Método de Simpson $\frac{1}{3}$

Kevin Esguerra Cardona

14 de abril de 2023

Descripción del problema

En matemáticas, concretamente en el cálculo integral, existen máquinas abstractas que nos ayudan a calcular sumatorias finitas o innumerables términos, llamadas integrales. Estas son aplicadas sobre funciones y obtenemos antiderivadas. Al determinar un intervalo sobre el cual se va a integrar se puede definir un valor presiso que describe la relación entre el área contenido en la región definida. Sin embargo, existen algunas de estas operaciones que resultan imposibles de calcular por métodos tradicionales. Para ello existen los métodos de integración numéricos. Uno de ellos, el que trabajaremos el día de hoy, es el método de Simpson $\frac{1}{3}$.

Se busca implementar dicho método dentro de un programa que calcule específicamente la de integral definida en un rango dado de la curva $y = e^{-x^2}$. Su tarea consistirá en deducir e implementar un algoritmo adecuado para este problema a partir del siguiente desarrollo matemático, dónde N_i es el número de particiones de la curva y h es el ancho de cada una de esas particiones.

$$\int_1^3 e^{-x^2} dx; \tag{1}$$

$$N_i = 6; \tag{2}$$

$$h = \frac{3-1}{N_i} = \frac{1}{3} \tag{3}$$

$$X_0 = 1 \to f(X_0) \approx 0{,}36787 \tag{4}$$

$$X_1 = X_0 + h = \frac{4}{3} \to f(X_1) \approx 0{,}16901 \tag{5}$$

$$X_2 = X_1 + h = \frac{5}{3} \to f(X_2) \approx 0{,}06217 \tag{6}$$

$$X_3 = X_2 + h = \frac{6}{3} \to f(X_3) \approx 0{,}01831 \tag{7}$$

$$X_4 = X_3 + h = \frac{7}{3} \rightarrow f(X_4) \approx 0{,}00432 \tag{8}$$

$$X_5 = X_4 + h = \frac{8}{3} \rightarrow f(X_5) \approx 0{,}00081 \tag{9}$$

$$X_6 = X_5 + h = \frac{9}{3} \rightarrow f(X_6) \approx 0{,}00012 \tag{10}$$

$$\int_1^3 e^{-x^2} dx \approx (\frac{h}{3})[f(X_0)+4f(X_1)+2f(X_2)+4f(X_3)+2f(X_4)+4f(X_5)+f(X_6)] \tag{11}$$

$$\int_1^3 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{6}[0{,}16901+0{,}06217+0{,}01831+0{,}00432+0{,}00081+0{,}00012] \tag{12}$$

$$\int_1^3 e^{-x^2} dx \approx 0{,}208915 \tag{13}$$

Aclaraciones adicionales

- Notar que el patrón de coeficientes de la serie de sumas $1y + 4y + 2y + 4y + 2y + 4y + 1y$ para 6 intervalos se puede extender a $1y + \ldots + 4y + 2y + 4y + 2y + \ldots + 2y + 4y + 1y$. Es decir, el primer coeficiente siempre será 1, los últimos tres coeficientes serán 2 , 4 y 1, respectivamente; y, los coeficientes intermedio se corresponderán al patron oscilante $2 \leftrightarrow 4$.
- Aclarar que la cantidad de intervalos siempre debe ser par.
- El valor real de la integral es 0.13938

Condiciones

1. Debe utilizar una implementación personal de la estructura de datos dinámica necesaria para almacenar los resultados.
2. Debe procurar buenas prácticas de programación. Consulte el siguiente artículo para más detalles:
   https://keepcoding.io/blog/8-buenas-practicas-en-programacion/
3. Debe procurar la menor complejidad computacional que le sea posible. Evalúe con el método Big-O.
4. Acercar al valor real de la integral con un error menor a 1 %.

Entregables

1. Algoritmo implementado en pseudo-código.
2. Algoritmo implementado en C++.