Exo 3 - EXAM - 25

1] $\mathbb{1}_A(Z^*)$ a pour valeur 0 ou 1. C'est une Bernoulli. Conditionnellement à $Z_1 \dots Z_n$, on a

$$E^* \mathbb{1}_A(Z^*) = E^* \mathbb{1}_A(Z_{\sigma^*}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_A(Z_i) := P_n(A).$$

C'est donc une Bernoulli de paramètre $P_n(A)$.

2]
$$E^*[Z_A^*] = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{1}_A(X_i) - E^*\mathbb{1}_A(Z^*)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{1}_A(X_i) - P_n(A)\right)$$
$$= nP_n(A) - nP_n(A) = 0.$$

Comme les $\mathbb{1}_A(Z_i^*)$ sont iid Bernoulli $P_n(A)$ on a :

$$\mathrm{Var}^*(Z_A^*) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}^*(\mathbb{1}_A(Z_i^*)) = n\,\mathrm{Var}^*(\mathbb{1}_A(Z^*))$$
$$= n\,P_n(A)(1-P_n(A)).$$

Pour finir cette question :

$$\sup_A Z_A^* \geq Z_A^*$$
$$E^* \sup_A Z_A^* \geq E^* Z_A^* = 0.$$

3] σ^* a pour loi $\mathcal{U}(1 \dots n)$.

Pour chaque i, on peut compter le nombre de $(\sigma_j^*)_{j=1\dots n}$ égaux à i

On définit :

$$W_i^* = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{i=\sigma_j^*} \quad . \text{ On a } \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i=\sigma_j^*} = 1$$

$$\sum_j \mathbb{1}_A(Z_j^*) = \sum_j \mathbb{1}_A(Z_j^*)\left(\sum_i^n \mathbb{1}_{i=\sigma_j^*}\right)$$
$$= \sum_{i,j} \mathbb{1}_A(Z_j^*)\mathbb{1}_{i=\sigma_j^*}$$
$$= \sum_{i,j} \mathbb{1}_A(Z_i)\mathbb{1}_{i=\sigma_j^*} = \sum_i W_i^* \mathbb{1}_A(Z_i).$$

Soit $\mathcal{V} = \{(v_1 \dots v_n) \in [0,1]^n : v = (\mathbb{1}_A(Z_1) \dots \mathbb{1}_A(Z_n))$ pour $A \in \mathcal{A}\}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. On a :

$$Z_A^* = \sum_{i=1}^{n}(1-W_i^*)\mathbb{1}_A(Z_i) = \sum_{i=1}^{n}(1-W_i^*)v_i \leq \max_{v\in\mathcal{V}} \sum_i (1-W_i^*)v_i.$$

On a bien $\mathcal{V}$ de cardinal fini car $|\mathcal{V}| \leq 2^n$.

4] Par le même raisonnement que précédemment, on a :

$$\sup_{A\in\mathcal{A}_t} \lambda_A\left(Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)}\right)$$
$$\leq \max_{v\in\mathcal{V}_t} \lambda_v\left(Z_v^* - t\sqrt{\textstyle\sum_i v_i}\right).$$

avec
$$\begin{cases} Z_v^* = \sum(1-W_i^*)v_i = \sum(v_i - v_{\sigma_i^*}). \\ \lambda_v = -\log\left(1 - \frac{t}{\sqrt{\sum v_i}}\right). \\ \mathcal{V}_t = \{v \in [0,1]^n : v = (\mathbb{1}_A(Z_1) \dots \mathbb{1}_A(Z_n)) \; A \in \mathcal{A}_t\}. \end{cases}$$

(en appliquant la question précédente).

Ainsi :

$$E^*\left[\exp\left(\sup_{A\in\mathcal{A}_t}\{(Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)})\lambda_A\}\right)\right]$$
$$\leq \sum_{v\in\mathcal{V}_t} E^*\left[\exp\left(\lambda_v\left(Z_v^* - t\sqrt{\textstyle\sum_i v_i}\right)\right)\right].$$

Comme $Z_v^* = \sum(v_i - v_{\sigma_i^*})$, et que $v_{\sigma_i^*}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\sum v_i}{n}$ (voir question 1)

On peut appliquer Exo 2 - question 2. et obtenir

$$E^* \exp\left(\sup_{A\in\mathcal{A}_t}\{Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)}\}\lambda_A\right) \leq e^{-t^2/2}\left(\sum_{v\in\mathcal{V}_t} 1\right)$$
$$= e^{-t^2/2}\,|\mathcal{V}_t|.$$
$$\leq e^{-t^2/2}\, S_{\mathcal{A}_t}(n).$$

5] Montrons que

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}(\text{——}) > 0 \Rightarrow \sup_{A\in\mathcal{A}_t}(\text{—}) > 0$$

(l'autre sens est évident).

Soit A tq $Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)} > 0$.

si $A \notin \mathcal{A}_t$ alors $nP_n(A) \leq t^2$ ou encore $t\sqrt{nP_n(A)} \geq nP_n(A)$

et donc $-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_A(Z_i^*) > t\sqrt{nP_nA} - nP_n(A) \geq 0$.

<u>qui est impossible</u>.

$\hookrightarrow$ Donc $A \in \mathcal{A}_t$.

Donc $\sup_{A\in\mathcal{A}_t}(\text{—}) > 0$.

On a donc

$$P^*\left(\sup_{A\in\mathcal{A}}(\text{—}) > 0\right) = P^*\left(\sup_{A\in\mathcal{A}_t}\{Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)}\} > 0\right)$$

sur $\mathcal{A}_t$ $\lambda_A > 0$.

$$= P^*\left(\sup_{A\in\mathcal{A}_t} \lambda_A\{Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)}\} > 0\right)$$
$$\leq E^*\left[\exp\left(\sup_{A\in\mathcal{A}_t}\lambda_A\left(Z_A^* - t\sqrt{nP_n(A)}\right)\right)\right]$$
$$\leq S_{\mathcal{A}_t}(n)\exp(-t^2/2) \quad \text{D'après question précédente.}$$
$$\leq S_{\mathcal{A}}(n)\exp(-t^2/2)$$

6] En prenant $t = \sqrt{2\log(S_{\mathcal{A}}(n)/\delta)}$, on obtient

$$P^*\left(\sup_{A\in\mathcal{A}}\left(Z_A^* - \sqrt{2nP_n(A)\log(S_{\mathcal{A}}(n)/\delta)}\right)\right) \leq \delta.$$

En prenant l'espérance $\mathbb{E}$. On a que <u>avec</u> proba $1-\delta$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

$$\boxed{Z_A^* \leq \sqrt{2n\,P_n(A)\log(S_{\mathcal{A}}(n)/\delta)}}$$