Варіант 30

Хутка Х. Р.
ПМП-22

Завдання 1

$n_1 = 2$ – к-сть білих в I урні;
$m_1 = 3$ – к-сть чорних в I урні;
$n_2 = 4$ – к-сть білих в II урні;
$m_2 = 2$ – к-сть чорних в II урні;

A – з III урни витягли білу кульку
P(A) – ?

H_1 – витягли білу з I урни, чорну з II
H_2 – витягли чорну з I урни, білу з II
H_3 – витягли обидві білі
H_4 – витягли обидві чорні

$$P(H_1) = \frac{n_1}{n_1+m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2+m_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{m_1}{n_1+m_1} \cdot \frac{n_2}{n_2+m_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{n_1}{n_1+m_1} \cdot \frac{n_2}{n_2+m_2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(H_4) = \frac{m_1}{n_1+m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2+m_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{30} = \frac{3}{15}$$

$P(A|H_i) = \frac{n}{m}$, де n – к-сть білих, а m = 2 (усі)

$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_3) = \frac{2}{2} = 1$ $\quad P(A|H_3) = \frac{0}{2} = 0.$

Оскільки, подія A може відбутися лише при появі однієї з попарно несумісних подій H_i $(i = \overline{1,4})$, які утворюють повну групу подій, то потрібно застосувати формули повної імовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{15} \cdot 1 + \frac{3}{15} \cdot 0 = \frac{8}{15}.$$

В-дь: імовірність витягти білу кульку з III урни $\frac{8}{15}$.

Завдання 2

$P(A)=0,8$, де A - подія, при якій авто, яке прибуло на прикордонну заставу - легкове.

$n=9$ - к-сть машин на заставі.

$P_9(4 \le k \le 7)$ - ? де k - к-ст. легкових авто

Оскільки n, k - невеликі, а $P(A) > 0,1$, то варто застосувати схему Бернулі, загальна формула якої

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ У нашому випадку: $p=0,8; q=0,2; n=9$.

$P_9(4) = C_9^4 \, 0,8^4 \, 0,2^5 = \frac{9!}{4!5!} \cdot 0,4096 \cdot 0,00032 \approx 0,017$

$P_9(5) = C_9^5 \, 0,8^5 \, 0,2^4 = \frac{9!}{5!4!} \cdot 0,0005 \approx 0,066$

$P_9(6) = C_9^6 \, 0,8^6 \, 0,2^3 = \frac{9!}{6!3!} \cdot 0,002 \approx 0,176$

$P_9(7) = C_9^7 \, 0,8^7 \, 0,2^2 = \frac{9!}{7!2!} \cdot 0,008 \approx 0,3$.

$P_9(4 \le k \le 7) = P_9(4) + P_9(5) + P_9(6) + P_9(7) =$

$= 0,017 + 0,066 + 0,176 + 0,3 = 0,559 \approx 0,56$

В-дь: ймовірність, що серед 9 автомобілів легкових буде від 4 до 7 становить 0,56.

Завдання 3

X :

x_i	x_1	x_2
p_i	0,8	a

$x_1 < x_2$

$M(X) = 3,2$

$\sigma(X) = 0,4$

$x_1 - ?$

$x_2 - ?$

$a - ?$

Оскільки за аксіомою адитивності $\sum_i p_i = 1$, то $a = 1 - 0,8 = 0,2$.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \Rightarrow \sqrt{D(X)} = 0,4 \Rightarrow D(X) = 0,16.$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

$M(X) = \sum_i x_i p_i = 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2$

$M(x^2) = \sum_i x_i^2 p_i = x_1^2 \cdot 0,8 + x_2^2 \cdot 0,2 = D(x) + M^2(x) =$

$= 0,16 + 10,24 = 10,4$

Отримуємо систему:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2 \\ 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 = 10,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 0,25x_2 \\ 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 = 10,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 0,25x_2 \\ 0,8(4 - 0,25x_2)^2 + 0,2x_2^2 = 10,4 \end{cases} \Rightarrow \{$$

$0,8(4 - 0,25x_2)^2 + 0,2x_2^2 = 10,4$

$0,8(16 - 2x_2 + 0,0625x_2^2) + 0,2x_2^2 = 10,4$

$12,8 - 1,6x_2 + 0,05x_2^2 + 0,2x_2^2 = 10,4$

$0,25x_2^2 - 1,6x_2 + 2,4 = 0 \quad | \cdot 4$

$x_2^2 - 6,4x_2 + 9,6 = 0$

$x_{21} = 2.4 \qquad x_{22} = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 0,25x_2 \\ x_2 = 2,4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3,4 \\ x_2 = 2,4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = 4 - 0,25x_2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

За умовою задачі, $x_1 < x_2$, отже, $x_1 = 3$; $x_2 = 4$

В-дь: X :

x_i	3	4
p_i	0,8	0,2

Завдання 4

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ A\sqrt{x-2}, & 2<x\le 6\\ 0, & x>6\end{cases}$$ – щільність розподілу випадкової величини X.

$A-?$ $F(X)-?$ $M(X)-?$ $\sigma(X)-?$

(I) За умовою нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$\int_{-\infty}^{2} f(x)dx=0$ і $\int_{6}^{+\infty} f(x)dx=0$, отже

$$\int_2^6 A\sqrt{x-2}\,dx=1 \Rightarrow A\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{2(x-2)\sqrt{x-2}}{3}\right)\Big|_2^6=1 \Rightarrow A\cdot\frac{16}{3}=1 \Rightarrow A=\frac{3}{16}$$

(II) Функцію розподілу визначатимемо за формулою $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

1) $x\le 2$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,d\cancel{t}=0$, адже $f(t)=0$, при $t\le 2$.

2) $2<x\le 6$ $F(x)=\int_{-\infty}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} f(t)dt=0+\int_2^x\frac{3}{16}\sqrt{t-2}\,dt=$

$$=\frac{3}{16}\left(\frac{2(t-2)\sqrt{t-2}}{3}\right)\Big|_2^x=\frac{(x-2)^{3/2}}{8}$$

3) $x>6$ $F(x)=\int_{-\infty}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{6} f(t)dt+\int_{6}^{+\infty} f(t)dt=$

$$=0+\frac{4^{3/2}}{8}+0=1$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \frac{(x-2)^{3/2}}{8}, & 2<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$$

(III) $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=$

$$=\frac{3}{16}\int_2^6 x\sqrt{x-2}\,dx=\left\{\begin{matrix}u=\sqrt{x-2}\\ x=u^2+2\end{matrix}\quad dx=2u\,du\right\}=2\int_0^2 u^4+2u^2\,du\cdot\frac{3}{16}=$$

$$=\frac{3}{16}2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{2u^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{3}{16}2\left(\frac{\sqrt{x-2}x^2}{5}-\frac{2x\sqrt{x-2}}{15}-\frac{8\sqrt{x-2}}{15}\right)\Big|_2^6=\frac{352}{15}=\frac{22}{5}$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int_2^6 \frac{3}{16}x^2\sqrt{x-2}\,dx = \begin{cases} u=\sqrt{x-2} \\ x=u^2+2 \\ dx=2u\,du \end{cases}$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 2u^2(u^2+2)^2 du = \frac{3}{8}\int_0^2 u^6+4u^4+4u^2 du =$$

$$= \left(\frac{3u^7}{56}+\frac{3u^5}{10}+\frac{u^3}{2}\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{3\sqrt{x-2}\,x^3}{56} - \frac{3x^2\sqrt{x-2}}{140} -\right.$$

$$\left. - \frac{2x\sqrt{x-2}}{35} - \frac{8\sqrt{x-2}}{35}\right)\Big|_2^6 = \frac{716}{35}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{716}{35} - \frac{484}{25} = \frac{192}{175} =$$

$$\sigma(X) = \frac{8\sqrt{21}}{35} \approx 1{,}047$$

Завдання 5

$\alpha=2 \quad \beta=12 \quad a=8 \quad b=15$

$P\{\alpha < X < \beta\} - ?$

а) Рівномірний розподіл на відрізку $[8;15]$

Тоді $F(x) = \begin{cases} 0, & x<8; \\ \frac{x-8}{7}, & 8\le x\le 15; \\ 1, & x>15. \end{cases}$, адже $F(X) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1, & x>b. \end{cases}$

$$P\{2<X<12\} = F(\beta)-F(\alpha) = F(12)-F(2) =$$

$$= \frac{12-8}{7} - 0 = \frac{4}{7}$$

б) Нормальний закон розподілу

$M(X)=8 \qquad \sigma(X)=2$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-M}{\sigma}\right), \text{ де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

$$P\{2<X<12\} = \Phi\left(\frac{12-8}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-8}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(2)+\Phi(3) = 0{,}4773 + 0{,}49865 \approx 0{,}98$$

$\Phi(X)$ – табличні дані

в) За показниковим законом

$M(X) = b = 15$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ – функція розподілу показникового закону

$M(X) = \frac{1}{\lambda}$

$\frac{1}{\lambda} = 15 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{15}$

$P\{2 < X < 12\} = F(12) - F(2) = 1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 12} - 1 + e^{-\frac{1}{15} \cdot 2} =$

$= e^{-\frac{2}{15}} - e^{-\frac{12}{15}} \approx 0,43$

В-дь: а) $P\{2 < X < 12\} \approx 0,57$

б) $P\{2 < X < 12\} \approx 0,98$

в) $P\{2 < X < 12\} \approx 0,43$

Завдання 6

X \ Y	4	5	6	7
2	0,1	0,1	0	0
3	0	0,3	0,2	0
4	0	0	0,2	0,1

а) Закон розподілу X

X:

x_i	2	3	4
p_i	0,2	0,5	0,3

Закон розподілу Y

Y:

y_i	4	5	6	7
p_i	0,1	0,4	0,4	0,1

б) Умовний розподіл Y, за умови, що $X = 2$

$$P\{Y = y_i \mid X = 2\} = \frac{P\{Y = y_i \mid X = 2\}}{P\{X = 2\}}$$

$$P\{Y = 4 \mid X = 2\} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$$

$P\{Y=5 \mid X=2\} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$P\{Y=6 \mid X=2\} = \dfrac{0}{0,2} = 0$

$P\{Y=7 \mid X=2\} = \dfrac{0}{0,2} = 0$

$Y=y_i$	4	5	6	7
$P\{y_i \mid x=2\}$	0,5	0,5	0	0

– Умовний розподіл

в) $M(X) = 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,5 + 4\cdot 0,3 = 3,1$

$M(Y) = 4\cdot 0,1 + 0,4\cdot 5 + 6\cdot 0,4 + 7\cdot 0,1 = 5,5.$

$M(X^2) = 4\cdot 0,2 + 9\cdot 0,5 + 16\cdot 0,3 = 10,1$

$M(Y^2) = 16\cdot 0,1 + 25\cdot 0,4 + 36\cdot 0,4 + 49\cdot 0,1 = 30,9$

$D(X) = 10,1 - (3,1)^2 = 0,49$

$D(Y) = 30,9 - (5,5)^2 = 0,65$

$\sigma(X) = 0,7 \quad \sigma(Y) \approx 0,8$

$K_{xy} = 2(4\cdot 0,1 + 5\cdot 0,1 + 0 + 0) + 3(0 + 5\cdot 0,3 + 6\cdot 0,2 + 0) +$
$+ 4(0 + 0 + 0,2\cdot 6 + 0,1\cdot 7) = 17,5 \quad = 17,5 - 5,5\cdot 3,1 = 0,45$

$\rho_{xy} = \dfrac{0,45}{0,7\cdot 0,8} \approx 0,8$

Оскільки $K_{xy} \neq 0$, то випадкові величини X і Y залежні.

В-дь: а), б) розподіли вказані

в) Коваріація $K_{xy} = 0,45$

Коефіцієнт кореляції $\approx 0,8$

X і Y залежні.

Завдання 7

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}(0) = (0,5;\ 0,2;\ 0,3)$$

а) $P(3) = P^3$

$$P(3) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,13 & 0,65 \\ 0,17 & 0,22 & 0,61 \\ 0,21 & 0,13 & 0,66 \end{pmatrix} \cdot P =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,209 & 0,139 & 0,652 \\ 0,195 & 0,166 & 0,639 \\ 0,208 & 0,139 & 0,653 \end{pmatrix}$$ – матриця переходу за три кроки.

б) $$\vec{p}(3) = (0,5;\ 0,2;\ 0,3) \cdot \begin{pmatrix} 0,209 & 0,139 & 0,652 \\ 0,195 & 0,166 & 0,639 \\ 0,208 & 0,139 & 0,653 \end{pmatrix} =$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{p}(3) = p(0) \cdot P(3)$$

$$= (0,2059;\ 0,1444;\ 0,6497)$$

в) Стаціонарний розподіл шукатимемо за формулою:

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i p_{ij} \quad (j = \overline{1,k}) \\ \sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,3p_1 + 0,1p_2 + 0,6p_3 = p_1 \\ 0,1p_1 + 0,4p_2 + 0,5p_3 = p_2 \\ 0,2p_1 + 0,1p_2 + 0,7p_3 = p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}7p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}6p_3 = 0 \\ 0{,}1p_1 - 0{,}6p_2 + 0{,}5p_3 = 0 \\ 0{,}2p_1 + 0{,}1p_2 - 0{,}3p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Методом Гауса: $\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-0{,}7) \\ -(1)\cdot 0{,}1 \\ -(1)\cdot 0{,}2 \end{array}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/7 & -6/7 & 0 \\ 0 & -41/70 & 41/70 & 0 \\ 0 & 9/70 & -9/70 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/7 & -6/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9/70 & -9/70 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_3 \\ p_2 = p_3 \end{cases}$$

А, оскільки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то стаціонарний розподіл матиме вид $\vec{p} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

г) Середня доля перебування у стані $S_1 = \frac{1}{3}$

Середня доля часу перебування у стані $S_2 = \frac{1}{3}$

Середня доля часу перебування у стані $S_3 = \frac{1}{3}$

Середні періоди повторення

$\overline{T}_1 = \frac{1}{p_1} = 3$

$\overline{T}_2 = \frac{1}{p_2} = 3$

$\overline{T}_3 = \frac{1}{p_3} = 3$