

# Prueba de Oposición

## Área de Ciencia de Datos

Pedro Ortiz

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

09 de octubre de 2023

# Introducción

- Ejercicio de **Introducción a la Investigación Operativa y Optimización**.
- Mapa de la materia:
  - Modelado y complejidad
  - Simplex
  - Dualidad y Branch and Bound
  - Grafos
  - Optimización no lineal
- Tema del ejercicio: **Dualidad**.

# Contexto

- Al momento de presentación del ejercicio:
  - Fueron presentados teoremas relacionando el problema Primal con el problema Dual, las cotas que marcan para sus **funciones objetivo**, y la correspondencia entre **soluciones factibles y óptimas** de ambos.
  - Los alumnos realizaron ejercicios sencillos del planteo del problema Dual a partir del Primal.

# Contexto

- Al momento de presentación del ejercicio:
  - Fueron presentados teoremas relacionando el problema Primal con el problema Dual, las cotas que marcan para sus **funciones objetivo**, y la correspondencia entre **soluciones factibles y óptimas** de ambos.
  - Los alumnos realizaron ejercicios sencillos del planteo del problema Dual a partir del Primal.
- Se busca que los estudiantes:
  - **relacionen** conceptos claves de la materia como problema primal y dual, solución factible y solución óptima.
  - **apliquen** los teoremas aprendidos y estudiados en la parte teórica de la materia.
  - **ejerciten** las formulaciones de los problemas, y el pasaje entre problemas primales y duales.

# Enunciado

Para el siguiente modelo, decidir si  $x^*$  es una solución óptima utilizando el problema dual.

$$x^* = (0, 0, 8, 3)$$

$$\text{max:} \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4$$

$$\text{sa:} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq -2$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 5$$

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

# Pasaje al Dual

Recordemos como es el pasaje al problema dual :

Primal	Dual
Objetivo: Maximizar	Objetivo: Minimizar
$i$ -ésima restricción $\leq$	$i$ -ésima variable $\geq 0$
$i$ -ésima restricción $\geq$	$i$ -ésima variable $\leq 0$
$i$ -ésima restricción $=$	$i$ -ésima variable libre
$j$ -ésima variable $\geq 0$	$j$ -ésima restricción $\geq$
$j$ -ésima variable $\leq 0$	$j$ -ésima restricción $\leq$
$j$ -ésima variable libre	$j$ -ésima restricción $=$

# Teorema de Holgura Complementaria

Sean  $x_1^*, \dots, x_n^*$  una solución factible del primal y  $y_1^*, \dots, y_m^*$  una solución factible del dual. Las siguientes son condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea de  $x^*$  e  $y^*$ :

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0 \text{ (o ambas)} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0 \text{ (o ambas)} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

## Teorema de Holgura Complementaria, versión 2

Una solución factible  $x_1^*, \dots, x_n^*$  del primal es óptima si y sólo si existen números  $y_1^*, \dots, y_m^*$  tal que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \text{ cuando } x_j^* > 0, \\ y_i^* = 0 \text{ cuando } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i \end{cases}$$

y tal que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j & \forall j = 1, \dots, n, \\ y_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$



# Teorema Fundamental de Dualidad

Si el problema primal tiene solución óptima  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ , entonces su dual tiene solución óptima  $(y_1^*, \dots, y_m^*)$  tal que:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

## Enseñanzas y observaciones

- Con el ejercicio mostrado se logró:
  - consolidar la formulación del problema Dual
  - poner en práctica el Teorema de Holgura Complementaria
  - utilizar el Teorema Fundamental de Dualidad para comprobar nuestra solución
- Se deja como ejercicio decidir si  $x^*$  es una solución óptima utilizando el problema dual, en el siguiente caso:

$$x^* = (0, 2, 0, 7, 0)$$

$$\max \quad 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5$$

$$\text{s.a.} \quad 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$$

$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1$$

$$5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

# Eso es todo

Muchas gracias por su atención.

¿Preguntas?