

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

**Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
им. проф. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА»**

С. С. Владимиров

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ТЕОРИИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОГО
КОДИРОВАНИЯ**

Курс лекций

СПб ГУТ)))

**Санкт-Петербург
2014**

4. Модели каналов передачи данных

Точное математическое описание любого реального канала передачи данных обычно весьма сложное [9]. Вместо этого используют упрощенные математические модели, которые позволяют выявить важнейшие закономерности реального канала.

В физическом канале сигнал $S(t)$ подвергается воздействию шума $n(t)$ [21]. Схема этого явления показана на рисунке 4.1.

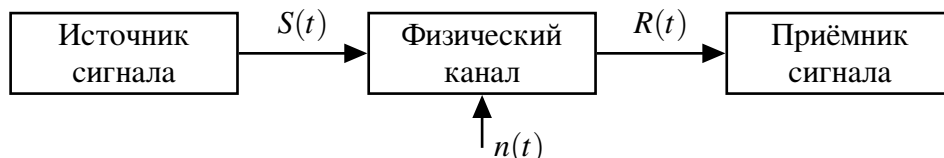


Рис. 4.1. Структурная схема физического канала в общем виде

Для количественной оценки степени влияния шума $n(t)$ на сигнал $S(t)$ обычно используют отношение сигнал-шум (SNR), определяемое как отношение мощности сигнала к мощности шума. Часто данное отношение выражается в децибелах.

Выделяют два основных вида моделей каналов передачи данных. Непрерывные (аналоговые) каналы и дискретные (цифровые) каналы.

Непрерывные каналы имеют непрерывный сигнал $S(t)$ на входе и непрерывный сигнал $R(t)$ на выходе, которые являются непрерывной функцией от времени.

Дискретные каналы имеют на входе дискретные кодовые символы x_j , а на выходе — дискретные кодовые символы y_i , в общем случае не совпадающие с x_i [22].

Почти во всех реальных линиях связи дискретный канал содержит внутри себя непрерывный канал, на вход которого подаются сигналы $S(t)$, а с выхода снимаются искаженные помехами сигналы $R(t)$ [22]. Свойства этого непрерывного канала наряду с характеристиками модулятора и демодулятора однозначно определяют все параметры дискретного канала. Поэтому иногда дискретный канал называют дискретным отображением непрерывного канала. Однако при математическом исследовании дискретного канала обычно отвлекаются от непрерывного канала и действующих в нем помех и определяют дискретный канал через алфавит источника $\{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$, вероятности появления символов алфавита, скорость передачи символов, алфавит получателя $\{y_0, y_1, \dots, y_{Q-1}\}$ и значения переходных вероятностей $P(y_i|x_j)$, где $i = 0, 1, \dots, Q$, $j = 0, 1, \dots, q$ [22, 9].

Переходные вероятности $P(y_i|x_j)$ являются вероятностями того, что при отправке в канал символа x_j на выходе будет получен символ y_i .

Если переходные вероятности для каждой пары i, j остаются постоянными и не зависят от того, какие символы передавались и принимались ранее, то дискретный канал называется постоянным или однородным. Иногда применяют также другие названия: канал без памяти или канал с независимыми ошибками. Если же вероятности перехода зависят от времени или от имевших место ранее переходов, то канал называют неоднородным или каналом с памятью [22].

Также выделяют дискретно-непрерывные каналы, которые имеют дискретный вход и непрерывный выход.

В данной работе использованы следующие модели каналов:

1. Двоичный симметричный канал.
2. Канал Гилберта-Эллиотта.
3. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом.

Рассмотрим эти модели каналов подробнее.

4.1. Двоичный симметричный канал

Модель двоичного симметричного канала⁴ (ДСК) является самой простой моделью дискретного канала [21]. Модель ДСК соответствует случаю использования двоичной модуляции в канале с аддитивным шумом (в котором выходной сигнал $R(t)$ равен сумме входного сигнала $S(t)$ и шума $n(t)$) и жёсткого решения демодулятора. Таким образом, модель ДСК является дискретной двоичной моделью передачи информации по каналу с абсолютно белым гауссовским шумом, описанному в разделе 4.3 [2]. Граф, описывающий модель ДСК представлен на рисунке 4.2.

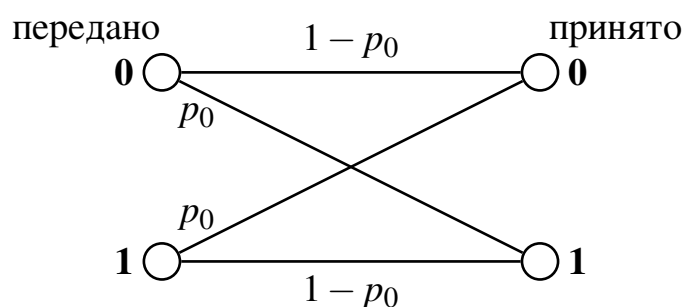


Рис. 4.2. Модель двоичного симметричного канала

Входом и выходом данного канала являются наборы $X = \{0, 1\}$ и $Y = \{0, 1\}$ из двух возможных двоичных символов. Также, ДСК характеризуется набором переходных вероятностей $P(Y|X)$, определяющих вероятность приёма из канала символа Y при передаче символа X . Переходные вероятности

⁴В зарубежной и переводной литературе используется англоязычное наименование Binary Symmetric Channel (BSC).

для ДСК задаются выражениями (24) [2, 23].

$$\begin{aligned} P(0|0) &= P(1|1) = 1 - p_0; \\ P(0|1) &= P(1|0) = p_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где p_0 — вероятность битовой ошибки в канале.

Для случая использования двух противоположных сигналов $s_0(t) = -s_1(t)$ вероятность битовой ошибки p_0 связана с отношением сигнал-шум выражением (25) [21].

$$p_0 = Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right), \quad (25)$$

где $Q(x)$ — функция, определяемая по формуле:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (26)$$

Переходные вероятности в канале ДСК не зависят от того, какие символы передавались и принимались ранее, и следовательно канал ДСК является каналом без памяти [9].

Канал ДСК является частным случаем дискретного канала без памяти (ДКБП) [21]. Канал ДКБП имеет на входе набор $\{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ из q символов, а на выходе — набор $\{y_0, y_1, \dots, y_{Q-1}\}$ из Q символов, и характеризуется набором из $q \cdot Q$ переходных вероятностей $P(y_i|x_j)$, где $i = 0, 1, \dots, Q$, $j = 0, 1, \dots, q$. Эти переходные вероятности постоянны во времени, и переходы различных символов независимы.

4.2. Канал Гилберта-Эллиотта

Канал Гилберта-Эллиотта⁵ (GEC) относится к дискретным каналам с памятью, в которых состояние канала зависит от предыдущего состояния [24, 25]. Эта модель предложена в 1963 году Эллиоттом [26] и является общим случаем модели Гилберта, представленной в 1960 году [27].

Канал GEC представляет из себя цепь Маркова первого порядка с двумя состояниями — «хорошим» и «плохим». Схема модели представлена на рисунке 4.3.

Каждое из состояний канала можно описать как канал ДСК с соответствующей вероятностью ошибки [24, 28]. В «хорошем» состоянии вероятность битовой ошибки в канале равна p_G , в «плохом» состоянии — p_B . В любой момент времени канал может перейти из одного состояния в другое.

⁵В зарубежной и переводной литературе используется англоязычное наименование Gilbert-Elliott Channel (GEC).

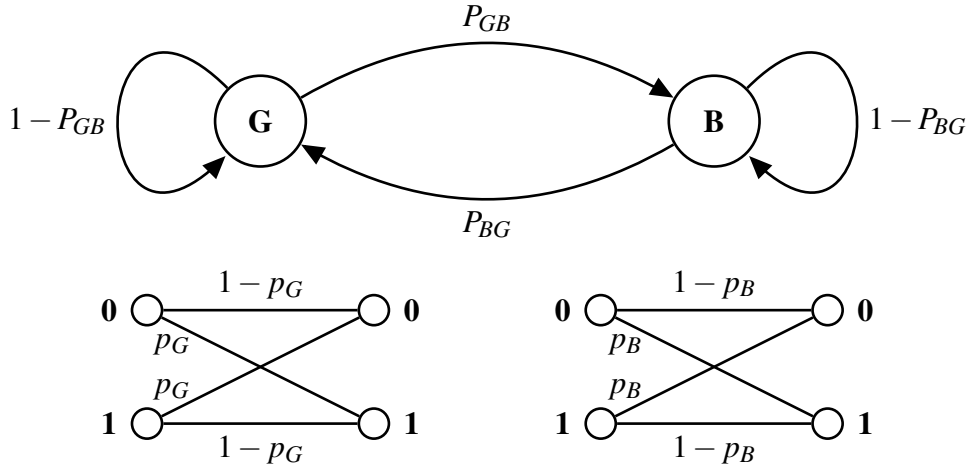


Рис. 4.3. Канал Гилберта-Эллиотта

При этом вероятности перехода могут быть отличны друг от друга. Вероятность перехода из «хорошего» состояния в «плохое» обозначим как P_{GB} , а вероятность перехода из «плохого» состояния в «хорошее» обозначим как P_{BG} , что отображено на рисунке 4.3. Соответствующая этим вероятностям матрица переходов A показана в формуле (27) [24].

$$A = \begin{pmatrix} 1 - P_{GB} & P_{GB} \\ P_{BG} & 1 - P_{BG} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Из рис. 4.3 следует, что финальные вероятности пребывания канала в состояниях **G** и **B** будут определяться выражениями [25]:

$$\pi_G = \frac{P_{BG}}{P_{GB} + P_{BG}}, \quad \pi_B = \frac{P_{GB}}{P_{GB} + P_{BG}}. \quad (28)$$

Из формул (28) следует, что средняя вероятность битовой ошибки в канале может быть вычислена по формуле (29).

$$p_e = p_G \cdot \pi_G + p_B \cdot \pi_B. \quad (29)$$

Вероятность того, что в блоке длиной n возникнет m ошибок рассчитывается по формуле (30):

$$P(m, n) = \pi_G \cdot G(m, n) + \pi_B \cdot B(m, n), \quad (30)$$

где $G(m, n)$ — вероятность появления m ошибок в блоке длиной n , при условии, что канал во время передачи первого бита находился в состоянии **G**;

$B(m, n)$ — вероятность появления m ошибок в блоке длиной n , при условии, что канал во время передачи первого бита находился в состоянии **B**.

Для расчёта этих вероятностей Эллиоттом были введены рекуррентные соотношения (31), описывающие процесс возникновения ошибок в канале, учитывая, что канал с каждым поступившим новым разрядом может оставаться в прежнем состоянии или переходить в другое [26].

$$\begin{aligned} G(m, n) = & G(m, n-1) \cdot (1 - P_{GB}) \cdot (1 - p_G) + \\ & + B(m, n-1) \cdot P_{BG} \cdot (1 - p_G) + \\ & + G(m-1, n-1) \cdot (1 - P_{GB}) \cdot p_G + \\ & + B(m-1, n-1) \cdot P_{BG} \cdot p_G, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} B(m, n) = & G(m, n-1) \cdot P_{GB} \cdot (1 - p_B) + \\ & + B(m, n-1) \cdot (1 - P_{BG}) \cdot (1 - p_B) + \\ & + G(m-1, n-1) \cdot P_{GB} \cdot p_B + \\ & + B(m-1, n-1) \cdot (1 - P_{BG}) \cdot p_B. \end{aligned}$$

В формулах (32) приведены очевидные начальные значения вероятностей (31) при $n = 1$ [26].

$$\begin{aligned} G(0, 1) &= (1 - p_G), & B(0, 1) &= (1 - p_B), \\ G(1, 1) &= p_G, & B(1, 1) &= p_B. \end{aligned} \quad (32)$$

Также необходимо учитывать, что:

$$G(m, n) = B(m, n) = 0, \quad \text{при } m < 0 \text{ или } m > n.$$

Канал GEC широко используется для описания источников ошибок в системах передачи данных, а также при анализе эффективности алгоритмов декодирования помехоустойчивых кодов [25].

Часто при использовании модели GEC для двоичного канала полагают, что вероятность $p_B = 0.5$, т. е. «плохое» состояние рассматривается как полный обрыв связи [9]. Это согласуется с представлением о канале, в котором действуют коммутативные помехи.

4.3. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом

Канал с аддитивным белым гауссовским шумом⁶ (АБГШ) получается из канала ДКПБ при бесконечном уровне квантования выхода детектора

⁶В зарубежной и переводной литературе используется англоязычное наименование Additive white Gaussian noise (AWGN).

($Q = \infty$) [21]. В этом случае шум является гауссовской случайной величиной с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot E_b/N_0}.$$

Таким образом, канал АБГШ характеризуется дискретным входом $X = \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$, непрерывным выходом $Y = \{-\infty, +\infty\}$ и переходными вероятностями:

$$P(y|x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x_j)^2}{2\sigma^2}}, \quad j = 0, 1, \dots, q-1. \quad (33)$$

Для канала АБГШ зависимость вероятности ошибки p_0 от отношения сигнал-шум E_b/N_0 определяется в соответствии с выражением (25).

Модель канала АБГШ широко применяется при расчёте и моделировании многих систем радиосвязи, особенно при моделировании каналов спутниковой и дальней космической связи [29]. Это в определённой степени послужило причиной выбора данной модели канала для исследования алгоритмов декодирования кодов Рида-Соломона, которые также широко используются в системах космической связи [30, 31, 32].