds} + b_s}{k_{ps}} - 4 \frac{m}{k_{ps}}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{k_{ds} + b_s}{k_{ps}} \pm \sqrt{\Delta}}{2 \frac{m}{k_{ps}}}$$

2.3 γ

$$ms'' = k_{ps}(s_{des} - s) - k_{ds} - s' - b_s s'$$

$$s'' + \frac{s'(k_{ds} - b_s)}{m} + \frac{k_{ps}s}{m} - \frac{k_{ps}s_{des}}{m} = 0$$

$$r^2 + \frac{r(k_{ds} + b_s)}{m} + \frac{k_{ps}s}{m} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{k_{ds} + b_s}{m}\right)^2 - 4 \frac{k_{ps}}{m}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\frac{k_{ds} + b_s}{m} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Άρα έχουμε 2 λύσεις, τις r_1 και r_2 :

$$r_1 = \frac{-\frac{k_{ds} + b_s}{m} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-\frac{k_{ds} + b_s}{m} - \sqrt{\Delta}}{2}$$

2.3.1 Μερική Λύση

$$\begin{aligned}
c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} &= -\frac{k_{ps} s_{des}}{m} \\
s'' + s' \frac{k_{ds} + b_s}{m} + \frac{k_{ps} s}{m} - \frac{k_{ps} s_{des}}{m} &= 0 \xrightarrow[s'(0)=0]{s''(0)=0} \\
s''(0) + s'(0) \frac{k_{ds} + b_s}{m} + \frac{K_{ps} s(0)}{m} - \frac{k_{ps} s_{des}}{m} &= 0 \Rightarrow \\
s(0) &= s_{des} \\
s(t) &= s_{des}
\end{aligned}$$

$s(t) = s_{des} = A$ Άρα πολυώνυμο 0^{ov} βαθμού

2.3.2 Γενική Λύση

Άρα,

$$\begin{aligned}
s &= s_{des} + c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\
s' &= c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}
\end{aligned}$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + s_{des} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = -s_{des} \quad (14)$$

$$s'(0) = 0 \Rightarrow c_1 r_1 e^0 + c_2 r_2 e^0 = 0 \Rightarrow_1 r_1 + c_2 r_2 = 0 \quad (15)$$

$$(15) \xrightarrow{(14)} (-c_2 - s_{des}) r_1 + c_2 r_2 = 0 \Rightarrow_2 = \frac{s_{des} r_1}{-r_1 + r_2}$$

$$(14) \xrightarrow{(15)} c_1 = -s_{des} r_1 (r_2 - r_1) - s_{des} = -s_{des} \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1} + 1 \right)$$

2.3.3 Αναλυτική Λύση

$$s = s_{des} + \left(-s_{des} \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1} + 1 \right) \right) e^{r_1 t} + \frac{s_{des} r_1 e^{r_2 t}}{-r_1 + r_2}$$

2.4 Εικόνες

2.5 2.γ)

