Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння I-го порядку

- рівняння з відокремлюваними змінними

- однорідні рівняння

- лінійні рівняння

- рівняння в повних диференціалах

Диференціальні рівняння II-го порядку

- лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

із сталими коефіцієнтами

- лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

із сталими коефіцієнтами

ЗВИЧАЙНІ диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, що зв'язує незалежну змінну ***x***, шукану функцію однієї змінної ***y = f(x)*** і її похідні (або диференціали**)** різних порядків:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної - ***n***, що містить рівняння (1).

У цьому рівнянні x – незалежна змінна, y - шукана функція,

y', y'', $y^{(n)}$ - похідні функції y.

Приклад: $y^{(4)} - y + x = 0$ - рівняння четвертого порядку.

ЗДР

Функція $\boldsymbol{y=\varphi(x, C_1,C_2,\ldots,C_n)}$, де x – аргумент, $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – довільні сталі, називається **загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку**, якщо при її підстановці в рівняння, воно перетворюється в **тотожність**.

Загальний розв'язок диференціального рівняння, що має вигляд $\boldsymbol{\Phi(x, y, C_1,C_2,\ldots,C_n)=0}$, називається **загальним інтегралом диференціального рівняння.**

Частинним розв'язком диференціального рівняння називають розв'язок, одержаний із загального розв'язку (інтегралу) цього рівняння при підстановці деяких фіксованих значень сталих величин $C_1,C_2,\ldots,C_n$.

Ці значення знаходять при, так званих, початкових умовах :

$$x = x_0,\ y = y_0, y' = y_1, \ldots, y^{(n)} = y_{n-1}$$

розв'язавши відповідну систему рівнянь відносно $C_1,C_2,\ldots,C_n$.

Задача знаходження часткового розв'язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах називається **задачею Коші.**

Основні задачі теорії ЗДР:

1. знаходження диференціального рівняння та початкових умов, які описують ситуацію або процес, який досліджують;
2. розв'язування заданої задачі Коші або знаходження загального розв'язку заданого диференціального рівняння.

Приклад 1. (**Закон природного зростання**).

Закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини.

Потрібно знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент часу $t=0$, кількість речовини дорівнювала y_0.

Розв'язання. Нехай $y(t)$ – шукана кількість речовини в момент t. Швидкість зростання речовини є швидкість зміни функції y. Тоді закон природного зростання:

$$\frac{dy}{dt} = ay, \qquad (1')$$

$a>0$ – коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі повинна виконуватись рівність:

$$y\Big|_{t=0} = y_0 . \qquad (2')$$

Математична модель закону природного зростання речовини – задача Коші для диф. рівняння першого порядку вигляду (1’) з початковою умовою (2’).

Рівняння (1’) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{y} = adt \quad \text{або} \quad d(\ln y) = d(at).$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятись лише довільною сталою, тому

$$\ln y = at + C.$$

Звідси, потенціюванням знаходимо

$$y = e^{at+C}. \qquad (3)$$

Формула (3) дає вираз для кількості речовини як функції часу. Вона містить довільну сталу C, яка може приймати довільні числові значення. Тому формула (3) дає не один, а нескінченну кількість розв’язків задачі.

Використовуючи початкові умови (2), одержимо:

$$y_0 = e^C .$$

Отже, формула (3) тепер буде мати вигляд

$$y = y_0 e^{at} . \qquad (4)$$

Це і є шукана формула.

За законом природного зростання (4) зростає кількість живих клітин, кристалів, населення.

■ **Приклад 4. (*Зростання інвестицій*).** Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Треба знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової $(t=0)$ інвестиції K_0.

➯ *Розв'язання.* Спочатку побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $K(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція). Тоді $\dfrac{dK(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $r=\dfrac{R}{100}$.

За умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} = rK(t) \\ K(t)\big|_{t=0} = K_0 \end{cases}. \qquad (9)$$

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку аналогічного рівнянню (1).

Тому загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t) = e^{rt+C} = e^C e^{rt}. \qquad (10)$$

Згідно з початковою умовою при $t = 0$ маємо

$$K_0 = e^C.$$

Отже, розв'язком задачі Коші (9) буде функція

$$K(t) = K_0 e^{rt}. \qquad (11)$$

Це означає, що при умовах задачі інвестиції з часом зростать за експоненціальним законо.

ЗДР першого порядку

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називаються рівняння виду:

$F(x, y, y') = 0$ (2) або $y' = f(x, y)$ (3)

де x - незалежна змінна, $y(x)$ - невідома функція

Загальний розв'язок: $y = \varphi(x, C)$

Частинний розв'язок при початкових умовах :

$$y = y_0 \quad x = x_0$$

знаходять розв'язавши рівняння $y_0 = f(x_0, C)$ відносно C.

Приклад: $y'(x) - 3 \cdot x = 0$ загальний розв'язок: $y(x) = \frac{3}{2} x^2 + c$

Зауваження. Немає загального методу знаходження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

Рівняння з відокремлюваними змінними

1) $$f(x)dx + g(y)dy = 0, \qquad (4)$$

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C \qquad (5)$$

- загальний інтеграл (загальний розв'язок) цього рівняння.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння

$$e^y\,dy - (x^3 + 7x)\,dx = 0;$$

Згідно з (5)

$$\int e^y\,dy - \int (x^3 + 7x)\,dx = 0;$$

$$e^y - \frac{x^4}{4} + \frac{7}{2}x^2 + c = 0$$ - загальний розв'язок.

2) $$P_1(x)P_2(y)dy + Q_1(x)Q_2(y)dx = 0$$

Діленням на $P_1(x)Q_2(y)$ це рівняння зводиться до вигляду (4):

$$\frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}dx = 0$$

Зауваження. Рівняння $y' = f(x) \cdot g(y)$ еквівалентне рівнянню

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Поділивши його на ***g(y)*** і помноживши на ***dx*** отримуємо рівняння

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Це рівняння - з відокремлюваними змінними. Його загальний інтеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Приклад: $y' = x \cdot (y-1);$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y-1); \qquad \frac{dy}{(y-1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int x \cdot dx; \qquad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Виразимо ***y*** з останнього виразу як функцію ***x***, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Приклад.

$(y^2-4)dx = x\cdot y\cdot dy$, $\quad y(1)=2$.

Розв'язання. Розділимо змінні: $\frac{dx}{x} = -\frac{y}{y^2-4}dy$.

Проінтегруємо: $\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{y}{y^2-4}dy$.

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння: $\int\frac{y}{y^2-4}dy = -\int\frac{dx}{x}$.

$$\int\frac{y}{y^2-4}dy = \left|\begin{array}{l} \text{робимо}\quad \text{заміну:} \\ y^2-4=t; \\ d(y^2-4)=dt; \\ 2ydy=dt \\ ydy=\frac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \ln\left|y^2-4\right| + C_1.$$

$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right| = -\ln|x| + \ln C$; $\quad \frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$; $\quad \ln\left|(y^2-4)\right| = 2\ln\left|\frac{C}{x}\right|$;

$\ln\left|(y^2-4)\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|^2$; $\quad \ln\left|(y^2-4)\right| = \ln\left|\frac{C^2}{x^2}\right|$ $\quad y^2-4=\frac{C^2}{x^2}$;

$y^2 = \frac{C^2}{x^2}+4$ - **загальній розв'язок рівняння**, або: $y=\pm\sqrt{\frac{C^2}{x^2}+4}$.

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння із заданою початковою умовою $\quad y(1)=2$: $\;2^2=\frac{C^2}{1^2}+4$; $\quad 4=C^2+4$; $\;C=0$.

Отже: $y=\pm\sqrt{\frac{0}{x^2}+4}$; $y=\pm\sqrt{4}$; $y=\pm2$ - **частинний розв'язок** диференціального рівняння із заданою початковою умовою $\quad y(1)=2$.

Однорідні рівняння

$$y' = f(x, y)$$

де $f(x, y)$ така, що $f(tx,ty)=f(x,y)$.
Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової незалежної функції $\boldsymbol{u(x)}$ **заміною:**

$$\frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Підставляємо в рівняння $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$, отримаємо

$$u + xu' = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

(це - рівняння з відокремлюваними змінними),

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},\ \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

- загальний інтеграл рівняння відносно змінних x, u

Приклад:
$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \qquad u = \frac{y}{x},\ y = ux, \qquad y' = u + u'x,$$

$$u + u'x = u + \frac{1}{u}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \qquad udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int u\,du = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2\ln|x| + C, \quad \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,$$

$$y^2 = x^2\left(C + \ln x^2\right)$$

- загальний розв'язок рівняння

Приклад: $xy' = y\cos(\ln y - \ln x)$

$$y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x} \qquad u = \frac{y}{x},\ y = ux,$$

$$y' = u + u'x,\ u + u'x = u\cos\ln u,\ x\frac{du}{dx} = u\cos\ln u - u,\ \frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = |s = \ln u| = \int\frac{ds}{\cos s - 1} = \left|p = \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right| = \int\frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2} - 1} = \int\frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} + C,$$

$C \neq 0$

$$\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} = \ln|x| + \ln|C| \qquad Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2}} \qquad Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}}$$

Остаточно, отримаємо загальний розв'язок:

$$y = x \cdot e^{2arcctg(\ln x + C)}$$

Лінійні рівняння

ДР першого порядку називається лінійним, якщо невідома функція ***y*(*x*)** і її похідна входять до рівняння у першому степені, тобто:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (6)$$

де ***p*(*x*), *q*(*x*)** - неперервні функції**.**

Якщо ***q*(*x*)=0,** то рівняння (6) називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку***.

Для розв'язання рівняння представимо ***y*(*x*)** в вигляді добутку двох нових невідомих функцій ***u(x)*** *і* ***v(x):***

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Тоді

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

і рівняння (6) матиме вид:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Це рівняння розв'язуємо у два етапи: спочатку знаходимо функцію ***v*(*x*)** як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v' + p(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

потім знаходимо ***u*(*x*)** з рівняння :

$$u'v = q(x)$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \quad (7)$$

Приклад: $$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1$$

Розв'язання: $y = uv,\ y' = u'v + uv',\quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \dfrac{1}{\cos x},$

$$u'v + u\left(v' - v \operatorname{tg} x\right) = \frac{1}{\cos x},\qquad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v,\qquad v' - v \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x},\qquad \ln|v| = -\ln|\cos x|,$$

$$v = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x},\ u(x) = x + C$$

і загальний розв'язок рівняння .

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для знаходження частинного розв'язку, що відповідає початковим умовам (задача Коші), підставимо в загальний розв'язок

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x} \qquad x = 0,\ y = 1 : 1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$$

Розв'язок задачі:

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Рівняння в повних диференціалах

так називається рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (8)$$

(***P***(***x***, ***y***), ***Q***(***x***, ***y***) **-** неперервно диференційовані) у випадку, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто якщо існує така функція $u(x, y)$, що

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції є умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Якщо (8) – рівняння в повних диференціалах, то воно приймає вигляд $du(x, y) = 0$. При розв'язанні одержимо $du(x, y(x)) = 0$, отже $u(x, y(x)) = C$, де C – довільна стала.

Співвідношення $u(x, y) = C$ – загальний розв'язок **рівняння в повних диференціалах.**

Для знаходження функції $u(x, y)$ потрібно розв'язати системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

з першого рівняння цієї системи знаходимо:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

з точністю до довільної диференційованої по y функції $\varphi(y)$ (ця функція відіграє роль сталої інтегрування; оскільки інтегрування відбувається по змінній x.

Диференціюємо цю функцію по y і прирівнюємо до виразу, що стоїть у другому рівнянні системи (тобто $Q(x, y)$), отримаємо диференціальне рівняння з якого можна знайти $\varphi(y)$
.

Приклад: знайти загальний розв'язок рівняння $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$

Впевнимося, що це - **рівняння в повних диференціалах.**

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}.\end{cases}$$

$$P(x,y)=\frac{\sin 2x}{y}+x;\ Q(x,y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}\Rightarrow \qquad \varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

$$u(x,y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

ЗДР другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (10)$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \qquad (11)$$

-- загальний розв'язок рівняння (10).

Деякі типи рівнянь, що допускають пониження порядку:

1. Рівняння, не містить в явному вигляді невідому функцію та похідні нижчого порядку.

Рівняння виду

$$y'' = f(x)$$

розв'язується послідовним двократним інтегруванням, а саме:

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

$$y = \int \left[\int f(x)dx\right]dx + C_1 x + C_2$$

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = x^2$.

Розв'язання. Робимо заміну: $u(x) = u = y'$, тоді: $y'' = u'(x)$.

Підставимо заміну в рівняння: $u' = x^2$ і запишемо похідну через диференціали: $$\frac{du}{dx} = x^2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$du = x^2 dx$; $\int du = \int x^2 dx$, звідки: $u = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Після зворотної заміни $u = y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Розв'яжемо рівняння:

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx; \quad \int dy = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx;$$

$y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$ - ***загальний розв'язок рівняння.***

2. Рівняння не містить шукану функцію y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx}) \qquad (12)$$

Шляхом підстановки: $\frac{dy}{dx} = p, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$

у (12), отримаємо рівняння першого порядку відносно функції *p(x)*:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

Проінтегруємо це рівняння і знайдемо його загальний розв'язок:

$$p = p(x, C_1) \qquad y' = p(x, C_1)$$

Тоді загальний інтеграл матиме вигляд:

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2$$

Приклад.
Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' \cdot x - y' = 1$.

Розв'язання. Це рівняння, що не містить явно шуканої функції.
Робимо заміну: $y' = u(x)$, $y'' = u'(x)$.

Одержимо: $u'x - u = 1$, або $\frac{du}{dx}x = 1 + u$.

Розв'яжемо рівняння: $\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$;

$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln|1+u| = \ln|x| + \ln C_1$; $\ln|1+u| = \ln|C_1 \cdot x|$;
$1 + u = C_1 \cdot x$; $u = C_1 x - 1$.

Так як $u = y' = \frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx} = C_1 x - 1$.

Розв'яжемо останнє рівняння: $\int dy = \int (C_1 x - 1)dx$.
$y = -C_1 x - x + C_2$ - ***загальній розв'язок рівняння***.

У рівнянні відсутній аргумент.

Дано рівняння: $y'' = f(y, y')$. (16)

Виконаємо заміну: $u(x) = u = y' = \frac{dy}{dx}$. Тоді: $y'' = u'(x) = \frac{du}{dx}$.

Так, як $dx = \frac{dy}{u}$, тоді: $y'' = \frac{du}{dy/u} = u\frac{du}{dy}$.

Підставимо $y' = u$ і $y'' = u\frac{du}{dy}$ у рівняння (16), та одержимо рівняння:

$$u\frac{du}{dy} = f(y, C_1).$$

Якщо його розв'язком є функція $u = \varphi(y, C_1)$, то, виконавши зворотну заміну $u = y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння першого порядку: $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Знайдемо його розв'язок:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx; \qquad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 \qquad (17)$$

- ***загальний розв'язок*** диференціального рівняння другого порядку.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = y'$.

Розв'язання. Виконаємо заміну: $u = y' = \frac{dy}{dx}$ і $y'' = u\frac{du}{dy}$.

Одержимо звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u\frac{du}{dy} = u.$$

Розділимо ліву і праву частини на u і розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dy} = 1; \qquad du = dy; \qquad \int du = \int dy;$$

$$u = y + C_1.$$

Виконаємо зворотну заміну і розв'яжемо наступне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = y + C_1; \qquad \frac{dy}{y + C_1} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{y + C_1} = \int dx; \quad \ln|y + C_1| = x + C_2; \qquad e^{x + C_2} = y + C_1;$$

$y = e^{x + C_2} - C_1$ - ***загальний розв'язок*** диференціального рівняння.

Приклад: Понизити порядок рівняння: $yy'' = y'^2 - y'$;

Змінна ***x*** явно до рівняння не входить, тому вважаємо, $y' = p(y)$ $y'' = p'p$

тоді $ypp' = p^2 - p$.

Просто поділити на ***p*** це рівняння **неможливо**, оскільки можна втратити розв'язки $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

тому розглядають **два випадки:**

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$p \neq 0 \Rightarrow yp' = p - 1.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку.

Означення. Диференціальне рівняння другого порядку наз. ***лінійним***, якщо шукана функція *y* та її похідні y', y'', що входять у рівняння, мають тільки перший степінь:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (16)$$

Коефіцієнти: $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x) -$ задані функції від x, або сталі величини, є неперервними для всіх значень x.

Якщо $f(x) \neq 0,$ то рівняння (16) наз. ***лінійним неоднорідним*** рівнянням, в іншому випадку- ***лінійним однорідним***.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y''+py'+qy=0, \quad p \text{ і } q - \text{ сталі}, \tag{18}$$

називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{19}$$

де y_1 і y_2 – два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (18), C_1 та C_2 – довільні сталі.

Ці розв'язки знаходять у вигляді $y = e^{kx}$, де k – невизначена стала (дійсна або уявна). Для знаходження k складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{20}$$

Розв'язуючи рівняння (20), знаходимо його корені k_1 і k_2. Можливі такі три випадки.

1. Якщо $D>0$, то $k_1 \neq k_2$ – дійсні числа, тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{21}$$

2. Якщо $D=0$, то $k_1 = k_2 = k$ – дійсне число, тоді $y_1 = e^{kx}$ та $y_2 = xe^{kx}$, а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \tag{22}$$

3. Якщо $D<0$, то k_1 та k_2 – комплексні числа ($k_1 = \alpha + \beta i$ і $k_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$), тоді $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а загальний розв'язок має вигляд

$i^2 = -1, \alpha = -\dfrac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{23}$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$1)\ y'' - 5y' + 6y = 0;$$

$$2)\ y'' + 4y' + 13y = 0;$$

$$3)\ y'' + 6y' + 9y = 0.$$

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Знайдемо його розв'язки: $D = 25 - 24 = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{5+1}{2} = 3, k_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Тоді, використовуючи формулу (21) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 13 = 0$. Знайдемо його розв'язки:

$$D = 16 - 52 = -36 \Rightarrow k_1 = \frac{-4+6i}{2} = -2 + 3i, k_2 = \frac{-4-6i}{2} = -2 - 3i.$$

Тоді, використовуючи формулу (23) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x$.

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки : $k^2 + 6k + 9 = 0 \quad \Rightarrow (k+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -3, k_2 = -3$. Тоді, використовуючи формулу (22) маємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Рівняння виду

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (24)$$

де p і q – сталі, а $f(x)$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a;b]$, називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Рівняння $y''+py'+qy=0$ у цьому випадку називається *відповідним лінійним однорідним диференціальним рівнянням*.

Загальний розв'язок рівняння (24) знаходять у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто

$$y=\bar{y}+y^*, \qquad (25)$$

де $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння знаходяться за формулами (21-23). Щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння використовують *метод варіації довільних сталих*, який дає змогу визначити частинний розв'язок неоднорідного рівняння за загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Нехай $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння. Замінимо C_1 і C_2 невідомими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$ та підберемо їх такими, щоб функція

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \tag{26}$$

була частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння. Для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

$$(y^*)' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$$(y^*)'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

Підставивши отримані співвідношення в (24) отримаємо:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

Теорема: Якщо функції y_1 і y_2 лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння на проміжку $(a;b)$, то визначник $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ в кожній точці даного проміжку.

Визначник системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, тому що y_1 і y_2- лінійно незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння. Отже, дана система має єдиний розв'язок: $C_1'(x)=\varphi(x)$, $C_2'(x)=\psi(x)$. Проінтегрувавши дані функції знайдемо $C_1(x)=\int\varphi(x)dx$ і $C_2(x)=\int\psi(x)dx$, а потім підставивши їх у формулу (26) отримаємо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = \int\varphi(x)dx \cdot y_1 + \int\psi(x)dx \cdot y_2.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y = \bar{y} + y^*$.

Знайдемо $\bar{y}$. Для цього випишемо відповідне однорідне рівняння та розв'яжемо його.

$$y'' + 4y = 0;\ k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Запишемо частинний розвязок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y^* = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо: $C_1'(x) = -\frac{1}{2}tgx$ і $C_2'(x) = \frac{1}{2}$. Тоді $C_1(x) = -\int \frac{1}{2} tgxdx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$, а $C_2(x) = \int \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}$. Запишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння: $y^* = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$.

Загальний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| \cdot \cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною

Якщо права частина рівняння (24) має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок y^* можна знаходити, не вдаючись до інтегрування. Розглянемо деякі з таких випадків.

1) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{27}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Тоді частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x), \tag{28}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що і многочлен $P_n(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α, якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймають $r = 0$.

2) Нехай права частина рівняння (24) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x). \qquad (29)$$

Функція (27) є частинним випадком функції (29) при $\beta = 0$.

Тоді частинний розв'язок цього рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \qquad (30)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$;

r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Шукані многочлени $Q_n(x)$ з формули (28) та $Q_s(x)$ і $L_s(x)$ з формули (30) мають бути повними, тобто містити всі степені x відповідно від 0 до n та від 0 до s.

Приклад 8. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $y''-3y'-4y=17\sin x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

2) $y''-8y'+16y=e^{4x};\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x};\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

1) $y''-3y'-4y=17\sin x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами. Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2-3k-4=0 \Rightarrow k_1=-1,\ k_2=4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді за формулою (21) загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=17\sin x$ – подана у вигляді (28), тобто $f(x)=e^{0x}(0\cdot\cos x+17\sin x)$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді (29)

$$y^*=x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x+L_s(x)\sin\beta x),$$

де $\alpha=0, \beta=1 \Rightarrow \alpha+\beta i=i$;

$r=0$, так як $\alpha+\beta i\neq k_1$ і $\alpha+\beta i\neq k_2$;

$s=0$, так як $P_n(x)=0, R_m(x)=17 \Rightarrow n=m=0$, тому $Q_0(x)=A$, $L_0(x)=B$.

Звідси:

$$y^*=x^0e^0(A\cos x+B\sin x)=A\cos x+B\sin x,$$

$$(y^*)'=-A\sin x+B\cos x,$$

$$(y^*)''=-A\cos x-B\sin x.$$

Підставляємо у задане рівняння:

$$y''=(y^*)'',\ y'=(y^*)',\ y=y^*.$$

$$-A\cos x-B\sin x-3(-A\sin x+B\cos x)-4(A\cos x+B\sin x)=17\sin x.$$

Розкриємо дужки та згрупуємо доданки у лівій частині відносно $\cos x$ та $\sin x$:

$$(-5A-3B)\cos x+(3A-5B)\sin x=17\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos x$ та $\sin x$, одержимо

$$\begin{cases}-5A-3B=0,\\ 3A-5B=17;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{3}{5}B,\\ -\dfrac{9}{5}B-5B=17;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\dfrac{3}{2},\\ B=-\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Звідси $y^*=\dfrac{3}{2}\cos x-\dfrac{5}{2}\sin x$.

Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+\frac{3}{2}\cos x-\frac{5}{2}\sin x.$$

Розв'яжемо задачу Коші при $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Для цього знайдемо y'

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - \frac{3}{2}\sin x - \frac{5}{2}\cos x.$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = 0 \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 = -\frac{3}{2},$$

$$y'(0) = -C_1 + 4C_2 - \frac{5}{2} = 1 \;\Rightarrow\; C_1 = 4C_2 - \frac{7}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -\dfrac{3}{2}, \\ C_1 = 4C_2 - \dfrac{7}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{2}{5}, \\ C_1 = -\dfrac{19}{10}. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо відповідь:

$$y = \bar{y} + y^* = -\frac{19}{10}e^{-x} + \frac{2}{5}e^{4x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x.$$

2) $y''-8y'+16y=e^{4x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв’язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2-8k+16=0 \Rightarrow k_1=k_2=4 \Rightarrow k=4.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тоді за формулою $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$ загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y}=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x)=e^{4x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x)=1$ – многочлен нульового порядку, тобто $n=0$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^*=x^r e^{\alpha x}Q_n(x),$$

де $\alpha=4$;
$r=2$, так як $\alpha=k_1$ і $\alpha=k_2$;
$n=0$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_0(x)=A$.

Звідси

$$y^*=Ax^2e^{4x},$$

$$(y^*)'=2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x},$$

$$(y^*)''=2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}=2Ae^{4x}+16Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}.$$

Підставляємо у задане рівняння:

$$y''=(y^*)'',\ y'=(y^*)',\ y=y^*.$$

$$2Ae^{4x}+16Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}-8(2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x})+16(Ax^2e^{4x})=e^{4x},$$

$$e^{4x}(2A+16Ax+16Ax^2-16Ax-32Ax^2+16Ax^2)=e^{4x},$$

$$2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Звідси $y^*=\frac{1}{2}x^2e^{4x}$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}+\frac{1}{2}x^2e^{4x}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші при початкових умовах $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

$$y' = 4C_1e^{4x} + C_2e^{4x} + 4C_2xe^{4x} + xe^{4x} + 2x^2e^{4x} =$$

$$= e^{4x}(4C_1 + C_2 + (4C_2+1)x + 2x^2).$$

Підставивши початкові умови, одержимо

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y'(0) = 4C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Таким чином, дістанемо відповідь:

$$y = xe^{4x} + \frac{1}{2}x^2e^{4x} = (x + \frac{1}{2}x^2)e^{4x}.$$

3) $y''+2y'+2y = x^2e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Дане рівняння є неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

$$k^2+2k+2=0 \Rightarrow D=4-8=-4=(2i)^2 \Rightarrow k_1=-1-i,\ k_2=-1+i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні ($\alpha=-1$, $\beta=1$), тоді за

формулою $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ (21) загальний розв'язок відповідного

однорідного диференціального рівняння такий

$$\bar{y}=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Знайдемо частинний розв'язок y^* даного неоднорідного рівняння. Функція у правій частині даного рівняння $f(x) = x^2 e^{-x}$ – подана у вигляді (26), причому $P_n(x) = x^2$ – многочлен другого порядку, тобто $n = 2$. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $\alpha = -1$;
$r = 0$, так як $\alpha \neq k_1$ і $\alpha \neq k_2$;

$n = 2$ (порядок многочлена $P_n(x)$), тому $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ (повний многочлен другого порядку).

Звідси

$$y^* = x^0 e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C),$$

$$(y^*)' = -e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{-x}(2Ax + B) = e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C),$$

$$(y^*)'' = -e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) + e^{-x}(-2Ax + 2A - B) =$$

$$= e^{-x}(Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C).$$

Підставляємо у задане рівняння : $y'' = (y^*)''$, $y' = (y^*)'$, $y = y^*$.

$$e^{-x}(Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B + C) + 2e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C) +$$

$$+2e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = x^2 e^{-x},$$

$$e^{-x}(Ax^2 + Bx + 2A + C) = x^2 e^{-x},$$

$$Ax^2 + Bx + 2A + C = x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних степенів x одержуємо:

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ 2A + C = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -2. \end{cases}$$

Звідси $y^* = e^{-x}(x^2 - 2)$. Таким чином, знайшовши загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного та частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, можемо записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(x^2 - 2) =$$

$$= e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2),$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Для цього знайдемо y':

$$y' = -e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2) + e^{-x}(-C_1\sin x + C_2\cos x + 2x) =$$

$$= e^{-x}(-C_1\cos x - C_2\sin x - x^2 + 2 - C_1\sin x + C_2\cos x + 2x) =$$

$$= e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 - C_2)\sin x - x^2 + 2x + 2).$$

Підставивши початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, одержимо

$$y(0) = C_1 - 2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2,$$

$$y'(0) = -C_1 + C_2 + 2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Таким чином, одержимо відповідь:

$$y = e^{-x}(2\cos x + \sin x + x^2 - 2).$$