Computação Aplicada à Problemas Diretos e Inversos em Geodésia e Geofísica

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta

marotta@unb.br

Observatório Sismológico

Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

PARTE 2

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Linearização

Até agora, lidamos com o **problema linear**, **explícito** e **direto**, dado por

$$\boldsymbol{Gm} = \boldsymbol{d}$$

No caso de **problema não linear**, há de se **realizar a linearização**, geralmente utilizando os **dois primeiros termos** da **expansão da série de Taylor**, resultando na seguinte forma:

$$d_i = g_i(\boldsymbol{m}) \approx g_i(\boldsymbol{m}_0) + \sum_{j=1}^{M} \left[\left. \frac{\partial g_i(\boldsymbol{m})}{\partial m_j} \right|_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0} . \Delta \boldsymbol{m}_j \right]$$

$$\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{G} \Delta \boldsymbol{m}$$

$$\Delta \boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} - \widehat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}_0)$$

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problema não linear

Passos

0 – Definir modelo funcional

$$d_1 = 2m_1^3$$

1 – Definir valores para o **vetor dos parâmetros aproximados**

$$\boldsymbol{m}_0$$

2 – Definir a **matriz das derivadas parciais**

$$\boldsymbol{G} = \left.\frac{\partial g_i(\boldsymbol{m})}{\partial m_j}\right|_{\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_0}$$

3 – Definir o **vetor dos valores aproximados**

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = [g_i(\boldsymbol{m}_0)]$$

4 – Definir o **vetor das diferenças**

$$\Delta\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} - \widehat{\boldsymbol{d}}$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Problema não linear

5 – Definir o **vetor das correções**

$$\Delta\boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{c} \quad \text{ou} \quad \Delta\boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{G}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{c}$$

6 – Definir o **vetor dos parâmetros ajustados**

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{0}} + \Delta\boldsymbol{m}$$

7 – Definir o **vetor dos resíduos**

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} - [g_i(\boldsymbol{m}_1)]$$

8 – Adotar $\boldsymbol{m}_{\mathbf{0}} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}$ e **repetir** os passos (realizar iteração) de **1 a 7 até que** $\Delta\boldsymbol{m}$ seja suficientemente pequeno, ou seja, quando a **convergência é obtida**.

Obs.: A solução de problemas não lineares são altamente dependentes dos parâmetros iniciais ($\boldsymbol{m}_{\mathbf{0}}$)

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Linear

Modelo:

$$2m_1 = 4$$

1 – Definir valores para o **vetor dos parâmetros aproximados**

$$\boldsymbol{m}_0 = [0]$$

2 – Definir a **matriz das derivadas parciais**

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial(2m_1)}{\partial m_1} = [2]$$

3 – Definir o **vetor dos valores aproximados**

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}_0 = [2][0] = [0]$$

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Linear

4 – Definir o **vetor das diferenças**

$$\Delta\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} - \widehat{\boldsymbol{d}} = [\mathbf{4}] - [\mathbf{0}] = [\mathbf{4}]$$

5 – Definir o **vetor das correções**

$$\Delta\boldsymbol{m} = \left(\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{G}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{G}^{\boldsymbol{T}}\Delta\boldsymbol{c} = [2]$$

6 – Definir o **vetor dos parâmetros ajustados**

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{0}} + \Delta\boldsymbol{m} = [\mathbf{0}] + [\mathbf{2}] = [\mathbf{2}]$$

7 – Definir o **vetor dos resíduos**

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{m}_1) = 4 - [2][2] = [0]$$

8 - Como $\boldsymbol{e} = [\mathbf{0}]$, considera-se que $\boldsymbol{m}$ convergiu com apelas uma iteração

Problemas dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Modelo Não Linear

Modelo:

$$2m^3 = 16$$

Adotar: $\boldsymbol{m}_0 = [1]$