Exercice 2 :

1] $E\left[e^{-\lambda \sum_i B_i}\right] = E\left[e^{-\lambda B_1}\right]^n$ par indépendance

$= \left(e^{-\lambda} p + (1-p)\right)$ par hypothèse

$\leq e^{np(e^{-\lambda}-1)}$ par $1+a \leq e^{a}$.

On obtient que

$$E\left[e^{\lambda(np - \sum_i B_i) - np\eta\lambda}\right] \leq e^{np\left[\underbrace{\lambda(1-\eta) + e^{-\lambda} - 1}_{\leq -\eta^2/2}\right]}$$ pour $\lambda = -\log(1-\eta)$

On a donc l'inégalité demandée.

2] Posons $\eta = (\sqrt{np})^{-1} \times t$ avec $t \in (0, \sqrt{np})$

De cette façon $\eta \in (0,1)$. On obtient que

$\forall t < \sqrt{np}$ $\exists \lambda \left(= -\log\left(1 - \frac{t}{\sqrt{np}}\right)\right)$, tq

$$E\left[e^{\lambda\left[(np - \sum_i B_i) - t\sqrt{np}\right]}\right] \leq e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

3] $\mathbb{P}\left(\{np - \sum B_i - t\sqrt{np} > 0\}\right) \leq e^{-t^2/2}$

Notons que cela est valide pour tout t car si $t \geq \sqrt{np}$ alors $t\sqrt{np} - np \geq 0$ et la proba plus haute vaut 0. Donc l'inégalité est vraie pour tout $t > 0$ ..

On peut ensuite prendre $t = \sqrt{2\log(1/\delta)}$ et conclure que, avec proba $1-\delta$:

$$-\sum B_i \leq t\sqrt{np} - np.$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} B_i \geq np\left(1 - \sqrt{\frac{2\log(1/\delta)}{np}}\right).$$