Exercice 1 :

1] $\hat{F}$ n'est pas approprié ici car $E\hat{F}(t) = \int_{]-\infty,t]} g(u)\,du$ car les Z_i sont selon g et pas selon f.

D'après le Cours : On a (notons $\mathbb{1}_t = \mathbb{1}_{]-\infty,t]}$)

$$E_n \sup_t |\hat{F}(t) - E\hat{F}(t)| \leq E E' \left[\sup_t \left|\sum_i (\mathbb{1}_t(Z_i) - \mathbb{1}_t(Z_i'))\right|\right]$$

$$= E E' E_\eta \left[\sup_t \left|\sum_i \eta_i (\mathbb{1}_t(Z_i) - \mathbb{1}_t(Z_i'))\right|\right]$$

$$\leq 2 E E_\eta \sup_t \left|\sum_i \eta_i \mathbb{1}_t(Z_i)\right|$$

Mais $\eta \mathbb{1}_t(Z)$ est ss$\mathcal{G}$ de facteur 1 donc, en notant $V = \{(\mathbb{1}_t(Z_1) - \mathbb{1}_t(Z_n)) : t \in \mathbb{R}^d\}$;

$$\leq 2 E\left[\sqrt{2n^{-1}\log(2|V|)}\right],$$

Mais comme $\max_{Z_1 \cdots Z_n} |V| \leq (n+1)^d$, on peut conclure.

Resultat du cours.

2] $E\hat{F}_W = E\mathbb{1}_{Z\leq t} = \int_{z\leq t} f(z)/g(z)\, g(z)\,dz = \int_{]-\infty,t]} f = F(t).$

$f(z) > 0 \Rightarrow g(z) > 0$

$$\operatorname{Var}(\hat{F}_W(t)) = n^{-1} \operatorname{Var}(w \mathbb{1}_{Z\leq t})$$

$$\leq n^{-1} E w^2 \mathbb{1}_{Z\leq t}$$

$$= n^{-1} \int \frac{f^2}{g} \mathbb{1}_{]-\infty,t]}$$

$$\leq n^{-1} c \int f \mathbb{1} = n^{-1} c F(t)$$

3] $R_A^W = \sum \eta_i w_i \mathbb{1}_{Z_i \leq t}$

est une somme de v.a. ss Gaussienne $\eta_i w_i \mathbb{1}_{Z_i\leq t}$ de facteur $w^2 \mathbb{1}_{Z_i\leq t}$.

(η est ss Gaussienne de facteur 1)

Donc R_A^W est ss Gaussienne de facteur $\sum_{i=1}^n w_i^2 \mathbb{1}_{Z_i\leq t}$

$\leq C^2 \sum \mathbb{1}_{Z_i\leq t}$

$= C^2 n$

4] En suivant la preuve du Glivenko Cantelli de la question 1 :

$$E \sup_t |\hat{F}_W(t) - F(t)| \leq 2\sqrt{2n^{-1}C^2 \log(2(n+1)^d)}$$

Ainsi C grand implique une dégradation de la borne.

L'approche de Dudley fait apparaître dans les bornes

$$\sigma^2 = \sup_t E[w^2 \mathbb{1}_{Z\leq t}] \leq E[w^2] = \int f^2/g \, d\lambda \leq C$$

On a donc un facteur $Ew^2 \leq C$ à la place de C^2

C'est donc préférable.