

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

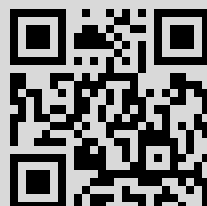
Б. Е. Аксенов, А. М. Александров, А. Н. Баканов, Применение обобщенного пуассоновского потока к исследованию методов повышения достоверности, *Пробл. передачи информ.*, 1973, том 9, выпуск 3, 80–86

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.27.66.115

7 апреля 2015 г., 23:42:39



УДК 621.391.1:519.152

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ

Б. Е. Аксенов, А. М. Александров, А. Н. Баканов

Рассматривается возможность использования обобщенного пуассоновского потока для исследования методов повышения достоверности.

1. В [1, 2] было показано, что одномерное распределение потока ошибок дискретного канала с приемлемой точностью аппроксимируется соответствующим распределением обобщенного пуассоновского потока (ОПП), который может быть использован в качестве математической модели канала. Принятие такой математической модели потока приводит к признанию зависимости интервалов между ошибками, т. е. модели канала с памятью.

Данная работа посвящена исследованию возможности использования указанной модели канала для расчета характеристик методов повышения достоверности.

Обобщенный пуассоновский поток полностью определяется одной из следующих функций: $F(\lambda)$, $\varphi(t)$ или $v_0(t)$ [1-4]. Здесь $F(\lambda)$ и $\varphi(t)$ — функции распределения соответственно случайного параметра исходного пуассоновского потока и интервалов между соседними событиями ОПП, $v_0(t)$ — вероятность отсутствия событий ОПП на промежутке времени t . В соответствии с этим вероятность того, что на последовательно расположенных промежутках времени t_1, \dots, t_n появится соответственно k_1, \dots, k_n событий ОПП, есть [1-4]:

$$\begin{aligned} (1) \quad v_k(t) &= P\{\xi(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}) = k_i, i = \overline{1, n}\} = \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda t_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda t_i} dF(\lambda) = (-1)^k \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{k_i}}{k_i!} \frac{d^k v_0(\tau_n)}{d\tau_n^k} = \\ &= (-1)^{k-1} \alpha \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{k_i}}{k_i!} \frac{d^{k-1} \varphi(\tau_n)}{d\tau_n^{k-1}}. \end{aligned}$$

Здесь $\xi(\tau)$ — количество событий обобщенного пуассоновского потока, появившихся в промежутке времени $(0, \tau)$; $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_n\}$, $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$, $k = k_1 + \dots + k_n$, $\tau_n = t_1 + \dots + t_n$, далее $\alpha = -v_0'(0) = \left\{ \int_0^\infty \varphi(t) dt \right\}^{-1}$ —

параметр ОПП. Функции $v_0(t)$ и $\varphi(t)$ связаны известным соотношением Пальма — Хинчина:

$$(2) \quad v_0(t) = \alpha \int_t^\infty \varphi(x) dx; \quad \varphi(t) = -\alpha^{-1} v_0'(t).$$

Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ — некоторая последовательность фиксированных моментов времени. Далее, пусть $\eta(\tau)$ — некоторый показатель метода повышения достоверности такой, что $\eta(\tau) = 1$ или 0 в зависимости от того, выполняется или не выполняется в момент времени τ некоторое интересующее нас событие, характеризующее метод повышения достоверности. Таким событием может быть, например, появление искаженного кодового слова или появление в кодовом слове необнаруженной ошибки и т. д.

Так как показатели методов повышения достоверности зависят от свойств ошибок, то $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ зависимы между собой. Рассмотрим случайный процесс $\{\xi(\tau), \eta(\tau)\}$. Обозначим через $A^{(i)}$ событие $\{\eta(\tau_i) = 1\}$, через B_k — событие $\{\xi(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}) = k\}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} P(A^{(i)}) &= P\{\eta(\tau_i) = 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}) = k\} \times \\ &\times P\{\eta(\tau_i) = 1 | \xi(\tau_i) - \xi(\tau_{i-1}) = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t_i) P(A^{(i)} | B_k) = \\ (3) \quad &= \int_0^{\infty} P(A_{\lambda}^{(i)}) dF(\lambda), \end{aligned}$$

$$t_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \quad i \geq 1, \quad \tau_0 = 0; \quad v_k(t_i) = P(B_k); \quad P(A_{\lambda}^{(i)}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_i)^k}{k!} e^{-\lambda t_i} P(A^{(i)} | B_k).$$

$P(A_{\lambda}^{(i)})$ определяет вероятность событий $A^{(i)}$ для (обычного) пуассоновского потока. В дальнейшем будем считать, что $\tau_i - \tau_{i-1} = t$, $i \geq 1$, так что события $A^{(i)}$ могут происходить только в моменты времени $t, 2t, 3t, \dots$. Обозначим $\eta(\tau_i) \equiv \eta_i$. Таким образом, η_i является случайным процессом с дискретным временем. Если рассмотреть однородную последовательность из n таких моментов (которую можно назвать блоком длины n), то на ней можно обнаружить или 0 , или $1, \dots$, или n событий $A^{(i)}$. Обозначим через $p_i(n)$ вероятность того, что на блоке длины n появится i событий A , т. е.

$$p_i(n) = P\left\{\sum_{j=1}^n \eta_j = i\right\}.$$

Таким образом, $p_i(n)$ есть распределение, например, числа искаженных кодовых слов или числа кодовых слов с необнаруженными ошибками и т. д. в общем числе n переданных кодовых слов. Если события $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ при $i \neq j$ взаимно независимы, то распределение вероятностей $p_i(n)$ является биномиальным распределением. Однако ошибки в каналах связи в общем случае зависимы между собой, как это следует из эксперимента и из модели ОПП. Поэтому зависимы между собой и события $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ при $i \neq j$. В связи с этим биномиальное распределение нельзя использовать для вычисления вероятности $p_i(n)$.

Из определений вероятности $p_i(n)$ и ОПП (1) следует, что

$$(4) \quad p_i(n) = C_n^i \int_0^\infty P^i(A_\lambda) [1 - P(A_\lambda)]^{n-i} dF(\lambda).$$

Отсюда непосредственно видно, что события $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ при $i \neq j$ в общем случае зависимы между собой. Из этого же выражения следует, что случайный процесс η_i является одним из вариантов обобщенного биномиального потока (биномиального потока со случайной вероятностью появления события [5]). После несложных преобразований (4) получим соотношение для $p_i(n)$ в более удобном виде:

$$(5) \quad p_i(n) = C_n^i \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} C_{n-i}^{j-i} \int_0^\infty P^j(A_\lambda) dF(\lambda).$$

Аналогичным путем можно получить общее выражение для $p_i(\mathbf{n})$ — многомерного распределения числа событий A на m последовательно расположенных блоках n_1, \dots, n_m :

$$(6) \quad p_i(\mathbf{n}) = \prod_{l=1}^m C_{n_l}^{i_l} \sum_{j_1=i_1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=i_m}^{n_m} (-1)^{j-i} \prod_{l=1}^m C_{n_l-i_l}^{j_l-i_l} \int_0^\infty P^j(A_\lambda) dF(\lambda),$$

где $j = j_1 + \dots + j_m$, $i = i_1 + \dots + i_m$, $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_m\}$. Это аналог выражения (1) для потока событий A . Необходимо иметь в виду, что $p_i(n)$ есть одномерное распределение для потока событий A . Относительно же исходного потока ошибок это вариант многомерного распределения. Поэтому, например, проверка $p_i(n)$ на соответствие эксперименту — это проверка многомерного распределения для потока ошибок, т. е. проверка самой модели канала связи.

Рассмотрим случай, когда $P(A|B_s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s = k, \\ 0 & \text{при } s \neq k, \end{cases} k \geq 0$.

Тогда $P(A_\lambda) = [(\lambda t)^k / k!] e^{-\lambda t}$. Так как

$$\int_0^\infty P^j(A_\lambda) dF(\lambda) = (-1)^{jk} \frac{t^{jk}}{(k!)^j} \frac{d^{jk} v_0(\tau_j)}{d\tau_j^{jk}},$$

где $\tau_j = jt$; $v_0(\tau_j) = \int_0^\infty e^{-\lambda \tau_j} dF(\lambda)$ — вероятность отсутствия ошибок на интервале времени τ_j , то из (6)

$$(7) \quad p_i(\mathbf{n}) = \prod_{l=1}^m C_{n_l}^{i_l} \sum_{j_1=i_1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=i_m}^{n_m} (-1)^{j-i+M} \prod_{l=1}^m C_{n_l-i_l}^{j_l-i_l} \frac{t^{k_l j_l}}{(k_l!)^{j_l}} \frac{d^M v_0(\tau_j)}{d\tau_j^M},$$

$M = k_1 j_1 + \dots + k_m j_m$. Предполагается, что параметр k для каждого блока может быть различным. Аналогично получается выражение, если для каждого блока различным является также параметр t .

Принимая во внимание (2), можно написать, что

$$(8) \quad p_i(n) = \alpha \sum_{j=i}^n (-1)^{j(k+1)-i-1} C_{n-i}^{j-i} \frac{t^{jk}}{(k!)^j} \frac{d^{j-1} \varphi(\tau_j)}{d\tau_j^{j-1}}, \quad jk \geq 1.$$

Таким образом получен весьма важный результат, состоящий в том, что как для исходного потока ошибок, так и для потока событий A для определения $p_i(n)$ достаточно задать одну из следующих функций: $F(\lambda)$, $v_0(t)$, $\varphi(t)$. Для важного в практическом отношении частного случая $k=0$ из (7) следует, что

$$(9) \quad p_i(n) = \prod_{l=1}^m C_{n_l}^{i_l} \sum_{j_1=i_1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=i_m}^{n_m} (-1)^{j-i} \prod_{l=1}^m C_{n_l-i_l}^{j_l-i_l} v_0(j_l t).$$

Рассмотрим еще несколько полезных форм представления потока событий A .

Заметим, что

$$\int_0^\infty \prod_{l=1}^m \left[\frac{(\lambda t)^{k_l}}{k_l!} e^{-\lambda t} \right]^{j_l} dF(\lambda) = \prod_{l=1}^m \frac{(j_l k_l)!}{(j_l^{k_l} k_l!)^{j_l}} v_{j_1 k_1, \dots, j_m k_m}(j_1 t, \dots, j_m t),$$

где $v_{jk}(jt)$ — вероятность появления jk ошибок на интервале времени jt . Отсюда вместо (8) можно написать:

$$(10) \quad p_i(n) = \prod_{l=1}^m C_{n_l}^{i_l} \sum_{j_1=i_1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=i_m}^{n_m} (-1)^{j-i} \times \\ \times \prod_{l=1}^m C_{n_l-i_l}^{j_l-i_l} \frac{(j_l k_l)!}{(j_l^{k_l} k_l!)^{j_l}} v_{j_1 k_1, \dots, j_m k_m}(j_1 t, \dots, j_m t).$$

Таким образом, если известны значения $v_{j_1 k_1, \dots, j_m k_m}(j_1 t, \dots, j_m t)$ (например, из эксперимента), то с помощью (10) можно непосредственно вычислить $p_i(n)$.

Нетрудно вычислить вероятность появления события A ровно в n -й момент времени. Обозначив эту вероятность через $\pi(n)$, получим, что

$$(11) \quad \pi(n) = p_0(n-1) - p_0(n) =$$

$$= \int_0^\infty P(A_\lambda) [1 - P(A_\lambda)]^{n-1} dF(\lambda) = n^{-1} p_1(n).$$

В частности, если $P(A_\lambda) = e^{-\lambda t}$, то

$$\pi(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} v_0(jt).$$

Следующая задача данной работы состоит в вычислении вероятности отсутствия события A на блоке длины n при условии, что этот промежуток времени отмеряется от момента появления предыдущего события A (а не от произвольно выбранного момента времени, как в случае вероятности $p_0(n)$). Обозначим эту вероятность через $h(n)$. Для потоков с непрерывным временем этой вероятностью является функция Пальма —

Хинчина $\varphi(t)$. В случае дискретного времени между $h(n)$ и $p_0(n)$ существует связь, аналогичная связи между $\varphi(t)$ и $v_0(t)$, задаваемой соотношениями (2): $-\Delta p(n+1) = p_0(n) - p_0(n+1) = p_1(n)h(n)$, $n \geq 1$. Легко видеть, что $p_1(1) = P(A)$. Поэтому $h(n) = -P^{-1}(A)\Delta p_0(n+1)$, или $h(n) = -P^{-1}(A)\pi(n+1) = p_1(n+1) / [(n+1)P(A)]$, $h(0) = 1$.

Вероятность того, что событие A произойдет ровно в n -й момент времени (после наступления предыдущего события A), есть

$$(12) \quad \begin{aligned} J(n) &= -\Delta h(n) = P^{-1}(A) \int_0^{\infty} P^2(A_\lambda) [1 - P(A_\lambda)]^{n-1} dF(\lambda) = \\ &= \frac{2p_2(n+1)}{n(n+1)P(A)}. \end{aligned}$$

2. Таким образом, если рассматривать поток ошибок в канале связи как обобщенный пуассоновский, то можно вычислить различные характеристики передачи информации по каналу связи, имея для этого только набор значений функций v_0 или φ или их производных для различных значений их аргументов. Это обстоятельство упрощает проведение различных расчетов и ставит на практическую основу задачи анализа различных методов повышения достоверности, так как для широкого класса каналов эти функции известны и могут быть представлены в виде, например, гиперболического распределения или обобщенного экспоненциального распределения [6].

Рассмотрим некоторые примеры использования полученных результатов. В работах [1, 2] было показано, что поток ошибок в телефонном тропосферном канале может быть описан с помощью обобщенного пуассоновского процесса, причем функция распределения интервалов между ошибками для этого канала может быть принята в виде

$$(13) \quad \varphi(t) = (a/(a+t))^v,$$

где a и v — некоторые характеристики потока. В этом случае функция $F(\lambda)$ есть гамма-распределение.

Используя соотношение (13), преобразуем формулы (7) или (8) для $m = 1$ к виду

$$(14) \quad \begin{aligned} p_i(n) &= C_n^i \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} C_{n-j}^{j-i} \left(\frac{t}{a+jt} \right)^{jk} \times \\ &\times \frac{(v+jk-2)_{ik}}{(k!)^j} \left(\frac{a}{a+jt} \right)^{v-1} \end{aligned}$$

где $(x)_r = x(x-1) \dots (x-r+1)$, $(x)_0 \equiv 1$.

В общем случае для аппроксимации $\varphi(t)$ может оказаться необходимым прибегнуть к использованию выражений, отличных от (13). Так, например, в [2, 6] для телеграфного КВ радиоканала предлагается взять

$$(15) \quad \varphi(t) = \exp(\lambda a^{1-v}) \exp[-\lambda(a+t)^{1-v}] \left(\frac{a}{a+t} \right)^v, \quad t \geq 0,$$

где λ , a , v — некоторые параметры $\varphi(t)$. В этом случае

$$(16) \quad v_0(t) = \exp(\lambda a^{1-v}) \exp[-\lambda(a+t)^{1-v}].$$

Таблица 1

Тип канала	i	$\bar{p}_i(n)$	Расчетные значения по формулам			
			(14)	(9)	(17)	ДСК
Тропосферный телефонный канал $t = 64, n = 4, k = 0$ $p_{\text{ош}} = 10^{-3} \div 10^{-4}$	0÷1	0,00167	0,00274	0,00218	0,00001	0,00002
	2	0,00135	0,00077	0,00040	0,00006	0,00192
	3	0,01440	0,00131	0,00468	0,01301	0,06895
	4	0,99258	0,99516	0,99274	0,98692	0,92911
Тропосферный телефонный канал $t = 256, n = 12, k = 0$ $p_{\text{ош}} = 10^{-3} \div 10^{-4}$	0÷9	0,01035	0,02812	0,00439	0,00009	0,04831
	10	0,00737	0,00396	0,00502	0,00336	0,15899
	11	0,02197	0,01164	0,02984	0,08193	0,37888
	12	0,96031	0,95628	0,96075	0,91462	0,41382
Кабельный телефонный канал $t = 128, n = 12, k = 0$ $p_{\text{ош}} = 10^{-3}$	0÷9	0,00622	0,01976	0,00430	0,00003	0,49111
	10	0,00164	0,00213	0,00184	0,00162	0,27192
	11	0,00557	0,00406	0,00681	0,05774	0,18147
	12	0,98657	0,97405	0,98705	0,94061	0,05551
Телеграфный КВ радиоканал $t = 64, n = 4, k = 0$ $p_{\text{ош}} = 6 \cdot 10^{-3}$	0÷1	0,05926	0,06385*	0,05255	0,00731	0,08862
	2	0,07149	0,05410*	0,07264	0,07311	0,27099
	3	0,16598	0,17921*	0,17154	0,33702	0,40895
	4	0,70327	0,70284*	0,70328	0,58256	0,23144
Радиорелейный телефонный канал $t = 256, n = 4, k = 2$ $p_{\text{ош}} = 10^{-3}$	0	0,99466	0,99551	0,99556	0,99419	0,89881
	1	0,00525	0,00327	0,00325	0,00580	0,09718
	2	0,00038	0,00102	0,00099	0,00001	0,00394
	3÷4	0,00001	0,00020	0,00020	0,00000	0,00007

Примечание: значения с индексом * рассчитаны на основе формул (9) и (16).

Таблица 2

i	$\bar{p}_i(n)$	Расчетные значения по формулам		i	$\bar{p}_i(n)$	Расчетные значения по формулам	
		(14)	(17)			(14)	(17)
0÷3	0,01610	0,02168	0,00011	5	0,01875	0,00924	0,09811
4	0,00791	0,00511	0,00447	6	0,95724	0,96387	0,89731

В табл. 1 представлены некоторые экспериментальные и расчетные результаты для различных каналов. Ограниченный объем статьи не позволяет привести более полные результаты исследований. Длина кодового слова t варьировалась в диапазоне $t = 64 \div 256$ двоичных знаков. Число кодовых слов n , на котором рассматривалось распределение числа событий A , изменялось в диапазоне $n = 4 \div 12$ блоков. Таким образом, длина передаваемого массива $t \cdot n$ изменялась в пределах $256 \div 3072$ двоичных знаков.

Значения $p_i(n)$ для тропосферного канала связи получены по формулам (14) и (9), (10). По этим же формулам рассчитаны величины $p_i(n)$ для кабельного и радиорелейного каналов. Это равносильно использованию для последних функций $\varphi(t)$ вида (13). В качестве величин $v_0(jt)$ в (9) использовались экспериментально полученные частоты $\bar{v}_0(jt)$ появления блоков длины jt , на которых отсутствуют ошибки. В этой же таблице приводятся значения $p_i(n)$, полученные в предположении о независимости событий A , т. е. рассчитанные по формуле

$$(17) \quad p_i(n) = C_n^i p^i(A) [1 - P(A)]^{n-i},$$

где $P(A) = v_k(t)$. В качестве $v_k(t)$ использованы экспериментальные значения $\bar{v}_k(t)$.

Для сравнения в табл. 1 приведены значения $p_i(n)$, определенные в предположении, что распределение ошибок в канале связи описывается биномиальным распределением, что соответствует двоичному симметричному каналу без памяти (ДСК).

В этой же таблице приведены значения $\bar{p}_i(n)$, полученные экспериментальным путем. Исследования на основе критерия согласия Матусита показывают, что при уровне значимости, равном 10%, распределения, задаваемые формулами (14) и (9), не противоречат экспериментальным данным. В то же время использование формулы (17), т. е. гипотезы о независимости распределения ошибок в смежных кодовых словах, приводит к выводу о ее противоречии эксперименту.

В заключение рассмотрим определение некоторых характеристик одного простейшего метода повышения достоверности. Этот метод заключается в многократном повторении информации, закодированной обнаруживающим ошибкой кодом. В качестве кода используется циклический (52, 45)-код с образующим полиномом $(x^6 + x^5 + 1)(x + 1)$.

В табл. 2 приведено распределение на n числа принятых кодовых слов, полученное как расчетным путем по формуле (14) при $k=0$, так и из эксперимента ($\bar{p}_i(n)$) при работе по тропосферному каналу связи. Для сравнения приводятся и результаты расчета по формуле (17).

Для этого же метода повышения достоверности можно получить аналитическое выражение для распределения $p_i(n)$ н.о. числа кодовых слов, которые содержат не обнаруженные при декодировании ошибки. Для $n=6$ эксперимент и расчет при $i=0$ дали 0,99957 и 0,99963, а при $i=1$ дали 0,00043 и 0,00037, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Б. Е., Александров А. М. Об одном методе исследования потоков ошибок в каналах связи. Проблемы передачи информации, 1968, 4, 4, 79—83.
2. Аксенов Б. Е., Александров А. М. О потоках со случайными параметрами и их применений для исследования ошибок в каналах связи. Тр. семинара по кибернетике, 6. Кишинев, Изд-во АН МолдССР, 1968, 3—23.
3. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.
4. Беляев Ю. К. Случайные потоки и теория восстановления. В кн. Кокс Д., Смит В. «Теория восстановления». М., «Сов. радио», 1967, 237—288.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2. М., «Мир», 1967.
6. Аксенов Б. Е., Воронин Е. А. Обобщенный экспоненциальный закон распределения и статистика ошибок в каналах связи. Электросвязь, 1968, 6, 74—75.

Поступила в редакцию
9 декабря 1970 г.
После переработки
7 августа 1972 г.