Prueba de oposición

Área de Ciencia de Datos

Pedro Ortiz

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

09 de octubre de 2023

Introducción

- Ejercicio de **Introducción a la Investigación Operativa y Optimización**
- Mapa de la materia
  - Modelado y complejidad
  - Simplex
  - Dualidad y Branch and Bound
  -
  -
  -
- Tema del ejercicio: **Dualidad**

Contexto

- Ejercicio expuesto en una clase dedicada a **Dualidad**
- Modalidad mixta de exposición y taller

Contexto

- Ejercicio expuesto en una clase dedicada a **Dualidad**
- Modalidad mixta de exposición y taller
- En clases previas los alumnos ejercitaron
  - Modelado de problemas utilizando **Programación Lineal**
  - Resolución de ejercicios utilizando **Simplex**
  - Planteo del problema **Dual** a partir de un problema Primal

Contexto

- Ejercicio expuesto en una clase dedicada a **Dualidad**
- Modalidad mixta de exposición y taller
- En clases previas los alumnos ejercitaron
  - Modelado de problemas utilizando **Programación Lineal**
  - Resolución de ejercicios utilizando **Simplex**
  - Planteo del problema **Dual** a partir de un problema Primal
- Al momento de presentación del ejercicio:
  - Fueron presentados teoremas relacionando el problema Primal con el problema Dual, las cotas que marcan para sus **funciones objetivo**, y la correspondencia entre **soluciones factibles y óptimas** de ambos.
  - Los alumnos realizaron ejercicios sencillos del planteo del problema Dual a partir del Primal

Objetivos

Se busca que los alumnos:

- **relacionen** conceptos claves de la materia como problema primal y dual, solución factible y solución óptima
- **apliquen** los teoremas aprendidos y estudiados en la parte teórica de la materia
- **ejerciten** las formulaciones de los problemas, y el pasaje entre problemas primales y duales

Enunciado

Para el siguiente modelo, decidir si x^* es una solución óptima utilizando el problema dual.

$$\begin{aligned} & x^* = (0, 0, 8, 3) \\ \text{max:} \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \textit{sa:} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -2 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 5 \\ & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasaje al Dual

Recordemos como es el pasaje al problema dual :

Primal	Dual
Objetivo: Maximizar	Objetivo: Minimizar
i-ésima restricción $\leq$	i-ésima variable ≥ 0
i-ésima restricción $\geq$	i-ésima variable ≤ 0
i-ésima restricción $=$	i-ésima variable libre
j-ésima variable ≥ 0	j-ésima restricción $\geq$
j-ésima variable ≤ 0	j-ésima restricción $\leq$
j-ésima variable libre	j-ésima restricción $=$

Teorema de Holgura Complementaria

Sean $x_1^*, \ldots, x_n^*$ una solución factible del primal y $y_1^*, \ldots, y_m^*$ una solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea de x^* e y^*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0 \text{ (o ambas)} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0 \text{ (o ambas)} \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Teorema de Holgura Complementaria, versión 2

Una solución factible $x_1^*, \ldots, x_n^*$ del primal es óptima si y solo si existen números $y_1^*, \ldots, y_m^*$ tal que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ cuando } x_j^* > 0, \\ y_i^* = 0 \text{ cuando } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \end{cases}$$

y tal que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j & \forall j = 1, \ldots, n, \\ y_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Teorema Fundamental de Dualidad

Si el problema primal tiene solución óptima $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$, entonces su dual tiene solución óptima $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Enseñanzas y observaciones

- Con el ejercicio mostrado se logró:
  - consolidar la formulación del problema Dual
  - poner en practica el Teorema de Holgura Complementaria
  - utilizar el Teorema Fundamental de Dualidad para comprobar nuestra solución
- Se deja como ejercicio decidir si x^* es una solución óptima utilizando el problema dual, en el siguiente caso:

$$
\begin{aligned}
& x^* = (0, 2, 0, 7, 0) \\
\max \quad & 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1 \\
& x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1 \\
& 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Eso es todo

Muchas gracias por su atención

¿Preguntas?