## Teoria da Inversão

Prof. Giuliano Sant'Anna Marotta marotta@unb.br Observatório Sismológico Instituto de Geociências - Universidade de Brasília

# PARTE 1

## Introdução

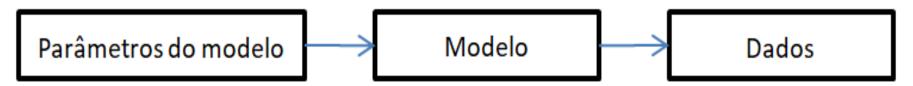
#### Teoria da inversão

Pode ser definida como a arte de estimar parâmetros de modelos a partir de dados conhecidos (observações). Portanto, requer a definição de modelo capaz de, por meio dos parâmetros conhecidos, prever os dados de interesse.

Além da estimativa de parâmetros, a teoria da inversão também pode ser usada para estimar a "qualidade" dos parâmetros do modelo previsto, uma vez conhecidas as incertezas dos dados conhecidos.

#### **Definições Básicas**

Problema direto: O processo (matemático) de predição de dados com base em algum modelo físico ou matemático por meio de um determinado conjunto de parâmetros do modelo.

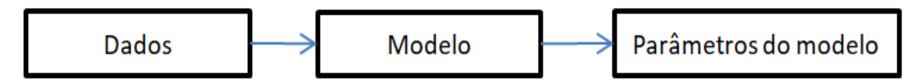


Exemplo: O tempo de percurso t de uma onda sísmica que passa por M camadas de espessura  $h_i$  e velocidade  $v_i$  é dado por:

$$t = \sum_{i=1}^{M} \frac{h_i}{v_i}$$

#### **Definições Básicas**

Problema inverso: O processo (matemático) de estimar os valores numéricos, e incertezas associadas, de um conjunto de parâmetros presentes um modelo definido, baseado em um conjunto de dados ou observações.



Exemplo: pode-se inverter o tempo de percurso t e determinar as velocidades das camadas. Neste caso seria necessário conhecer o modelo (matemático) que relaciona o tempo de percurso às informações de espessura e velocidades das camadas.

$$t = \sum_{i=1}^{M} \frac{h_i}{v_i}$$

#### **Definições Básicas**

Dados: São as observações, ou medições, feitas na tentativa de restringir a solução de algum problema de interesse.

Modelo: A relação entre os parâmetros e os dados.

Parâmetros: As quantidades numéricas, ou desconhecidas, que se deseja estimar.

**Exemplo**: t é um tipo de dado; somente  $v_i$  são consideradas **parâmetros do modelo**; e **pode-se** simplificar o problema e tratá-lo em termos de **vagarosidade**  $s_i$ , onde:

$$s_i = \frac{1}{v_i} | t = \sum_{i=1}^M h_i \cdot s_i$$

Modelos lineares e não lineares podem resultar em diferentes estimativas de velocidade se os dados contiverem algum ruído.

#### **Nomenclaturas**

Vetores: letras minúsculas em negrito

Matrizes: letras maiúsculas em negrito

Para os dados, tem-se:  $\boldsymbol{d} = [d_1, d_2, d_3, ..., d_N]^T$ 

Para os **parâmetros** do modelo, tem-se:  $\boldsymbol{m} = [m_1, m_2, m_3, ..., d_M]^T$ 

Em um modelo explícito, tem-se: d = Gm

d é N-dimensional, m é M-dimensional e G, algumas vezes chamada de núcleo, possui dimensão N x M e, no caso de modelo linear, contém apenas coeficientes constantes.

#### **Nomenclaturas**

Exemplo de um modelo explícito linear (Problema Direto):

$$d_1 = 2m_1 + 0m_2 - 4m_3 d_2 = m_1 + 2m_2 + 3m_3$$
 ou 
$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

E por simplificação, tem-se:

$$d = Gm$$

Onde:

$$\mathbf{d} = [d_1, d_2]^T$$
  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T$   $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 

#### **Problema inverso**

Ao assumir o problema direto, conforme já exposto, tem-se:

$$d = Gm$$

A inversão do problema, direto para estimativa dos parâmetros do modelo, pode ser dada por:

$$m = G^{-1} d$$

Um problema comum, que depende de grande esforço, aparece quando  $G^{-1}$  não existe no sentido matemático. Ou seja, quando não satisfaz a seguinte relação:

$$GG^{-1}=G^{-1}G=I$$

onde I é a matriz identidade

#### Método de inversão

Dois vetores mais comuns: **Vetor de erro de dados**, ou de desajuste; e vetor de parâmetros do modelo.

Os métodos baseados no vetor de erro de dados dão origem a soluções clássicas de mínimos quadrados. Já os métodos baseados no vetor de parâmetros do modelo dão origem ao que é conhecido como soluções de comprimento mínimo, ou norma mínima.

Melhorias sobre soluções de mínimos quadrados e comprimento mínimo incluem o uso de informações sobre ruído nos dados e informações a priori sobre os parâmetros do modelo, e são conhecidas como soluções de mínimos quadrados ponderados ou comprimento mínimo ponderado, respectivamente.

## Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

#### Vetores de erro de dados

Os vetores de erro de dados e são essenciais no desenvolvimento de problemas inversos pelo MMQ. Eles são dados por:

$$e = d^{calc} - d^{obs}$$

A dimensão do vetor de erro e é  $N \times 1$ .

A aplicação do MMQ se baseia na aceitação do melhor estimador de m considerando que:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = min$$
 ou  $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{e} = min$ 

## Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Considerando a presença de erro nas observações, tem-se:

$$Gm = d + e$$
  
 $e = Gm - d$ 

De acordo com as **premissas do MMQ**, tem-se:

$$e^T e = min$$

Então

$$e^T e = (Gm - d)^T (Gm - d) = min$$

Considerando as derivadas parciais de  $e^T e$  em relação a m, e definindo-as como zero, tem-se:

$$\frac{d(\mathbf{e}^T \mathbf{e})}{d\mathbf{m}} = 2\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{0} | \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{m} - \mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

## Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Esta última expressão representa o conjunto de *M* equações de observação e *M* incógnitas.

Quando  $G^TG$  (MxM) é não singular, a solução única é dada por:  $m = (G^TG)^{-1}G^Td$ 

Em um caso mais geral, considerando os pesos dos dados observados, tem-se:

$$e^T W e = min$$
  $W = \sigma_0^2 (\sum d)^{-1}$ 

Onde  $\sigma_0^2$  é um valor de variância a priori e  $\sum d$  a matriz covariância dos valores observados.

E, por solução análoga à anterior, tem-se:

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{G})^{-1} \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{d} \; ; \sigma_{pos}^2 = \frac{e^T e}{N-M} ; \sum \boldsymbol{m} = \sigma_{pos}^2 (\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{G})^{-1}$$

Vimos que a solução de mínimos quadrados para d=Gm é dada por:

$$m = [G^TG]^{-1}G^Td$$
 ou  $m = (G^TWG)^{-1}G^TWd$ 

Um problema é que a solução não existe quando  $G^TG$  não tem inversão matemática.

Matematicamente, podemos dizer que o  $G^TG$  tem um inverso, e é único, quando  $G^TG$  tem posto igual a M.

Essencialmente, se  $G^TG$  tiver o posto igual a M, ele terá informações suficientes para resolver M coisas (neste caso, parâmetros do modelo).

Isso acontece quando todas as M linhas (ou equivalentemente, desde que  $G^TG$  seja quadrado) são independentes.

 $G^TG$  terá posto < M se o número de observações N for menor que M.

Se  $[G^TG]^{-1}$  não existe, um número infinito de estimativas irá se ajustar aos dados igualmente bem. Matematicamente,  $G^TG$  tem posto < M se  $|G^TG| = 0$ , onde  $|G^TG|$  é o determinante do  $G^TG$ .

#### Quando M < N

Com mais observações do que incógnitas, normalmente não é possível ajustar todos os dados exatamente. O problema dos mínimos quadrados se enquadra nessa categoria. Considere o seguinte exemplo:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

Se a solução existe, este caso é denominado sobredeterminado.

# **Exemplo**

#### Quando M < N

$$1m_1 + 0m_2 = 1$$
  
 $5m_1 - 1m_2 = 2$   
 $-3m_1 + 1m_2 = 1$ 

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{G} = \frac{\partial F(m)}{\partial m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$d = Gm$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$m = (G^T G)^{-1} G^T d$$
  $e = Gm - d$ 

#### Quando M < N

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$W = I$$

$$W = \sigma_0^2 (\sum d)^{-1} \qquad m = (G^T W G)^{-1} G^T W d \qquad e = Gm - d$$

$$\sigma_{pos}^2 = \frac{e^T W e}{N - M}$$
  $\sigma_m^2 = \sigma_{pos}^2 (G^T W G)^{-1}$ 

#### Quando M < N

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$\sum d = \begin{bmatrix} 0,01^2 & 0 & 0\\ 0 & 0,02^2 & 0\\ 0 & 0 & 0,01^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 = 1$$

$$W = \sigma_0^2 (\sum d)^{-1} \qquad m = (G^T W G)^{-1} G^T W d \qquad e = (Gm - d)$$
$$\sigma_{pos}^2 = \frac{e^T W e}{N - M} \qquad \sigma_m^2 = \sigma_{pos}^2 (G^T W G)^{-1}$$