

Modelli di pattern in corteccia visiva

Andrea Favilli

9 settembre 2021

Numerosi esempi di trame (*patterns*) in specie animali devono la loro formazione a processi che coinvolgono le cellule nervose. Il caso delle macchie sui gusci di alcune specie di molluschi, sulle pellicce di mammiferi; l'origine delle impronte digitali umane, al contrario, pare essere di altra natura.

Nel presente documento ci concentreremo su una ristretta gamma dei suddetti casi di pattern neuroindotti: siamo interessati al contesto della vista e di relativi processi che coinvolgono l'area della corteccia cerebrale ad essa deputata, area denominata *corteccia visiva*.

Traendo spunto dal testo di Murray, capitolo 12 di [1], per prima cosa andiamo a mostrare i principali metodi di analisi della stabilità alle condizioni di equilibrio su un modello di attivazione/inibizione neuronale. Tale modello monodimensionale ha fini prettamente didattici: senza riferirsi ad alcuna situazione reale in particolare, ha tuttavia lo scopo di presentare molti dei ragionamenti che riguarderanno casi successivi, opportunamente semplificati dando al lettore una progressiva comprensione metodica.

Ci sposteremo poi sulla descrizione ed analisi di una prima situazione concreta: connessioni sinaptiche in corteccia visiva relative a segnali dall'occhio destro hanno aree di prevalenza che si distinguono in pattern rispetto alle aree a dominanza sinistra. Analizzeremo un modello bidimensionale che consente di asserire tale fatto.

Un'ulteriore digressione è dedicata all'individuazione di una mappa, quasi-logaritmica consentendo il termine, volta ad associare quanto proiettato sulla retina alla corrispettiva immagine elaborata in corteccia visiva.

Ampio spazio infine ad un ulteriore modello bidimensionale relativo alle allucinazioni: l'assunzione di droghe o particolari patologie inducono la corteccia all'elaborazione di pattern visivi indipendenti dalle informazioni provenienti dalla retina. Come conseguenza dell'analisi di stabilità sarà possibile ricostruire tali pattern, a partire dalla combinazione lineare di soluzioni note del modello linearizzato.

Scopo del documento è di affiancare alla comprensione teorica immagini prodotte da sperimentazioni in MATLAB: per una maggiore chiarezza tali immagini vengono portate di pari passo con la trattazione principale, rimandando relative spiegazioni ad una sezione finale dedicata. L'intero codice è reperibile su GitHub al link <https://github.com/poseidon92/VisualNeuralPatterns>, in modo da consentire al lettore di giocare con le variazioni dei parametri.

1 Un semplice modello di attivazione/inibizione neuronale

Ci occorrono le più semplici nozioni riguardo le cellule nervose: ciascun neurone ha svariati prolungamenti (*assoni*) i quali culminano in rami terminali (*dendriti*) interconnettenti la cellula ad altre mediante le *sinapsi*. In funzione del tempo, lo stato del neurone può essere quiescente o attivo anche in relazione allo stato di attività degli altri neuroni con i quali esiste un legame sinaptico.

Durante l'intera trattazione effettuiamo un'ulteriore semplificazione guardando il tutto con occhio macroscopico: non ci preoccupiamo delle specifiche connessioni da un punto di vista discreto ma stabiliremo significatività ai fini dell'influenza eccitatoria o inibitoria sul singolo neurone solo in base alla distanza dallo stesso. Tale approccio prettamente metrico consente di stabilire una corrispondenza biunivoca tra cellule nervose e punti $x \in \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}^2$ nei modelli delle sezioni successive).

$n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione **tasso di attivazione** ed è tale che a valori $n(x, t) \in [0, 1]$ il neurone in posizione x al tempo t è in stato quiescente, se invece $n(x, t) \in [1, +\infty)$ il neurone risulta attivo.

Assumiamo in prima istanza che la variazione del tasso di attivazione di un neurone al tempo t dipenda dal tasso del neurone stesso in tale istante e da nessun'altra cellula: otteniamo come primo modello un sistema dinamico ad incognita n

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = f(n(x, t)), \quad (1)$$

scelta un'opportuna funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0) = f(1) = 0$, tipicamente polinomiale. Tale richiesta su f rende equilibri la condizione di quiete globale $n(t, x) \equiv 0$ e l'attivazione $n(t, x) \equiv 1$; la natura in termini di stabilità dipende dalla specifica f e può essere facilmente dedotta con uno studio del segno. Riportiamo due esempi tipici.

Esempio 1.

$$f(n) := rn(1 - n) \quad (2)$$

con $r > 0$. Chiaramente gli equilibri sono tutti e soli i due citati sopra: $f(n) > 0$ negli intervalli $(0, \delta)$, dunque $\partial_t n > 0$ se $n \rightarrow 0^+$ ovvero l'equilibrio $n(t, x) \equiv 0$ è instabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $f(n) > 0$ in ogni $(1 - \delta, 1)$ e $f(n) < 0$ in $(1, 1 + \delta)$: $\partial_t n > 0$ se $n \rightarrow 1^-$ e $\partial_t n < 0$ qualora $n \rightarrow 1^+$ assicurano stabilità all'equilibrio $n(t, x) \equiv 1$.

Esempio 2.

$$f(n) := rn(n - n_c)(1 - n) \quad (3)$$

con $r > 0$ e $n_c \in (0, 1)$. Ai soliti equilibri si aggiunge lo stato $n(t, x) \equiv n_c$: $\partial_t n = f(n) < 0$ se $n \rightarrow 0^+$, pertanto $n(t, x) \equiv 0$ è ora equilibrio stabile; $\partial_t n = f(n) < 0$ se $n \rightarrow n_c^-$, $\partial_t n = f(n) > 0$ se $n \rightarrow n_c^+$ quindi $n(t, x) \equiv n_c$ è equilibrio instabile; infine $\partial_t n = f(n) > 0$ se $n \rightarrow 1^-$, $\partial_t n = f(n) < 0$ se $n \rightarrow 1^+$ implicano la stabilità di $n(t, x) \equiv 1$.

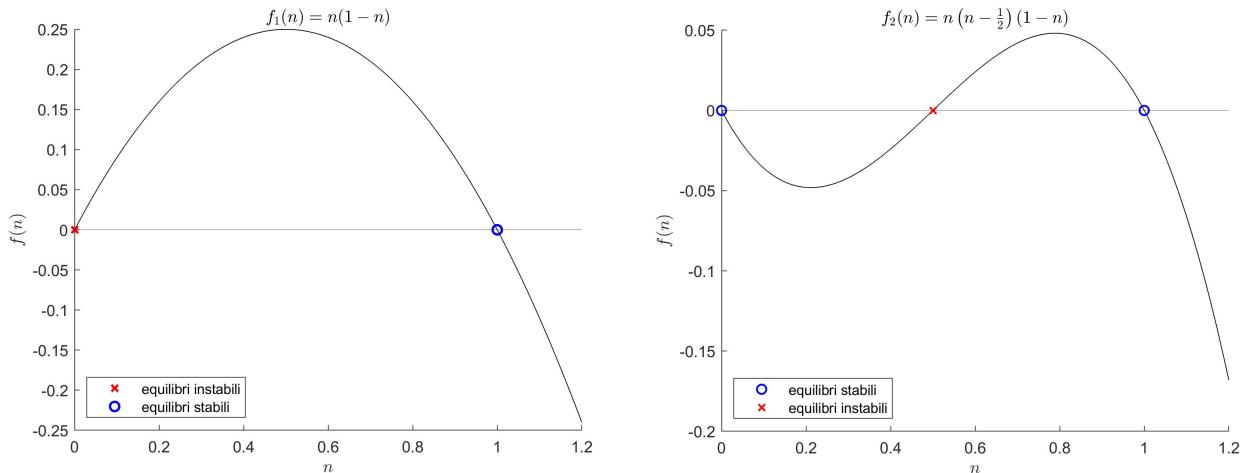


Figura 1: i grafici delle funzioni (2), (3). r è fissato ad 1 in ambo i casi; $n_c = \frac{1}{2}$ nella seconda immagine.

A questo punto aggiungiamo parti al modello: vogliamo, come anticipato, considerare l'influenza eccitatoria/inibitoria dei neuroni vicini secondo criteri metrici che andremo a mostrare.

- Ci aspettiamo che l'influenza dei neuroni sullo stato di attività degli altri vada a scemare man mano che questi si allontanano.
- Lo stato attivo dei neuroni immediatamente vicini ha influenza eccitatoria sul neurone preso in esame, oltre una certa soglia di distanza lo stato attivo assume influenza inibitoria.
- La situazione è opposta in caso di stato quiescente: neuroni in quiete vicini hanno influenza inibitoria e oltre la medesima soglia metrica l'influenza è al contrario eccitatoria.

I tre principi enunciati sopra vengono implementati aggiungendo una componente integrale all'equazione (1). Viene scelto un nucleo di convoluzione $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a simmetria pari e tale che $w(x) \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$. L'operatore $*$ di convoluzione altro non è che un modo per effettuare una somma integrale di tutte le possibili influenze su \mathbb{R} , somma pesata dal nucleo w che è funzione della distanza rispetto al neurone oggetto. Nell'integranda dovremo traslare il valore del tasso di attivazione n di 1: in questo modo a neuroni attivi corrisponderanno contributi positivi e a neuroni quiescenti contributi negativi.

Ricordiamo che, vista la parità di w , abbiamo $w \circ |.| = w$ e il modulo può pertanto essere omesso dalla scrittura del modello.

Una versione di (1) che considera l'interazione con gli altri neuroni è quindi fornita dall'equazione (4):

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = f(n) + \int_{\mathbb{R}} w(x - y)(n(y, t) - 1)dy = f(n) + [w * (n - 1)](x, t). \quad (4)$$

Tale formulazione integrale è alla base dei modelli che saranno successivamente illustrati.

Per adesso non sveliamo espressioni analitiche di w anticipando soltanto che una scelta tipica è l'opportuna combinazione lineare di funzioni a campana e^{-bx^2} : l'argomento è affrontato nel dettaglio in sede di analisi della stabilità, basti solo sapere che il nucleo è scelto in modo da soddisfare i tre principi di attivazione/inibizione sopra esposti.

Ultima questione da trattare prima di parlare di equilibri. La (4) da sola non assicura la non-negatività delle soluzioni, ricordiamo invece che il tasso di attivazione è per definizione positivo o al più nullo.

Proposizione 1.1. *Se $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è scelto in modo da soddisfare la condizione integrale:*

$$\int_{\mathbb{R}} w(x-y) dy < 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $n(x, t) \geq 0$, n soluzione di (4).

Dimostrazione. Basta far vedere che $\partial_t n > 0$ per valori piccoli della funzione $n(x, t)$: se $n \rightarrow 0$, $f(n) \rightarrow 0$ per le richieste fatte su f , $(n(y, t) - 1) \rightarrow -1$ quindi

$$[w * (n-1)](x, t) \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} w(x-y) dy$$

e la (4) consente di asserire quanto volevamo

$$\frac{\partial n}{\partial t} \sim - \int_{\mathbb{R}} w(x-y) dy > 0.$$

□

1.1 Analisi lineare di stabilità

In questo paragrafo andiamo ad illustrare le tecniche di indagine della stabilità degli equilibri trascurando, come compromesso, l'apporto di termini di ordine superiore al primo nell'equazione differenziale: per tale ragione parleremo di equilibri stabili/instabili linearmente.

Scegliamo di lavorare sul (4) prendendo in esame il caso $n_e(x, t) \equiv 1$: sostituendo nell'equazione, $f(n_e) = 0$ e $w * (n_e - 1) = 0$ essendo nullo il fattore $n_e - 1$ della funzione integranda, dunque $n_e(x, t) \equiv 1$ è effettivamente un equilibrio.

Anzitutto eliminiamo i termini dell'equazione (4) di ordine superiore al primo riducendo la suddetta ad una forma

$$\mathcal{L}u = 0, \quad (5)$$

dove \mathcal{L} è un operatore differenziale lineare ed $u(x, t) := (n - n_e)(x, t) = n(x, t) - 1$. Cercheremo soluzioni a (5) come sovrapposizione di forme d'onda (**modi**) lungo la coordinata spaziale x , valutando la stabilità o meno in base al comportamento delle suddette $u(x, t)$ per $t \rightarrow +\infty$.

Procediamo con la linearizzazione: vista la linearità dell'operatore di convoluzione l'unico termine da modificare in (4) è $f(n)$. Effettuiamo quindi uno sviluppo di Taylor centrato in $n = 1$:

$$f(n) = \underbrace{f(1)}_{=0} + f'(1)(n-1) + o((n-1)) = - \underbrace{|f'(1)|(n-1)}_{=:a} + o((n-1)),$$

il secondo passaggio è dovuto al fatto che si può assumere $f'(1) < 0$, così come negli esempi (2) e (3) forniti per la scelta di f .

Eseguiamo dunque la sostituzione:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = \underbrace{-a(n(x, t) - 1)}_{\sim f(n)} + [w * (n-1)](x, t) = -au(x, t) + (w * u)(x, t),$$

osservando che $\partial_t u = \partial_t n$ deduciamo facilmente la forma (5) per (4) voluta

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -au(x, t) + \int_{\mathbb{R}} w(x-y)u(y, t) dy = -au(x, t) + (w * u)(x, t). \quad (6)$$

Forniremo dopo una forma integrale della soluzione di (6), somma sui possibili modi al variare della lunghezza d'onda: ci concentriamo adesso sul singolo contributo cercando soluzioni $u(x, t)$ a variabili separate proporzionali ad $e^{\lambda t + ikx}$; $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Analizziamo meglio quest'ultima scrittura: $e^{\lambda t}$ modula in ragione temporale l'**altezza**, sarà il segno di $\Re(\lambda)$ a determinarne la crescita o la decrescita, dunque la stabilità del modo.

Lunghezza d'onda, o frequenza che dir si voglia, non variano invece con t e sono informazioni che risiedono nel fattore e^{ikx} ; k è il **numero d'onda**, cioè la quantità di oscillazioni nell'unità di lunghezza.

Ebbene, ricaveremo $\lambda = \lambda(k)$ (**relazione di dispersione**) imponendo che $u(x, t) = e^{\lambda t + ikx}$ risolva (6) (porre 1 la costante di proporzionalità non inficia il calcolo); il k -modo sarà stabile se $\Re(\lambda(k)) < 0$, instabile se $\Re(\lambda(k)) > 0$ ($t \rightarrow +\infty \Rightarrow |u(x, t)| \sim e^{\Re(\lambda)t}$ e $\Re(\lambda) < 0 \Rightarrow e^{\Re(\lambda)t} \rightarrow 0$, $\Re(\lambda) > 0 \Rightarrow e^{\Re(\lambda)t} \rightarrow +\infty$).

Calcoliamo ora esplicitamente la dispersione $\lambda(k)$. Sostituendo $u(t, x) := e^{\lambda t + ikx}$ in (6) si ottiene

$$\underbrace{\lambda e^{\lambda t + ikx}}_{u_t(x, t)} = -a \underbrace{e^{\lambda t + ikx}}_{u(x, t)} + \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y) \underbrace{e^{\lambda t + iky}}_{u(y, t)} dy,$$

moltiplico l'integrandi per $1 = e^{ikx} e^{-ikx}$,

$$\lambda e^{\lambda t + ikx} = -ae^{\lambda t + ikx} + e^{\lambda t + ikx} \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y) e^{-ik(x-y)} dy,$$

a questo punto cancello da ambo i membri il fattore $e^{\lambda t + ikx}$ ed effettuo sotto integrale il cambio di variabili $x' := x - y$ ($dx' = -dy$ e si scambiano i segni degli estremi di integrazione)

$$\lambda = -a - \int_{\infty}^{-\infty} w(x') e^{-ikx'} dx',$$

ed abbiamo infine ricavato

$$\lambda(k) = W(k) - a := \int_{-\infty}^{\infty} w(x') e^{-ikx'} dx' - a. \quad (7)$$

La $W(k)$ altro non è che la trasformata di Fourier della funzione $w(x)$: il lettore converrà con le notazioni $W(k) := \widehat{w(x)}$, assumendo per tutta la trattazione la convenzione della variabile x per denotare lo spazio di partenza e k per lo spazio di arrivo di Fourier.

Forniamo ora una forma integrale alla soluzione di (6): senza focalizzarsi troppo su questioni di convergenza, cercheremo una $u \in L_x^1(\mathbb{R})$ ($w \in L^1(\mathbb{R})$ per come verrà scelto) in modo da utilizzarne liberamente trasformata e relative formule. Assumeremo inoltre di conoscere $\widehat{u}_0(k) := \widehat{u(., 0)}(k)$, trasformata di Fourier della condizione iniziale.

A partire da (6), mappiamo entrambi i membri mediante la trasformata di Fourier (si ricorda che $\widehat{(u_t)} = \widehat{u}_t$ con argomenti di derivazione sotto il segno di integrale):

$$\widehat{u}_t(k, t) = -a\widehat{u}(k, t) + \widehat{w * u}(k, t).$$

Alla luce delle condizioni di sommabilità imposte sulle funzioni w, u è possibile ricorrere alla regola di convoluzione sotto trasformata ($\widehat{w * u} = \widehat{w}\widehat{u}$):

$$\widehat{u}_t(k, t) = -a\widehat{u}(k, t) + \widehat{w}(k)\widehat{u}(k, t),$$

impiegando la notazione $W(k) := \widehat{w(x)}$ e raccogliendo a fattor comune \widehat{u} ,

$$\widehat{u}_t(k, t) = \widehat{u}(k, t)(W(k) - a) = \lambda(k)\widehat{u}(k, t).$$

Fissando ora il generico $k \in \mathbb{R}$ e sfruttando la nota condizione iniziale u_0 troviamo \widehat{u} risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(t) = \lambda\widehat{u}(t) \\ \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0 \end{cases}$$

la cui soluzione è nota essere $\widehat{u}(t) = e^{\lambda t}\widehat{u}_0$.

Inserendo nuovamente il parametro k abbiamo esplicitato \widehat{u} :

$$\widehat{u}(k, t) = e^{\lambda(k)t}\widehat{u}_0(k).$$

$u(x, t)$ può essere dedotta passando all'antitrasformata \mathcal{F}^{-1} ($u \in L_x^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\hat{u} = 2\pi u$)

$$2\pi u(x, t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_0(k) e^{\lambda(k)t} e^{ikx} dk}_{\mathcal{F}^{-1}\widehat{u}_0 e^{\lambda t}},$$

ovvero

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_0(k) e^{\lambda(k)t + ikx} dk. \quad (8)$$

$u(x, t)$ non è altro che una somma integrale lungo i possibili numeri d'onda, pesata rispetto alla trasformata di Fourier della condizione iniziale $\widehat{u}_0(k)$.

1.1.1 Scelta del nucleo $w(x)$ e diagramma di biforcazione

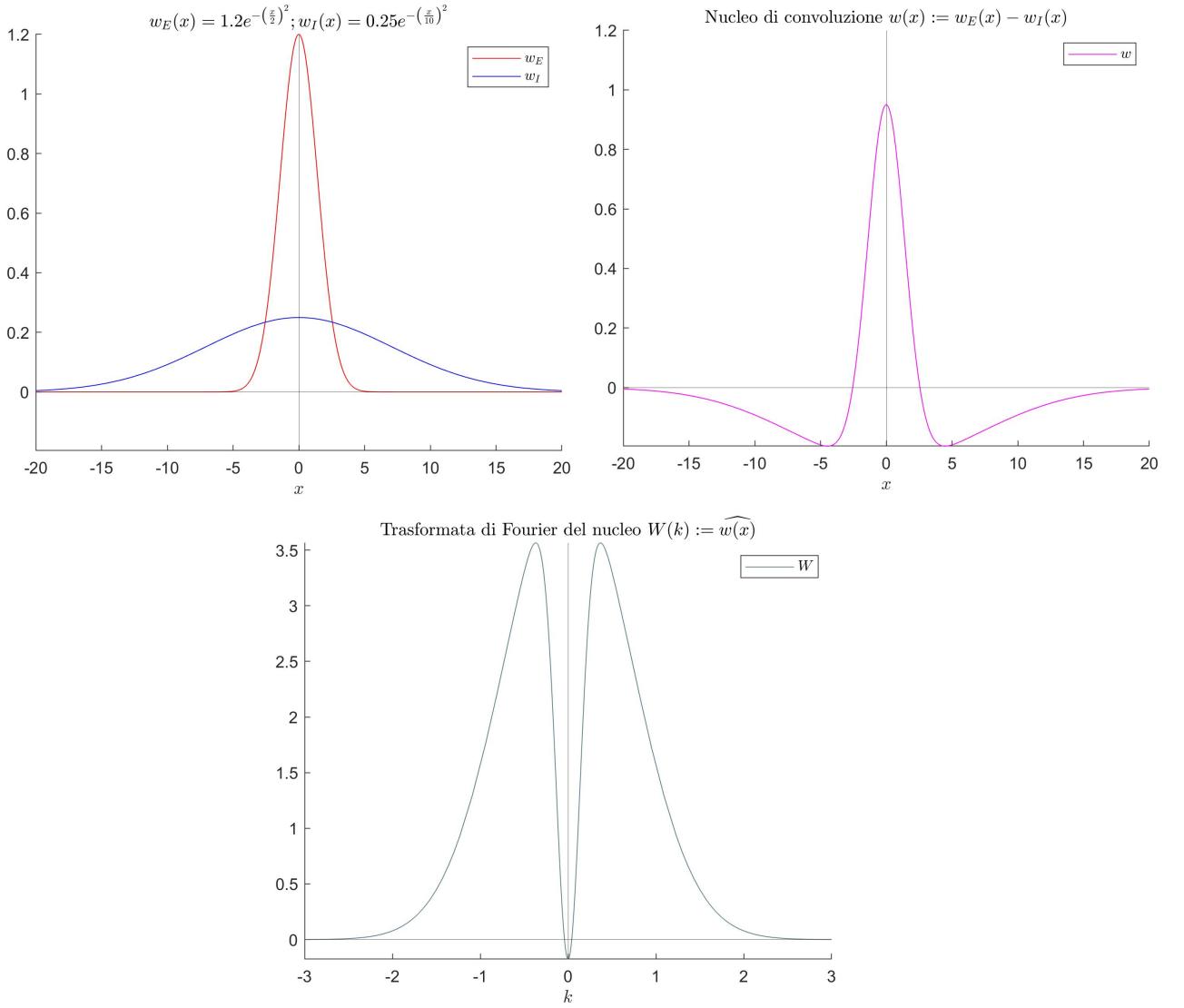


Figura 2: Una scelta valida delle componenti eccitatoria w_E , inibitoria w_I . Il risultante nucleo è $w := w_E - w_I$: è riportata anche la relativa trasformata di Fourier W .

Prima di esaminare la stabilità dei modi è necessario dare un'espressione esplicita per il nucleo w : le regole di influenza dichiarate vengono assicurate scrivendo w come differenza tra componente eccitatoria w_E ed inibitoria w_I , entrambe come già anticipato di forma e^{-bx^2} .

Avendo $g(x) = e^{-bx^2}$ è risaputo che $\widehat{g}(k) = (\frac{\pi}{b}) e^{-\frac{k^2}{4b}}$, di conseguenza scegliendo $b_1 > b_2$, $d_1 < d_2$

$$w(x) = w_E(x) - w_I(x) = b_1 e^{-\frac{x^2}{d_1}} - b_2 e^{-\frac{x^2}{d_2}} \quad (9)$$

ha trasformata di Fourier

$$W(k) = \sqrt{\pi} \left[b_1 d_1 e^{-\frac{(d_1 k)^2}{4}} - b_2 d_2 e^{-\frac{(d_2 k)^2}{4}} \right] \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Poniamo un'ulteriore condizione sui parametri b_1, b_2, d_1, d_2 il cui motivo sarà chiaro dopo: richiedendo la negatività di $W(0)$ si ottiene

$$b_1 d_1 - b_2 d_2 < 0. \quad (11)$$

Ai fini dei nostri studi di stabilità siamo interessati al grafico della funzione $W(k)$ sul dominio $k \geq 0$ vista la simmetria: abbiamo un unico punto di massimo locale k_c che possiamo ricercare imponendo le usuali condizioni $W'(k_c) = 0$ e $W''(k_c) < 0$, ottenendo

$$k_c = \left\{ \frac{4}{(d_2^2 - d_1^2)} \ln \left[\frac{b_2}{b_1} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

l'effettiva positività dell'argomento di radice è assicurata da $\frac{d_2}{d_1} > 1$, $\frac{b_2 d_2}{b_1 d_1} > 1$.

La stabilità è decisa dalla relazione di dispersione $\lambda(k) = W(k) - a$, ricordando che $a = |f'(0)|$ è un parametro del modello il cui settaggio inficia sulla natura dell'equilibrio $n_e(x, t) \equiv 1$.

Quello che andremo a costruire è un cosiddetto **diagramma di biforcazione**, ossia la visualizzazione del grafico di $W(k) - a$ per valori chiave del parametro a , individuando il **valore di biforcazione** $a = a_c$ che separa il caso n_e stabile ($a > a_c$) da quello instabile ($0 \leq a \leq a_c$).

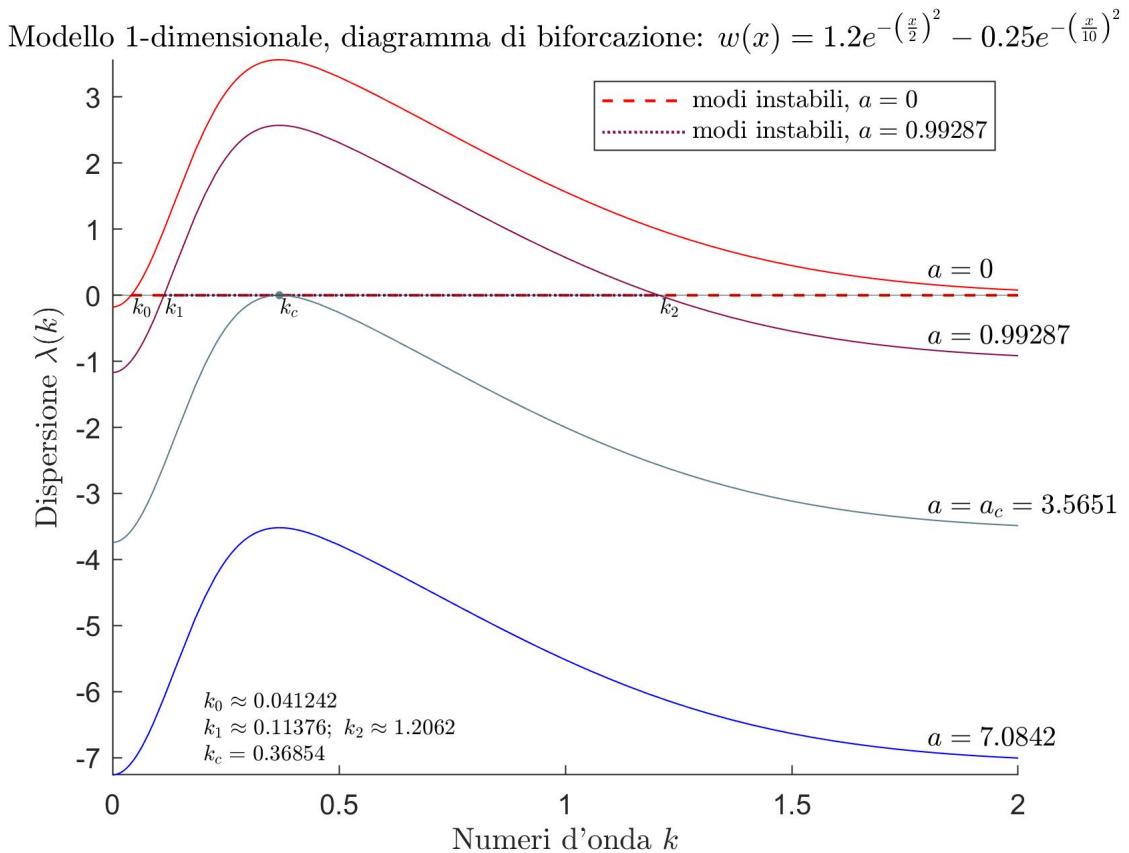


Figura 3: Grafici di $W(k) - a$: sono plottati i casi $a = 0, a_c$, valori di $a \in (0, a_c), (a_c, +\infty)$ generati casualmente.

Distinguiamo le casistiche: per $a = 0$ abbiamo $\lambda(k) = W(k)$, dunque la massima dispersione è raggiunta al massimo locale $W(k_c)$ e $\lambda(k) \geq 0$ per tutti i modi $k \in [k_0, +\infty)$. In questo caso l'insieme dei modi instabili è superiormente illimitato, perturbazioni spaziali come forme d'onda a frequenze oltre la soglia k_0 divergono temporalmente: il modo che mostra la massima velocità di crescita in ragione del tempo è quello a numero d'onda k_c .

Per $a \in (0, a_c)$ invece soltanto un intervallo $[k_1, k_2]$ di modi ha un comportamento di divergenza temporale, per $k \notin [k_1, k_2]$ avremo $e^{\lambda(k)t+ikx} \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ e conseguentemente solo i modi dell'intervallo contribuiscono al comportamento asintotico della soluzione

$$u(x, t) \sim \int_{k_1}^{k_2} \widehat{u}_0(k) e^{\lambda(k)t+ikx} dk.$$

In generale dall'andamento delle u deduciamo instabilità dell'equilibrio, a meno di scegliere opportunamente la condizione iniziale u_0 in modo che $\widehat{u}_0|_{[k_1, k_2]} \equiv 0$.

Il parametro di biforcazione è $a = a_c$, con a_c scelto in modo che il massimo della dispersione $\lambda(k)$ sia 0 (vale a dire $0 = \lambda(k_c) = W(k_c) - a_c \Rightarrow a_c = W(k_c)$). Si tratta del caso limite ove l'unico modo instabile è $k = k_c$: $|u(x, t)| \not\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ qualora $\widehat{u}_0(k_c) \neq 0$.

Se si è scelto $a > a_c$ ricadiamo nella lineare stabilità dell'equilibrio $n_e(x, t)$: ogni modo decade temporalmente come $e^{\lambda t}$ ($\lambda < 0$) e di conseguenza qualsiasi perturbazione spaziale della condizione di equilibrio decade anch'essa per $t \rightarrow +\infty$.

1.2 Calcolo dei momenti

Una grossa limitazione dell'analisi lineare che abbiamo presentato sta proprio nell'approssimazione al primo ordine effettuata: eventuali termini trascurati possono avere effetti stabilizzanti o meno sulla condizione di equilibrio.

Effettuiamo ora uno studio di tipo differente sviluppando il fattore n lungo la coordinata spaziale nell'equazione (4). Riscriviamo dapprima quest'ultima avendo operato la sostituzione $z := y - x$ (per parità $w(x - y) = w(y - x) = w(z)$; $y = x + z$ e $dy = dz$):

$$\partial_t n = f(n) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(z)(n(x+z, t) - 1) dz.$$

Lo sviluppo di Taylor è dunque operato sul termine $n(x+z, t)$ rispetto l'incremento z :

$$n(x+z, t) = n(x, t) + n_x(x, t)z + \frac{z^2}{2}n_{xx}(x, t) + \frac{z^3}{3!}n_{xxx}(x, t) + o(z^3),$$

dunque, sostituendo nell'integrale

$$\begin{aligned} n_t &= f(n) + (n(x, t) - 1) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} w(z) dz}_{=:w_0} + n_x(x, t) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} zw(z) dz}_{=:w_1} + n_{xx}(x, t) \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 w(z) dz}_{=:w_2} + \\ &\quad + n_{xxx}(x, t) \underbrace{\frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 w(z) dz}_{=:w_3} + \dots \end{aligned}$$

Il valore $w_i := \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} z^i w(z) dz$ prende il nome di **momento i -esimo**: vista la disparità delle funzioni $z^{2h+1}w(z)$, $h \in \mathbb{Z}$, e il fatto che sto integrando su un dominio simmetrico avrò che $w_{2h+1} = 0$, ovvero che tutti i momenti di ordine dispari sono nulli.

Alla fine lo sviluppo effettuato a partire da (4) si riduce a:

$$n_t = f(n) + w_0(n(x, t) - 1) + w_2 n_{xx}(x, t) + w_4 n_{xxxx}(x, t) + \dots + w_{2h} \partial_x^{(2h)} n(x, t) + \dots \quad (13)$$

I momenti sono per definizione grandezze intrinseche al nucleo w : sviluppare (13) fino al termine $2h$ tale da avere $|w_{2h}|$ ragionevolmente piccolo e conoscere i segni dei momenti ottenuti consente di capire l'impatto dello specifico nucleo sul comportamento delle soluzioni.

Veniamo ora al calcolo dei momenti relativi a nuclei della forma (9). Sfruttiamo la conoscenza del valore dell'integrale su \mathbb{R} di e^{-bz^2} :

$$I(b) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bz^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

più in generale, come conseguenza della derivazione sotto il segno di integrale avremo

$$I^{(h)}(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^h}{\partial b^m} \left(e^{-bz^2} \right) dz = (-1)^h \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2h} e^{-bz^2} dz = \frac{d^h}{db^h} \sqrt{\frac{\pi}{b}}.$$

Siamo pronti per esprimere il $2h$ -momento a partire dalle derivate $I^{(h)}(.)$:

$$\begin{aligned} w_{2h} &= \frac{1}{(2h)!} \int_{-\infty}^{+\infty} z^{2h} \underbrace{\left(b_1 e^{-\left(\frac{z}{d_1}\right)^2} - b_2 e^{-\left(\frac{z}{d_2}\right)^2} \right)}_{w(z)} dz = \\ &= \frac{1}{(2h)!} \left[b_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2h} e^{-\left(\frac{z}{d_1}\right)^2} dz}_{(-1)^h I^{(h)}\left(\frac{1}{d_1^2}\right)} - b_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z^{2h} e^{-\left(\frac{z}{d_2}\right)^2} dz}_{(-1)^h I^{(h)}\left(\frac{1}{d_2^2}\right)} \right] = \frac{(-1)^h}{(2h)!} \left[b_1 I^{(h)}\left(\frac{1}{d_1^2}\right) - b_2 I^{(h)}\left(\frac{1}{d_2^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Sfruttando l'uguaglianza appena ricavata possiamo esplicitare ad esempio i primi due momenti pari in ragione di b_1, b_2, d_1, d_2 :

$$\begin{cases} w_0 = \sqrt{\pi}(b_1 d_1 - b_2 d_2) \\ w_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(b_1 d_1^3 - b_2 d_2^3) \end{cases}$$

Senza preoccuparci di come leggere tali valori facciamo soltanto vedere che un tale w_0 (assieme alla richiesta sulla trasformata $W(k)$ (11) che assume finalmente uno scopo) consente di asserire la non-negatività delle soluzioni $n(x, t)$ alla luce della Proposizione 1.1.

Avendo, dalla (11), $b_1 d_1 - b_2 d_2 < 0$ anche $w_0 = \sqrt{\pi}(b_1 d_1 - b_2 d_2) < 0$, perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(y-x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(z) dz = w_0 < 0,$$

ed ho verificato le ipotesi di 1.1.

2 Un modello bidimensionale di dominanza oculare

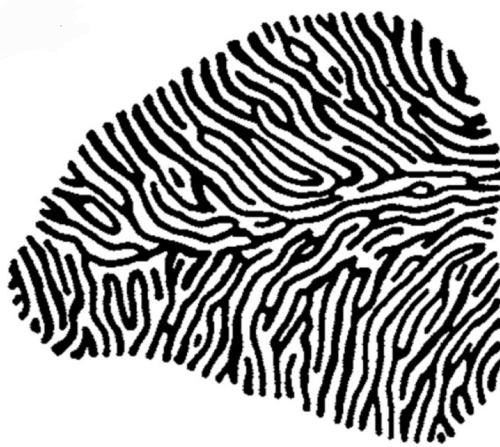


Figura 4: Pattern di dominanza oculare sulla corteccia visiva di un esemplare di macaco.

Ora che abbiamo presentato tutti gli strumenti necessari con il modello didattico di attivazione/inibizione neuronale siamo pronti ad introdurre il primo caso riguardante la funzione visiva.

Diamo prima altre informazioni di neurofisiologia. L'immagine è trasmessa dalle cellule della retina, dapprima mediante il nervo ottico ed infine con l'azione del *corpo genicolato laterale* che funge da ripetitore,

alla corteccia visiva: dedicheremo un paragrafo riguardante la geometria che sta dietro questa fase. I segnali provenienti dai due occhi sono gestiti separatamente, con peculiari percorsi sinaptici che si generano tra i neuroni costituenti la corteccia. Esperimenti effettuati su esemplari di scimmie mostrano che esistono aree corticali (*layer IVc*) la cui risposta al segnale visivo proveniente da un occhio (coprendo opportunamente l'altro) non è uniforme: l'attività sinaptica ha in zone del *layer* netta prevalenza, dunque si sono generati una maggior quantità di percorsi neurali volti alla gestione del segnale relativo al suddetto lato penalizzando l'occhio opposto.

Tali zone di prevalenza destra/sinistra si dispongono lungo particolari *patterns* denominati *strisce di dominanza oculare*: l'apparenza o l'esistenza stessa di tali motivi non risulta tuttavia universale nei mammiferi. Topi e specie americane di scimmie sembrano non presentare il fenomeno; gatti ed esemplari di macaco hanno strisce di dominanza ma zone dove tale prevalenza non è sempre ben chiara.

Forniremo un modello volto a descrivere il fenomeno. Si tratta di un sistema differenziale che segue le stesse regole di attivazione/inibizione del modello monodimensionale ma in un contesto leggermente differente, distinguendo due tipi di neuroni (con differenti funzioni di attività n_R, n_L): neuroni corticali facenti parte di reti che reagiscono all'occhio destro e al sinistro rispettivamente.

Supponiamo di rappresentare il *layer IVc* come un piano \mathbb{R}^2 , $n_R, n_L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ non sono stavolta legate all'attivazione della cellula rappresentando $n_R(\mathbf{x}, t)$ ($n_L(\mathbf{x}, t)$) la densità di connessioni sinaptiche al tempo $t \in \mathbb{R}^+$ nel punto della corteccia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ deputate all'elaborazione dei segnali provenienti dall'occhio destro (sinistro).

Come il lettore avrà intuito, il modello descrive la crescita del *layer* in funzione del tempo: percorsi neurali già delineati e associati ad uno specifico occhio possono avere azione stimolante o inibente la nascita di altre reti, siano esse relative allo stesso occhio o all'altro. Tale influenza è, come ci aspettiamo, implementata da prodotti di convoluzione che stavolta sono molteplici, così come i relativi nuclei.

Concentriamoci per adesso sull'occhio destro, a sinistra avremo procedura analoga. Particolare rilevanza per la variazione di crescita $\partial_t n_R$ delle cellule è determinata dalla **funzione di stimolo**

$$s_R := w_{RR} * n_R + w_{LR} * n_L,$$

alte densità di connessioni destra-correlate vicino ad \mathbf{x} hanno azione stimolante sulla crescita destra-correlata in \mathbf{x} stesso, oltre una certa soglia metrica (nell'ordine di $200\mu\text{m}$ in situazioni pratiche) l'azione è invece di inibizione della crescita, divenendo irrilevante oltre i $600\mu\text{m}$ di distanza da \mathbf{x} .

Risulta chiaro che l'azione dei percorsi sinistra-correlati sulle densità destre in \mathbf{x} sarà speculare: il nucleo w_{RR} può essere scelto come in (9), mentre per w_{LR} i parametri b_1, b_2, d_1, d_2 dovranno essere regolati in modo da avere $w_{LR} < 0$ in un intorno di 0 ampio a sufficienza.

Dobbiamo inoltre chiarire cosa si intenda con $*$ in tale contesto:

$$(w_{RR} * n_R)(\mathbf{x}, t) := \iint_{\mathbb{R}^2} w_{RR}(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||)n_R(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r};$$

$$(w_{LR} * n_L)(\mathbf{x}, t) := \iint_{\mathbb{R}^2} w_{LR}(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||)n_L(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}.$$

Accoppiando con rispettive regole di crescita per n_L siamo pronti per descrivere il modello di dominanza oculare:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R(\mathbf{x}, t))s_R(\mathbf{x}, t) = f(n_R)[w_{RR} * n_R + w_{LR} * n_L] \\ \frac{\partial n_L}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_L(\mathbf{x}, t))s_L(\mathbf{x}, t) = f(n_L)[w_{LL} * n_L + w_{RL} * n_R] \end{cases} \quad (14)$$

Con ragionevoli ipotesi di simmetria porremo $w_a := w_{RR} = w_{LL}$, $w_i := w_{LR} = w_{RL}$ distinguendo un solo nucleo di azione ed uno solo di inibizione, otteniamo dunque:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R)[w_a * n_R + w_i * n_L] \\ \frac{\partial n_L}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_L)[w_a * n_L + w_i * n_R] \end{cases} \quad (15)$$

Il nostro studio procede formulando due richieste su (15) e capendo le relative implicazioni sulle soluzioni.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è presa tale da avere $f(0) = f(N) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(N) < 0$ per un valore $N > 0$, scelta tipica è $f(n) = n(N - n)$. Questa ipotesi consente di rendere equilibri stabili le condizioni $n_R(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $n_L(\mathbf{x}, t) \equiv N$; $n_R(\mathbf{x}, t) \equiv N$, $n_L(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ limitando inoltre a N la massima densità sinaptica possibile per singolo punto visto che se $n_R, n_L \rightarrow N$ avremo $f(n_R), f(n_L) \rightarrow 0$ e conseguentemente $\partial_t n_R, \partial_t n_L \rightarrow 0$.
- Richiedendo $w_a = -w_i$ e il vincolo $n_R(\mathbf{x}, t) + n_L(\mathbf{x}, t) \equiv N$ riusciremo a ridurre il sistema (15) ad una sola equazione nella variabile n_R , potendo poi ricavare $n_L = N - n_R$. Viene inoltre in questo modo generata la nuova condizione di equilibrio instabile $n_R(\mathbf{x}, t) = n_L(\mathbf{x}, t) = \frac{N}{2}$ che, come cercheremo di capire, ha un ruolo chiave nel fenomeno.

2.1 Alcune considerazioni e analisi di stabilità lineare

Facciamo dapprima necessari ragionamenti per concludere poi mostrando l'instabilità del già citato equilibrio $n_R(\mathbf{x}, t) = n_L(\mathbf{x}, t) = \frac{N}{2}$.

Vediamo come le scelte fatte su f rendano equilibrio stabile la condizione $n_R(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $n_L(\mathbf{x}, t) \equiv N$, il caso opposto $n_R(\mathbf{x}, t) \equiv N$, $n_L(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ si prova analogamente per simmetria del problema.

- Globalmente $n_L \gg n_R$ e di conseguenza $w_a * n_R + w_i * n_L < 0$, visto il contributo prettamente negativo del nucleo inibitorio w_i ; altresì $w_a * n_L + w_i * n_R > 0$ perché w_a ha invece peso a maggioranza positivo.
- Nel caso $f(n) = n(N - n)$ ($f'(n) = N - 2n$), effettuiamo lo sviluppo di Taylor centrato in $n_R, n_L = 0$:

$$f(n_R) = f(0) + \underbrace{f'(0)}_{=N} n_R + o(n_R);$$

$$f(n_L) = f(0) + \underbrace{f'(0)}_{=N} n_L + o(n_L);$$

Alla luce di quanto detto, consideriamo valori di n_R vicini a 0, n_L a N . Sostituendo gli sviluppi effettuati in (15) otteniamo la stabilità, infatti:

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} \approx \overbrace{Nn_R}^{>0} \overbrace{(w_a * n_R + w_i * n_L)}^{<0} < 0;$$

$$\frac{\partial n_L}{\partial t} \approx \overbrace{Nn_L}^{>0} \overbrace{(w_a * n_L + w_i * n_R)}^{>0} > 0.$$

Riduciamo ora (15) ad una sola equazione. Derivando $n_R(\mathbf{x}, t) + n_L(\mathbf{x}, t) \equiv N$ otteniamo $\partial_t n_R(\mathbf{x}, t) + \partial_t n_L(\mathbf{x}, t) = 0$, cioè $\partial_t n_R = -\partial_t n_L$ e, insieme all'ipotesi $w_i = -w_a$, una sostituzione nella seconda di (15) consente di ottenere una forma identica alla prima consentendo in questo modo di disaccoppiare.

Abbiamo ora soltanto:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R)[w_a * n_R - w_a * n_L] \\ n_L(\mathbf{x}, t) = N - n_R(\mathbf{x}, t), \end{cases}$$

procediamo sostituendo n_L in ragione di n_R e N nella prima equazione

$$\frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R) \left[w_a * n_R - w_a * (\underbrace{N - n_R}_{n_L}) \right]$$

Raccogliamo ora w_a sotto un'unica convoluzione:

$$\frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R)[w_a * (2n_R - N)], \quad (16)$$

$$\frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) (2n_R(\mathbf{r}, t) - N) d\mathbf{r} \right),$$

$$\frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} 2w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) n_R(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} - \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) d\mathbf{r}}_{=: K} \right),$$

ed ecco il modello (15) ridotto alla sola equazione

$$\frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R)(2w_a * n_R - K). \quad (17)$$

Mostriamo che le ipotesi $w_a = -w_i$ e $n_R(\mathbf{x}, t) + n_L(\mathbf{x}, t) \equiv N$ generano equilibrio nella condizione $n_R = n_L \equiv \frac{N}{2}$.

$$2w_a * n_R(\mathbf{x}, t) = 2 \frac{N}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) d\mathbf{r} = K,$$

cioè $2w_a * n_R - K = 0$ e dunque $\partial_t n_R = 0$ secondo la (17); $\partial_t n_L = -\partial_t n_R = 0$.

Effettuiamo ora analisi di stabilità lineare dell'equilibrio appena trovato $n_R = n_L \equiv \frac{N}{2}$, non prima di aver linearizzato la (17).

Stavolta sviluppiamo $f(n_R)$ centrando in $\frac{N}{2}$:

$$f(n_R) = f\left(\frac{N}{2}\right) + \underbrace{f'\left(\frac{N}{2}\right)}_{=0} \left(n_R - \frac{N}{2}\right) + o\left(n_R - \frac{N}{2}\right) = \frac{N^2}{4} + o\left(n_R - \frac{N}{2}\right).$$

Ripartiamo quindi dalla (16), forma alternativa della (17), poniamo $u(\mathbf{x}, t) := n_R(\mathbf{x}, t) - \frac{N}{2}$, osserviamo che $\partial_t n_R = \partial_t u$ e che $w_a * (2n_R - N) = 2w_a * (n_R - \frac{N}{2}) = 2w_a * u$, passaggio consentito dallo spostamento del fattore 2 dal secondo al primo termine di convoluzione. Otteniamo dunque:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial n_R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = f(n_R)[w_a * (2n_R - N)] = f(n_R)(2w_a * u) = 2f(n_R)(w_a * u),$$

sostituendo il primo termine dello sviluppo di $f(n_R)$ ed arriviamo alla linearizzazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{N^2}{2}(w_a * u). \quad (18)$$

Ai fini della dispersione cerchiamo stavolta soluzioni $u(\mathbf{x}, t) \propto e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$ nella (18), \mathbf{k} prende il nome di **vettore d'onda**.

$$\underbrace{\lambda e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{u_t(\mathbf{x}, t)} = \frac{N^2}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) \underbrace{e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle}}_{u(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{r}$$

Come nel caso monodimensionale si moltiplica la funzione integranda per $1 = e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$:

$$\lambda e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{N^2}{2} e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{x} - \mathbf{r}||) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} - \mathbf{r} \rangle} d\mathbf{r},$$

il termine $e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$ può essere cancellato da ambo i membri, si effettua inoltre la sostituzione $\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}^*) := \mathbf{x} - \mathbf{r}^*$, $|\det J_\varphi| = 1$ e $\mathbf{x} - \mathbf{r} = \mathbf{r}^*$ e si ottiene infine la relazione di dispersione

$$\lambda(\mathbf{k}) = \frac{N^2}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} w_a(||\mathbf{r}^*||) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r}^* \rangle} d\mathbf{r}^* = \frac{N^2}{2} W_a(\mathbf{k}). \quad (19)$$

$W_a(\mathbf{k})$, secondo l'usuale nozione, altro non è che la trasformata di Fourier di $w_a \circ ||\cdot||$ sul dominio bidimensionale \mathbb{R}^2 .

Abbiamo già detto che w_a può essere scelto come (9), diamo un esempio di formulazione di W_a sul solo termine e^{-bx^2} , per brevità.

Con le notazioni $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$; $\mathbf{k} := (k_1, k_2)$; $x := ||\mathbf{x}|| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$; $k := ||\mathbf{k}|| = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$w_a(||\mathbf{x}||) = e^{-b||\mathbf{x}||^2} = e^{-b(x_1^2 + x_2^2)} = e^{-bx^2},$$

passando alla trasformata di Fourier si ottiene (risparmiamo i calcoli):

$$W_a(\mathbf{k}) = \frac{\pi}{b} e^{-\frac{||\mathbf{k}||^2}{4b}} = \frac{\pi}{b} e^{-\frac{(k_1^2+k_2^2)}{4b}} = \frac{\pi}{b} e^{-\frac{k^2}{4b}} \in \mathbb{R}.$$

Studiamo il legame tra dispersione e stabilità dell'equilibrio. Ci riconduciamo dapprima al caso monodimensionale già visto per poi dedurre fatti sul nostro modello vero e proprio.

Se $k \in \mathbb{R}$ la relazione di dispersione si riduce a $\lambda(k) = \frac{N^2}{2} W_a(k)$, con $W_a(k)$ come nella (10): è chiaro che non si ha necessità di studiarne biforcazione rispetto ad alcun parametro, ad ogni scelta di $N > 0$ è associato un intervallo illimitato di modi instabili $[k_0, +\infty)$, caso analogo ad $a = 0$ nel diagramma in figura 3. Il modo che ha maggior impatto asintotico sulla soluzione è quello associato al numero d'onda $k_c \in [k_0, +\infty)$, con $W_a(k_c)$ valore massimo della funzione W_a sulla retta reale positiva \mathbb{R}^+ .

È chiaro che se $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ un modo \mathbf{k} è stabile qualora $W_a(\mathbf{k}) < 0$, instabile altrimenti. Abbiamo ancora una volta infiniti modi instabili, tutti e soli gli aventi vettori d'onda $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ con $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \in [k_0, +\infty)$.

Dominanza asintotica è stavolta data dai \mathbf{k} tali che $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k_c$, sebbene tornando all'equazione non lineare tale fatto non sempre risulti conservato.

L'equilibrio $n_R = n_L \equiv \frac{N}{2}$ è pertanto instabile e, come in ogni situazione di non limitatezza dei modi instabili, si evidenzia alta sensibilità del comportamento delle soluzioni rispetto alla condizione iniziale di perturbazione.

La lineare instabilità è confermata anche da risoluzioni numeriche della (17): senza entrare nel merito, cosa che richiederebbe un'ampia trattazione a sé, con condizioni iniziali vicine a $n_R = n_L \equiv \frac{N}{2}$ i metodi mostrano convergenza a nuove condizioni di equilibrio eterogenee dal punto di vista spaziale.

Come sono fatti tali equilibri? Colorando gli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tali che $n_R(\mathbf{x}, t) > n_L(\mathbf{x}, t)$ si ottengono pattern analoghi a quelli osservati in situazioni reali (figura 4).

3 Elaborazione dell'immagine: dalla retina alla corteccia visiva

Due parole in più sulla procedura già citata di invio del segnale visivo in corteccia, vedremo come il ramo principale del logaritmo complesso $\text{Log}(z) := \ln|z| + i \arg(z)$ fornisca un compromesso di formalismo della geometria che sta dietro questo processo.

Rappresentiamo la retina come un disco al cui centro è presente una depressione denominata *fovea*: un punto è genericamente individuato da coordinate polari (r, θ) .

Le cellule nervose deputate alla trasmissione dell'immagine verso il nervo ottico costituiscono unità chiamate *gangli retinali*, unità la cui densità non è uniforme su tutto il disco ma decresce all'aumentare della distanza r dalla *fovea*. Conseguenza di questo fatto è un effetto di ingrandimento foveale: una forma proiettata in prossimità della *fovea* risulterà nell'immagine finale più grande rispetto alla stessa proiettata in regioni periferiche della retina. Si osservi a tal proposito il primo esempio in figura 5: la stessa ampiezza delle corone circolari (sulla retina) corrisponde a variazioni significative dell'ampiezza delle bande (in corteccia).

Riferendosi in coordinate cartesiane (x, y) a punti dell'immagine elaborata in corteccia visiva avremo una metrica $dx dy = Mrdr d\theta$, per un opportuno fattore di ingrandimento $M > 0$.

L'elaborazione dell'immagine è in termini nostri una mappa che definiremo *retino-corticale*: sperimentazioni hanno portato ad una formulazione analitica non propriamente intuitiva

$$\begin{cases} x = \alpha \ln \left[\beta r + \sqrt{1 + \beta^2 r^2} \right] \\ y = \alpha \beta r \theta \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 r^2}} \end{cases} \quad (20)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametri legati all'ingrandimento.

Ebbene, daremo, al costo di approssimazioni, una forma alla mappa più immediata ricorrendo come già anticipato al logaritmo complesso.

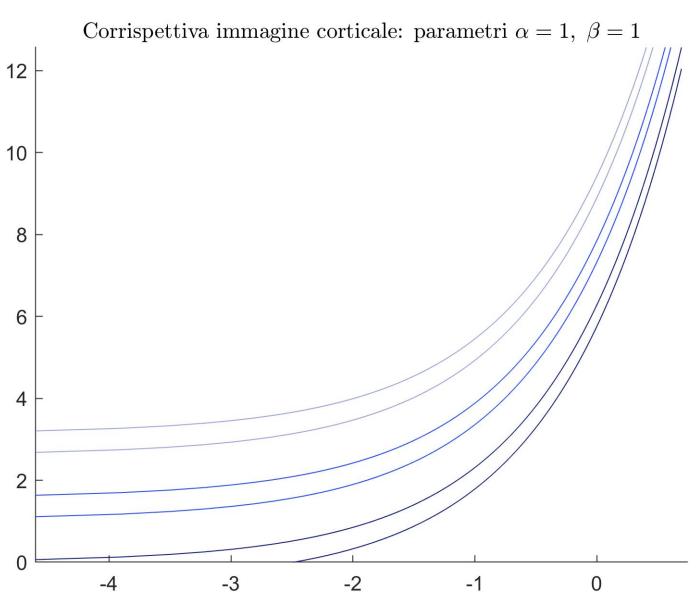
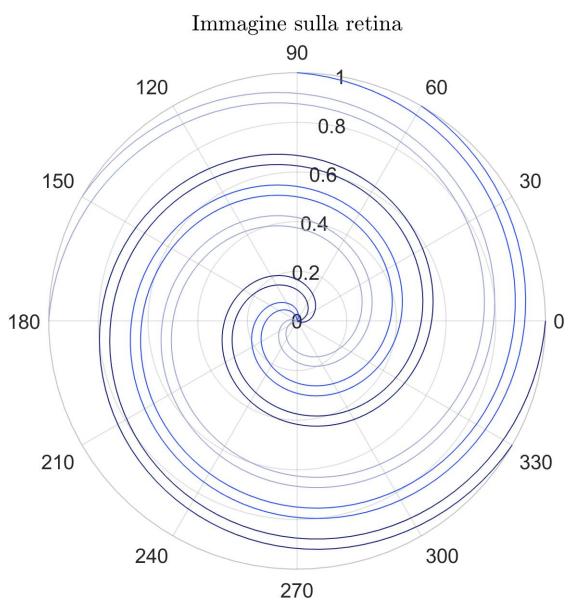
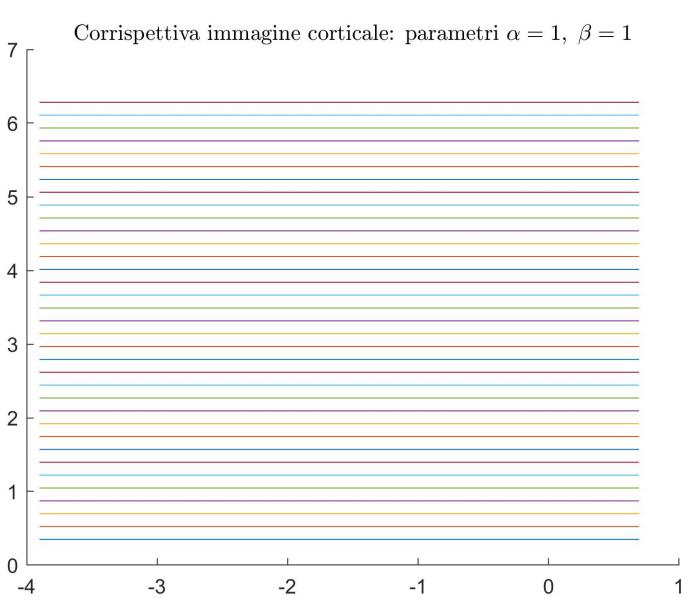
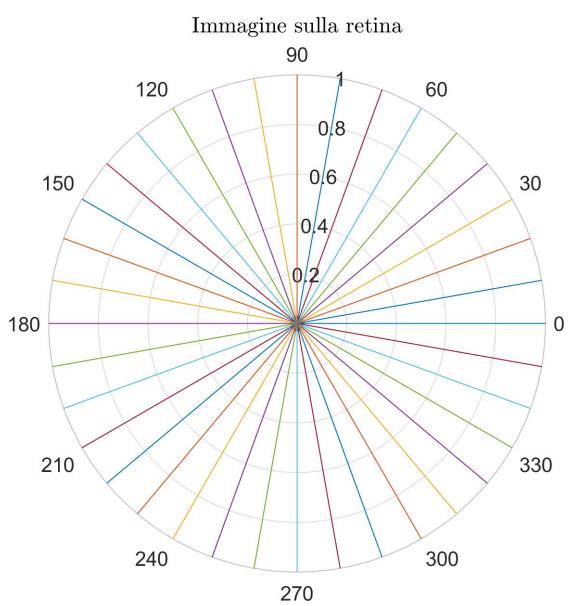
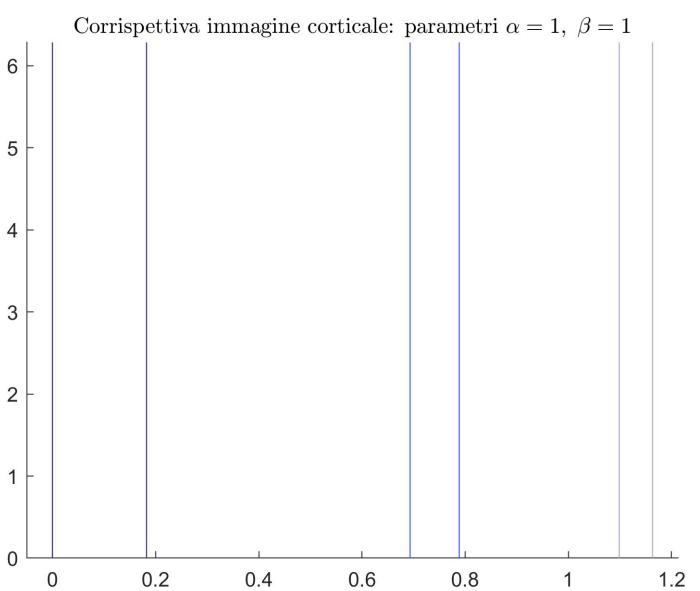
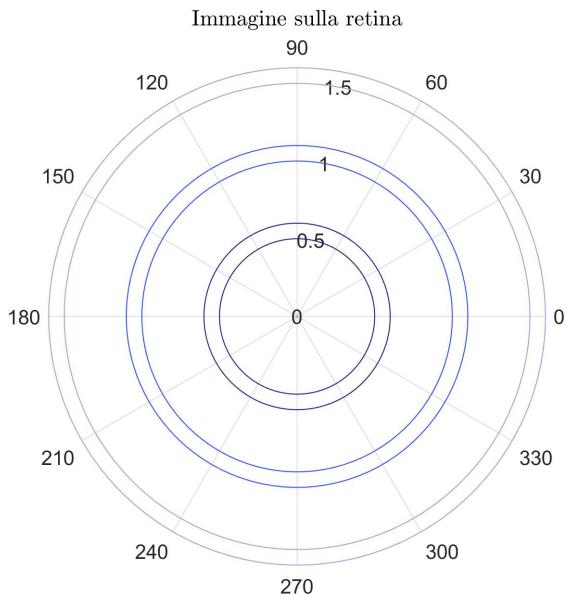


Figura 5: Alcuni esempi di applicazione della mappa retino-corticale $w = \alpha \log(2\beta z)$.

- Poniamoci anzitutto in prossimità della *fovea* ($r \ll 1$). Visto che r è vicino a 0 avremo $\sqrt{1 + \beta^2 r^2} \approx 1$, al primo ordine $\ln(1 + \beta r) \sim \beta r$ e dunque

$$\begin{cases} x \sim \alpha \beta r \\ y \sim \alpha \beta r \theta \end{cases} \quad (21)$$

- Per $r \rightarrow \infty$ si ha $\sqrt{1 + \beta^2 r^2} \sim \beta r$, dunque $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\beta r}{\sqrt{1 + \beta^2 r^2}} = 1$ e già per $r \approx 1$ ha senso approssimare $\sqrt{1 + \beta^2 r^2}$ con βr . A ragionevole distanza dalla *fovea*, ponendo $\sqrt{1 + \beta^2 r^2} \approx \beta r$, riusciamo a ridurre (20) a

$$\begin{cases} x \sim \alpha \ln[2\beta r] \\ y \sim \alpha \theta \end{cases} \quad (22)$$

Insertiamo la (22) nel contesto del piano complesso: $w := x + iy$ sono ora i punti dell'immagine corticale, $z = re^{i\theta}$ quelli della retina. Pertanto:

$$w = x + iy = \alpha \ln[2\beta r] + i\alpha\theta = \underbrace{\alpha(\ln[2\beta r])}_{\ln|z|} + i\underbrace{\theta}_{\text{Arg}(z)} = \alpha \text{Log}[2\beta r e^{i\theta}] = \alpha \text{Log}[2\beta z].$$

La mappa retino-corticale è assimilabile a $w := \alpha \text{Log}[2\beta z]$ con inversa facilmente deducibile $z = \frac{1}{2\beta} e^{\alpha^{-1} w}$.

4 Un modello bidimensionale di allucinazioni visive

Illustriamo infine una situazione dove vien meno il meccanismo di elaborazione dell'immagine appena spiegato. Peculiarie patologie (emicrania, epilessia, sifilide in stadio avanzato) oppure l'utilizzo di droghe (LSD, mescalina) generano condizioni di instabilità in corteccia visiva, leggasi equilibri instabili delle soluzioni del modello che presenteremo, aventi conseguente produzione di immagini fittizie, non associate ad alcun segnale dalla retina.

Come vedremo, tale instabilità è collegata a squilibri nei tassi di attivazione di due categorie di neuroni costituenti la corteccia visiva: eccitatori ed inibitori.

Una prima fase del fenomeno consiste nella visione fittizia di *pattern* geometrici piuttosto elementari: strisce, spirali, trame inscritte in tassellazioni del piano (reticolati quadrati, romboidali, triangolo-esagonali). Ebbene, riusciremo a visualizzare tali elementi come speciali condizioni di equilibrio.

Abbiamo già anticipato che la corteccia visiva (rappresentata di consueto come \mathbb{R}^2) è partizionata in neuroni di tipo eccitatorio ed inibitorio: i rispettivi tassi di attivazione sono denotati dalle funzioni $e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, oltre ad un'influenza reciproca di tipo metrico ed incrociato come abbiam visto nel caso del modello di dominanza oculare l'attivazione delle cellule nervose è in questo caso dipendente dal quadro storico di attività nei tempi precedenti. A tale scopo, in luogo di e, i , considereremo incognite E, I così definite:

$$\begin{pmatrix} E(x, t) \\ I(x, t) \end{pmatrix} := \int_{-\infty}^t h(t - \tau) \begin{pmatrix} e(x, \tau) \\ i(x, \tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

un effettivo peso in ragione temporale è dato dalla funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tipica scelta è $h(t) = e^{-bt}$ con $b > 0$ in modo da ricreare l'usuale decadimento di tipo esponenziale per $t \rightarrow +\infty$.

Visto che le interazioni tra cellule implementate tramite prodotti di convoluzione dovrebbero essere a questo punto conosciute al lettore presentiamo direttamente il modello, ad un primo aspetto non particolarmente differente da quello di dominanza oculare già studiato.

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = -E + S_E (\alpha_{EE} w_{EE} * E - \alpha_{IE} w_{IE} * I) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = -I + S_I (\alpha_{EI} w_{EI} * E - \alpha_{II} w_{II} * I) \end{cases} \quad (23)$$

L'influenza tra neuroni è ora mediata dai valori $\alpha_{EE}, \alpha_{IE}, \alpha_{EI}, \alpha_{II} \in \mathbb{R}$ che sono regolati in base al contesto patologico o al dosaggio della data sostanza stupefacente. Ruolo importante è svolto anche dalle funzioni soglia S_E, S_I : $S_E(0) = S_I(0) = 0$, $S'_E(0), S'_I(0) > 0$ e la relativa immagine è contenuta in un intervallo,

tipicamente $S_E(x) = S_I(x) = \tanh(x)$.

Veniamo ora ai nuclei: $w_{EE}, w_{IE}, w_{EI}, w_{II}$ hanno ora peso esclusivamente positivo, dunque in luogo di (9) sceglieremo le ordinarie funzioni a campana. Visto che all'interno degli integrali di convoluzione figura $w \circ ||\cdot||$ decade l'esigenza di parità di w potendo scegliere dunque nuclei traslati $w(x) = e^{-b(x-h)^2}$, $h \in \mathbb{R}$.

Prossimo passo è la linearizzazione di (23) e la relativa analisi di stabilità: la non possibilità in questo caso di ridurre ad una sola equazione, come fatto in (17), complica la strada all'individuazione di una vera e propria relazione di dispersione e conseguentemente alla realizzazione di un diagramma di biforcazione. Vedremo a breve come adattare i ragionamenti già svolti al caso corrente.

4.1 Analisi lineare di stabilità

Incominciamo osservando che la condizione di quiete $E(\mathbf{x}, t) = I(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ è di equilibrio per il sistema (23): il tutto segue semplicemente dai fatti $-E = -I = 0$, $\alpha_{EE}w_{EE} * E - \alpha_{IE}w_{IE} * I = \alpha_{EI}w_{EI} * E - \alpha_{II}w_{II} * I = 0$.

Ora, prima di studiarne la stabilità linearizziamo il sistema: le componenti che a priori non garantiscono linearità in (23) sono le funzioni soglia S_E, S_I , sviluppiamo queste ultime centrando in 0

$$\begin{aligned} S_E(\alpha_{EE}w_{EE} * E - \alpha_{IE}w_{IE} * I) &= \underbrace{S_E(0)}_{=0} + \underbrace{S'_E(0)}_{>0}(\alpha_{EE}w_{EE} * E - \alpha_{IE}w_{IE} * I) + o(\alpha_{EE}w_{EE} * E - \alpha_{IE}w_{IE} * I) \\ S_I(\alpha_{EI}w_{EI} * E - \alpha_{II}w_{II} * I) &= \underbrace{S_I(0)}_{=0} + \underbrace{S'_I(0)}_{>0}(\alpha_{EI}w_{EI} * E - \alpha_{II}w_{II} * I) + o(\alpha_{EI}w_{EI} * E - \alpha_{II}w_{II} * I) \end{aligned}$$

ed otteniamo infine

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = -E + S'_E(0)(\alpha_{EE}w_{EE} * E - \alpha_{IE}w_{IE} * I) \\ \frac{\partial I}{\partial t} = -I + S'_I(0)(\alpha_{EI}w_{EI} * E - \alpha_{II}w_{II} * I) \end{cases} \quad (24)$$

Vogliamo a questo punto ricavare la relazione di dispersione imponendo che $(E(\mathbf{x}, t), I(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{V}e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$, con $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, risolva il sistema (24). ($\mathbf{V} := (V_1, V_2)$)

Calcoliamo anzitutto $w_{EE} * E$ lungo la soluzione $E(\mathbf{x}, t) = V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$:

$$\begin{aligned} w_{EE} * E &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_{EE}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}|) \underbrace{V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle}}_{E(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{r} = V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \iint_{\mathbb{R}^2} w_{EE}(|\mathbf{x} - \mathbf{r}|) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} - \mathbf{r} \rangle} d\mathbf{r} = \\ &= V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \iint_{\mathbb{R}^2} w_{EE}(|\mathbf{r}^*|) e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{r}^* \rangle} d\mathbf{r}^* = V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} W_{EE}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

dove W_{EE} è la trasformata di Fourier di $w_{EE} \circ ||\cdot||$, facendo ricorso alla moltiplicazione $1 = e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$ e al cambio di variabile $\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}^*) := \mathbf{x} - \mathbf{r}^*$ esattamente come si è fatto per il modello precedente.

Calcoli perfettamente analoghi portano a concludere che:

$$w_{EI} * E = V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} W_{EI}(\mathbf{k})$$

$$w_{II} * I = V_2 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} W_{II}(\mathbf{k})$$

$$w_{IE} * I = V_2 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} W_{IE}(\mathbf{k})$$

Ora che tutte le convoluzioni sono state sviluppate, sostituiammo $(E(\mathbf{x}, t), I(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{V}e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$ direttamente in (24).

$$\begin{aligned} \underbrace{V_1 \lambda e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{\partial t E(\mathbf{x}, t)} &= -\underbrace{V_1 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{E(\mathbf{x}, t)} + S'_E(0) \alpha_{EE} \underbrace{V_1 W_{EE}(\mathbf{k}) e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{W_{EE} * E} - S'_E(0) \alpha_{IE} \underbrace{V_2 W_{IE}(\mathbf{k}) e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{W_{IE} * I} \\ \underbrace{V_2 \lambda e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{\partial t I(\mathbf{x}, t)} &= -\underbrace{V_2 e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{I(\mathbf{x}, t)} + S'_I(0) \alpha_{EI} \underbrace{V_1 W_{EI}(\mathbf{k}) e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{W_{EI} * E} - S'_I(0) \alpha_{II} \underbrace{V_2 W_{II}(\mathbf{k}) e^{\lambda t + i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}}_{W_{II} * I} \end{aligned}$$

Cancellando tutti i $e^{\lambda t+i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle}$ e portando tutti i termini a destra ci riduciamo ad un sistema lineare omogeneo nelle variabili $\mathbf{V} := (V_1, V_2)$:

$$\begin{cases} (\lambda + 1 - S'_E(0)\alpha_{EE}W_{EE})V_1 + S'_E(0)\alpha_{IE}W_{IE}V_2 = 0 \\ -S'_I(0)\alpha_{EI}W_{EI}V_1 + (\lambda + 1 + S'_I(0)\alpha_{II}W_{II})V_2 = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Ebbene, visto che cerchiamo soluzioni come modi d'onda non banali il sistema (25) dovrà avere soluzioni differenti dalla sola $(V_1, V_2) = (0, 0)$. In altre parole, la relazione di dispersione $\lambda(\mathbf{k})$ si ricava imponendo la condizione di singolarità sulla matrice dei coefficienti di (25):

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 - S'_E(0)\alpha_{EE}W_{EE} & S'_E(0)\alpha_{IE}W_{IE} \\ -S'_I(0)\alpha_{EI}W_{EI} & \lambda + 1 + S'_I(0)\alpha_{II}W_{II} \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Per comodità studieremo biforcazione rispetto al solo parametro $p > 0$ al posto dei quattro $\alpha_{EE}, \alpha_{IE}, \alpha_{EI}, \alpha_{II}$, parametro crescente con l'aumentare del dosaggio della sostanza allucinogena. Porremo dunque, includendo i valori fissati $S'_E(0), S'_I(0) > 0$:

$$\begin{aligned} S'_E(0)\alpha_{EE} &= pa_{EE} & S'_E(0)\alpha_{IE} &= pa_{IE} \\ S'_I(0)\alpha_{EI} &= pa_{EI} & S'_I(0)\alpha_{II} &= pa_{II} \end{aligned}$$

La risoluzione della (26) equivale all'individuazione delle radici di un polinomio caratteristico in λ :

$$\lambda^2 + L(\mathbf{k})\lambda + M(\mathbf{k}) = 0, \quad (27)$$

detti

$$\begin{aligned} L(\mathbf{k}) &:= 2 - pa_{EE}W_{EE}(\mathbf{k}) + pa_{II}W_{II}(\mathbf{k}), \\ M(\mathbf{k}) &:= 1 + p^2a_{IE}a_{EI}W_{IE}(\mathbf{k})W_{EI}(\mathbf{k}) - pa_{EE}W_{EE}(\mathbf{k}) - p^2a_{EE}a_{II}W_{EE}(\mathbf{k})W_{II}(\mathbf{k}) + pa_{II}W_{II}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Rispetto ai casi già studiati non è garantito che $\lambda(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$, neppure con nuclei a campana. All'interno del diagramma di biforcazione riporteremo di conseguenza i grafici di $\Re(\lambda(\mathbf{k}))$ per valori opportuni del parametro p , visto che è il segno della parte reale a determinare stabilità del modo (segno strettamente negativo) o instabilità (segno positivo).

Ulteriore condizione che richiediamo sulle scelte di nuclei $W_{EE}, W_{EI}, W_{IE}, W_{II}$ e parametri $a_{EE}, a_{EI}, a_{IE}, a_{II}$ è che il modo spazio-indipendente $e^{\lambda(0)t}$ associato al vettore d'onda $\mathbf{k} = (0, 0)$ sia stabile. Tale richiesta è dettata dalla volontà di ricondurre lo studio della stabilità a sole variazioni di tipo spaziale della condizione iniziale: nei due precedenti modelli il tutto discendeva già dall'ipotesi sul nucleo $W(0) < 0$ avendo dispersioni $\lambda(k) = W(k) - a$ con $a > 0$ (nel caso monodimensionale), $\lambda(\mathbf{k}) = \frac{N^2}{2}W(\mathbf{k})$ (nel caso bidimensionale di dominanza oculare).

In altre parole, stiamo richiedendo che $\Re(\lambda(0)) < 0$ e ciò è ad esempio assicurato scegliendo i parametri in modo che

$$L(0) > 0; \quad M(0) > 0. \quad (28)$$

Mostriamo che (28) fornisce effettivamente la stabilità del modo spazio-indipendente cercata.

Consideriamo la risoluzione di (27) per $\mathbf{k} = 0$, $\Delta = L^2(0) - 4M(0) \geq 0 \Leftrightarrow M(0) \leq \frac{L^2(0)}{4}$, distinguiamo pertanto due casi.

- (27) ha radici complesse coniugate, cioè $M(0) > \frac{L^2(0)}{4}$. Dalla formula risolutrice otteniamo $\Re(\lambda) = \frac{-L(0)}{2} < 0$, visto che $L(0)$ è assunto positivo.
- (27) ha radici reali (eventualmente coincidenti), cioè $0 < M(0) \leq \frac{L^2(0)}{4}$. Abbiamo $\lambda(0) = \frac{1}{2}(-L(0) \pm \sqrt{L^2(0) - 4M(0)})$, ai fini della stabilità richiederemo

$$\begin{cases} -L(0) + \sqrt{L^2(0) - 4M(0)} < 0 \\ -L(0) - \sqrt{L^2(0) - 4M(0)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{L^2(0) - 4M(0)} < L(0) \\ \sqrt{L^2(0) - 4M(0)} > -L(0) \end{cases}$$

La prima diseguaglianza $L^2(0) - 4M(0) < L^2(0)$ è sempre verificata vista l'ipotesi di positività di $M(0)$ ($-4M(0) < 0$); la seconda lo stesso visto che $-L(0) < 0$, dalla positività di $L(0)$.

Prima di studiare il diagramma di biforcazione possiamo escludere l'esistenza di un insieme illimitato di modi instabili direttamente osservando la (27). Per $\|\mathbf{k}\| \rightarrow \infty$ avremo infatti $W(\mathbf{k}) \rightarrow 0$, di conseguenza $L(\mathbf{k}) \rightarrow 2$, $M(\mathbf{k}) \rightarrow 1$ e (27) è ridotta a

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

che ha radici negative coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, deduciamo in questo modo la definitiva stabilità dei modi.

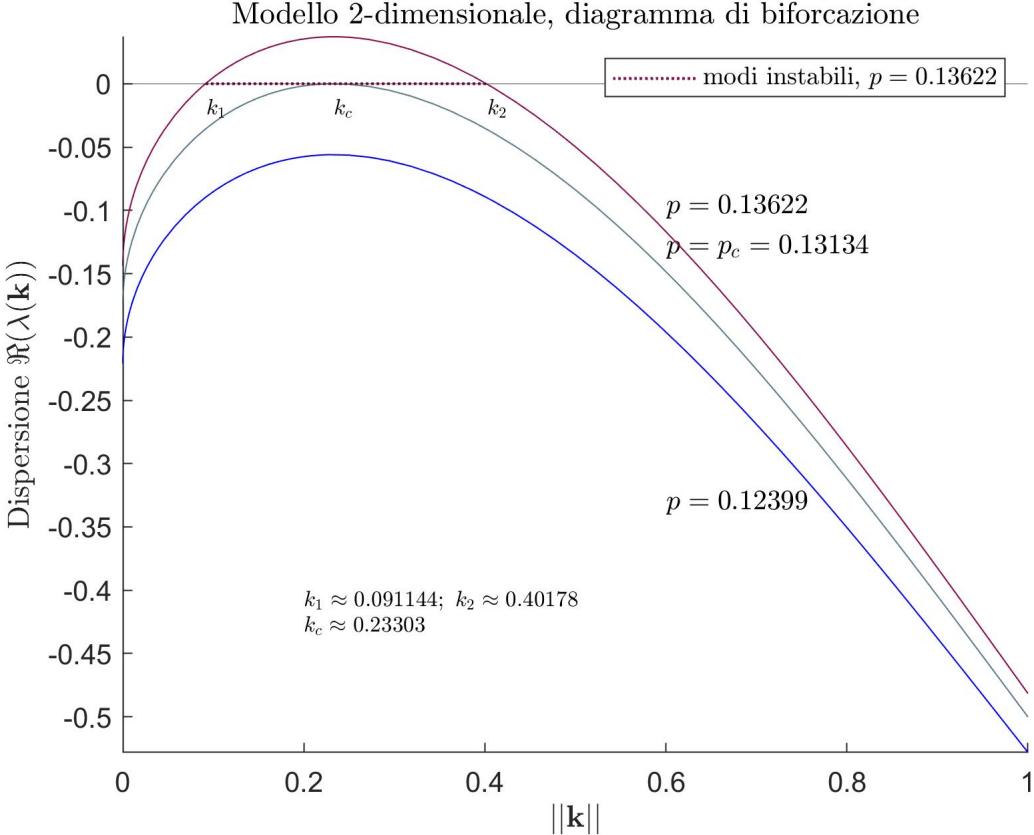


Figura 6: $a_{EE} = a_{EI} = a_{IE} = 1$, $a_{II} = -3$; nuclei $w_{EE}(x) = w_{EI}(x) = w_{IE}(x) = e^{-x^2}$, $w_{II}(x) = e^{-(x-1)^2}$. Sono plottati i casi $p = p_c$, valori di $p \in (0, p_c), (p_c, +\infty)$ generati casualmente.

Distinguiamo ora le casistiche del diagramma. Per valori del parametro $p \in (0, p_c)$ avremo $\Re(\lambda(\mathbf{k})) < 0$ per ogni possibile coppia di numeri d'onda k_1, k_2 tali che $k_1^2 + k_2^2 = \|\mathbf{k}\|^2$: lo stato di quiete $E = I \equiv 0$ è un equilibrio stabile.

Il dosaggio della sostanza allucinogena (che abbiamo detto esser proporzionale al valore di p) non è ancora sufficiente ad alterare il normale funzionamento della corteccia e perturbazioni dello stato portano comunque a condizioni di equilibrio.

Per $p = p_c$ raggiungiamo il dosaggio limite: l'instabilità è generata dalle sole forme d'onda a numeri k_1, k_2 tali che $k_1^2 + k_2^2 = k_c^2$.

Dettagli sulla determinazione dei valori p_c, k_c sono dati nel paragrafo dedicato alle implementazioni, basti per ora sapere che p_c è tale da far determinare a $\Re(\lambda(\mathbf{k}))$ un massimo in 0 e $\|\mathbf{k}\| = k_c$ (vedremo che i $\Re(\lambda(\mathbf{k}))$ del diagramma sono funzioni radiali con nuclei e^{-bx^2}), tale che $\lambda(\mathbf{k}) = 0$, è il punto di massimo associato.

Vedremo dopo che proprio da particolari equilibri nella condizione $p = p_c$ osserveremo *pattern* analoghi a quelli osservati in contesti di allucinazione.

Per $p > p_c$ l'instabilità della condizione di quiete è tale da avere un intervallo $[k_1, k_2]$ di valori per $\|\mathbf{k}\|$, corrispondenti a modi instabili della forma $e^{\lambda t + ik_1 x_1 + ik_2 x_2}$ con $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \in [k_1, k_2]$.

4.2 Visualizzazione dei pattern allucinatori

Ricostruiremo i *pattern* precedentemente dichiarati (strisce, tassellazioni) a partire da peculiari condizioni di equilibrio del sistema (24) nel caso di biforcazione $p = p_c$; equilibri spazialmente strutturati ai quali convergeranno condizioni di perturbazione dello stato di quiete $E(\mathbf{x}, t) = I(\mathbf{x}, t) \equiv 0$.

Ricordiamo che per $p = p_c$ avremo $\lambda(\mathbf{k}) = 0$ per tutti i \mathbf{k} con $\|\mathbf{k}\| = k_c$ e di conseguenza $\partial_t e^{\lambda(\mathbf{k})t+i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} = \partial_t e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} = 0$; in altre parole tali

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} = V(p_c, k_c) e^{ik_1 x_1 + k_2 x_2} \quad (29)$$

(che risolvono (24) per come è calcolato il valore di λ e con $V(p_c, k_c)$ che risolve il sistema lineare di equazioni (25)) sono equilibri.

Vista la linearità di (24), combinazioni lineari di soluzioni sì fatte saranno a loro volta soluzioni e condizioni di equilibrio: ebbene, esploreremo le possibilità combinando le (29) al variare delle coppie (k_1, k_2) aventi $k_1^2 + k_2^2 = k_c^2$. Alcuni esempi:

- $(k_1, k_2) = (k_c, 0)$ oppure $(k_1, k_2) = (0, k_c)$, ottenendo $e^{ik_c x_1}$ nel primo caso ($\frac{2\pi}{k_c}$ -periodicità lungo la direzione della retta $x_2 = 0$) e $e^{ik_c x_2}$ nel secondo ($\frac{2\pi}{k_c}$ -periodica lungo $x_1 = 0$);
- $(k_1, k_2) = (k_c \cos \varphi, k_c \sin \varphi)$ che corrispondono a soluzioni proporzionali ad $e^{ik_c (\cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2)}$, $\frac{2\pi}{k_c}$ -periodiche lungo $\sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2 = 0$, retta che forma un angolo φ con l'asse x_1 ;

Iniziamo dai *pattern* più elementari: i motivi a strisce. Strisce verticali (primo esempio in figura 7) sono ottenute dalla più elementare combinazione di $e^{ik_c x_1}$, $e^{-ik_c x_1}$ tale da far assumere alle soluzioni valori reali.

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) \cos(k_c x_1) = \frac{1}{2} V(p_c, k_c) (e^{ik_c x_1} + e^{-ik_c x_1}); \quad (30)$$

è chiaro che, non figurando x_2 nell'espressione analitica, avremo soluzioni costanti lungo rette $x_1 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; la periodicità di $\frac{2\pi}{k_c}$ è mantenuta lungo la direzione individuata dall'asse $x_2 = 0$.

Patterns di strisce orizzontali (secondo esempio in figura 7) sono perfettamente analoghi, impiegando stavolta esclusivamente x_2 .

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) \cos(k_c x_2) = \frac{1}{2} V(p_c, k_c) (e^{ik_c x_2} + e^{-ik_c x_2}); \quad (31)$$

tali soluzioni sono stavolta costanti lungo le $x_2 = \alpha$ e la direzione di periodicità è individuata da $x_1 = 0$.

Strisce oblique (terzo esempio in figura 7) si ottengono combinando le $e^{ik_c (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))}$:

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) \cos(k_c (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))) = \frac{1}{2} V(p_c, k_c) (e^{ik_c (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))} + e^{-ik_c (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi))}) \quad (32)$$

questa espressione altro non è che frutto di una rotazione antioraria di angolo φ della (30); curve di livello sono fornite da rette $\cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2 = \alpha$ e la direzione di periodicità è $\sin(\varphi)x_1 - \cos(\varphi)x_2 = 0$.

Patterns geometrici sotto forma di celle che tassellano il piano possono essere ottenuti combinando opportunamente le (30), (31), (32). Ad esempio, tassellazioni quadrate (primo esempio, figura 8) si hanno realizzando reticolati ottenuti sovrapponendo strisce orizzontali e verticali:

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) [\cos(k_c x_1) + \cos(k_c x_2)]. \quad (33)$$

Si ottengono tassellazioni a rombi (secondo esempio, figura 8) sovrapponendo strisce verticali ed oblique:

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) [\cos(k_c x_1) + \cos(k_c (x_1 \cos(\varphi) + x_2 \sin(\varphi)))]. \quad (34)$$

Ed infine un pattern a triangoli equilateri ed esagoni (terzo esempio, figura 8) si può ottenere sovrapponendo strisce verticali ad oblique ruotate di $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ e di $\varphi_2 = \frac{2}{3}\pi$:

$$\begin{pmatrix} E(x_1, x_2) \\ I(x_1, x_2) \end{pmatrix} = V(p_c, k_c) \left[\cos \left(k_c \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right) \right) + \cos \left(k_c \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \right) \right) + \cos(k_c x_1) \right]. \quad (35)$$

Prima ancora di procedere con la visualizzazione di (35) mostriamo algebricamente un fatto che avvalora la geometria delle celle: l'invarianza della soluzione a rotazioni di angolo $\frac{\pi}{3}$.

Anzitutto, volendo applicare una rotazione è congeniale riportare la (35) in coordinate polari. Poniamo

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

ottenendo pertanto,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{x_1}{2} &= r \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta}_{\cos \frac{\pi}{6}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos \theta}_{\sin \frac{\pi}{6}} \right) = r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right); \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{x_1}{2} &= r \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta}_{\cos \frac{\pi}{6}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cos \theta}_{\sin \frac{\pi}{6}} \right) = r \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right); \end{aligned}$$

dunque (35) scritta in coordinate polari diviene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E(r, \theta) \\ I(r, \theta) \end{pmatrix} &= V(p_c, k_c) (c_1(r, \theta) + c_2(r, \theta) + c_3(r, \theta)) = \\ &= V(p_c, k_c) \left(\cos \left(rk_c \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right) + \cos \left(rk_c \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) + \cos(rk_c \cos \theta) \right). \end{aligned}$$

L'invarianza per rotazioni di $\frac{\pi}{3}$ è mostrata facendo vedere che gli addendi si scambiano nella maniera seguente:

- $c_1(r, \theta + \frac{\pi}{3}) = c_3(r, \theta)$;
- $c_2(r, \theta + \frac{\pi}{3}) = c_1(r, \theta)$;
- $c_3(r, \theta + \frac{\pi}{3}) = c_2(r, \theta)$.

Il tutto è conseguenza dell'utilizzo di formule goniometriche di somma e archi associati:

$$c_1 \left(r, \theta + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(rk_c \sin \left[\left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{3} \right] \right) = \cos \left(rk_c \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \cos(rk_c \cos \theta) = c_3(r, \theta);$$

$$c_2 \left(r, \theta + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(rk_c \sin \left[\left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{3} \right] \right) = \cos \left(rk_c \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right) = c_1(r, \theta);$$

$$\begin{aligned} c_3 \left(r, \theta + \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \left(rk_c \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \cos \left(rk_c \left(\underbrace{\cos \theta \cos \frac{\pi}{3}}_{\sin \frac{\pi}{6}} - \underbrace{\sin \theta \sin \frac{\pi}{3}}_{\cos \frac{\pi}{6}} \right) \right) = \\ &= \cos \left(rk_c \sin \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right) = \cos \left(-rk_c \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \cos \left(rk_c \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) = c_2(r, \theta). \end{aligned}$$

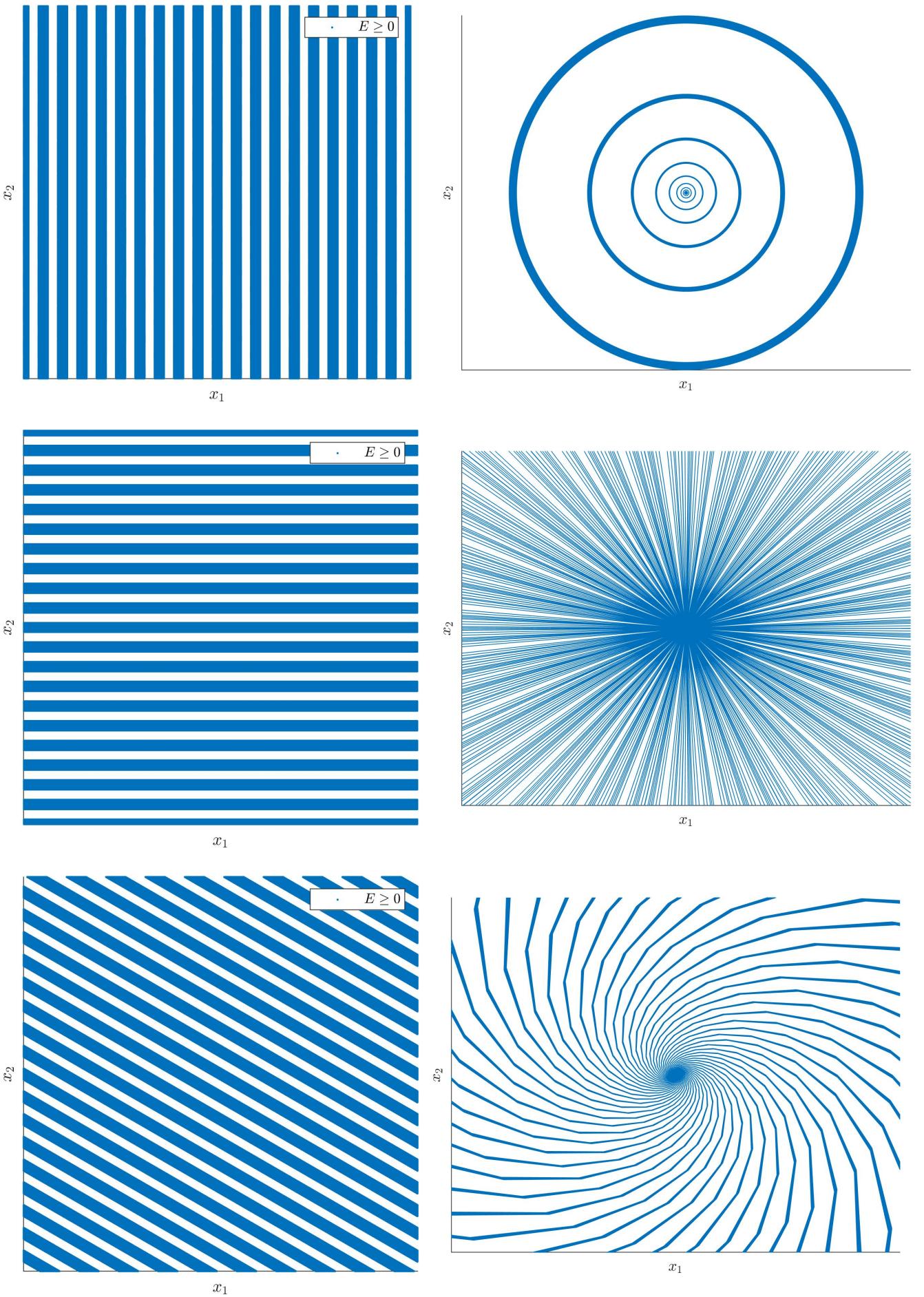


Figura 7: Pattern a strisce (sulla sinistra) e relativa immagine retino-corticale inversa (sulla destra). $a_{EE} = 20$, $a_{EI} = a_{IE} = 1$, $a_{II} = -3$; nuclei $w_{EE}(x) = w_{EI}(x) = w_{IE}(x) = e^{-x^2}$, $w_{II}(x) = e^{-(x-\frac{3}{100})^2}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$; $k_c \approx 0.21509$.

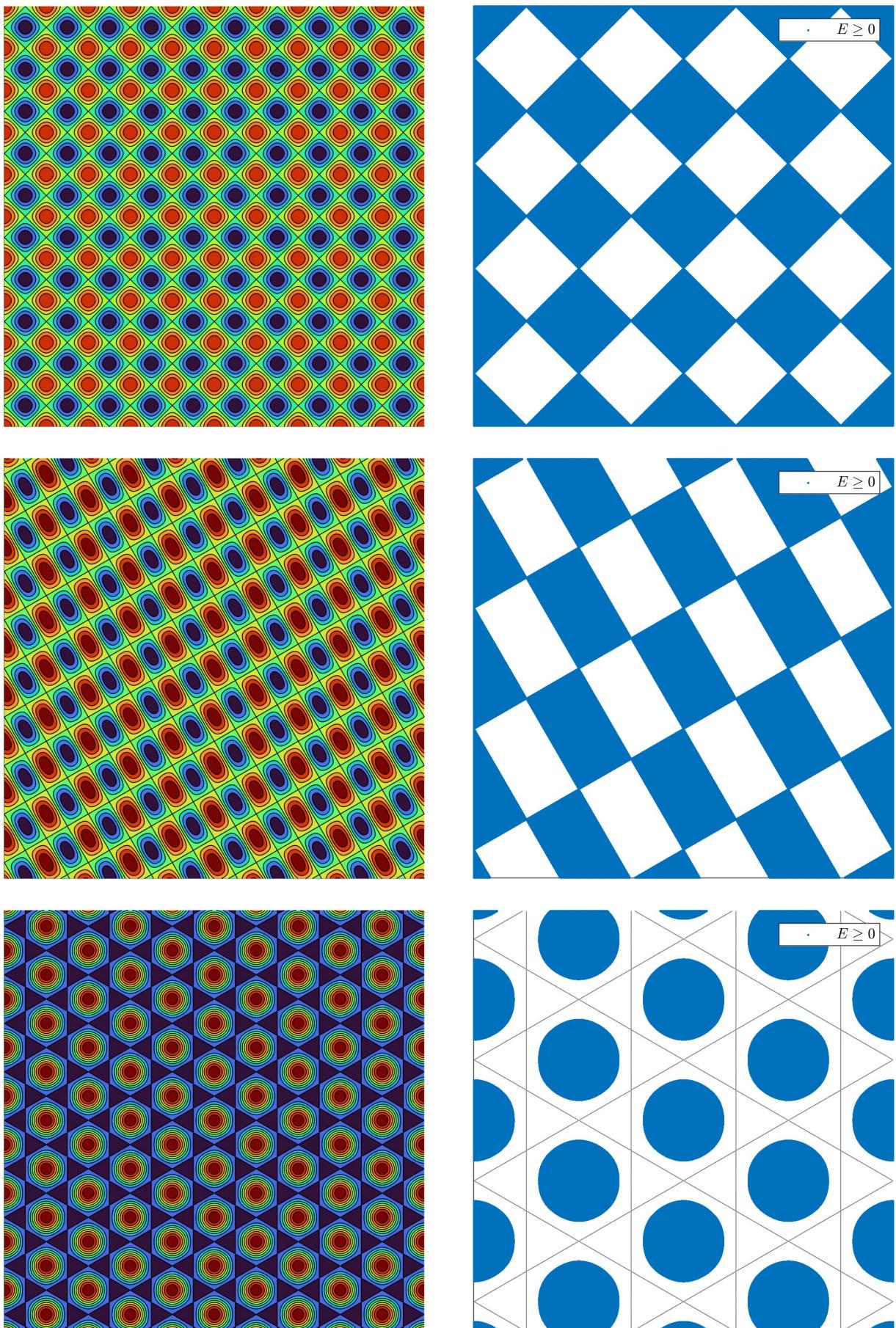


Figura 8: Tassellazioni quadrate, romboidali, triango-esagonali. $a_{EE} = a_{EI} = a_{IE} = 1$, $a_{II} = -3$; nuclei $w_{EE}(x) = w_{EI}(x) = w_{IE}(x) = e^{-x^2}$, $w_{II}(x) = e^{-(x-\frac{3}{100})^2}$; $k_c \approx 0.21509$.

5 Codice MATLAB con alcuni dettagli d'implementazione

5.1 Grafici delle $f(n)$ e nuclei di convoluzione

I grafici si figura 1 sono realizzati con semplici script che non richiedono commenti particolari.

```

1 f1= @(n,r) r.*n.*(1-n);
2 f2= @(n,r,nc) r.*n.*(n-nc).*(1-n);
3
4 title('$f_1(n)=n(1-n)$', 'Interpreter', 'latex')
5 hold on
6 r=1;
7 n=linspace(0,1.2,200);
8 xline(0, 'Color', 'black', 'LineWidth', 0.08);
9 yline(0, 'Color', 'black', 'LineWidth', 0.08);
10 plot(n,f1(n,r), 'Color', 'black');
11 plot([0], [0], 'Color', 'red', 'Marker', 'x', 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 1.5);
12 plot([1], [0], 'Color', 'blue', 'Marker', 'o', 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 1.5);
13 xlabel('$n$', 'Interpreter', 'latex');
14 ylabel('$f(n)$', 'Interpreter', 'latex');
15 legend('', '', ', equilibri instabili', 'equilibri stabili', 'Location', 'southwest');
16 exportgraphics(gcf, 'f1.jpg', 'Resolution', 300)
17
18 figure
19 title('$f_2(n)=n\left(n-\frac{1}{2}\right)(1-n)$', 'Interpreter', 'latex')
20 hold on
21 nc=1/2;
22 xline(0, 'Color', 'black', 'LineWidth', 0.08);
23 yline(0, 'Color', 'black', 'LineWidth', 0.08);
24 plot(n,f2(n,r,nc), 'Color', 'black');
25 plot([0, 1], [0, 0], 'Color', 'blue', 'Marker', 'o', 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 1.2);
26 plot([nc], [0], 'Color', 'red', 'Marker', 'x', 'LineStyle', 'none', 'LineWidth', 1.2);
27 xlabel('$n$', 'Interpreter', 'latex');
28 ylabel('$f(n)$', 'Interpreter', 'latex');
29 legend('', '', ', equilibri stabili', 'equilibri instabili', 'Location', 'southwest');
30 exportgraphics(gcf, 'f2.jpg', 'Resolution', 300)

```

Per quanto la visualizzazione del nucleo $w(x)$, delle sue componenti $w_E(x)$, $w_I(x)$ e della trasformata $W(k)$ in figura 2 si è utilizzata la function `makeKernel`. Oltre a generare facoltativamente i grafici, qualora il parametro `plt` sia settato ad 1, esegue rispetto ai valori b_1, b_2, d_1, d_2 forniti in ingresso il controllo di validità della condizione (11), ossia la negatività di $W(0)$.

```

1 function [w,W] = makeKernel(b1,b2,d1,d2,plt)
2 ext=20;
3 ext_W=3;
4 %Controllo di validità dei parametri
5 if b1 <= b2 || d1 >= d2
6     exit('kernel non della forma cercata')
7 end
8 if b1*d1-b2*d2 >= 0
9     exit('kernel non valido: mancata negatività in 0 di W.');
10 end
11
12 %Costruzione del nucleo e relativa trasformata di Fourier
13 w_E=@(x) b1.*exp(-(x./d1).^2);
14 w_I=@(x) b2.*exp(-(x./d2).^2);
15 w=@(x) w_E(x)-w_I(x);
16 W=@(k) sqrt(pi).* (b1.*d1.*exp(-((d1.*k).^2)/4)-b2.*d2.*exp(-((d2.*k).^2)/4));
17
18 %Plotting delle curve ottenute
19 x=linspace(-ext,ext,1000);
20 lims=[-ext,ext,min(w(x)),b1];
21 if plt==1
22     hold on
23     axis(lims);
24     xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex');
25     str_we=strcat('$w_E(x)=$', num2str(b1), 'e^{- \left(\frac{x}{d1}\right)^2}');
26     str_wi=strcat('$w_I(x)=$', num2str(b2), 'e^{- \left(\frac{x}{d2}\right)^2}$');
27     tstr=strcat(str_we, str_wi);
28     title(tstr, 'Interpreter', 'latex');

```

```

29 xline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
30 yline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
31 fplot(w_E, 'Color', 'red');
32 fplot(w_I, 'Color', 'blue');
33 lg=legend('','','$w_E$','$w_I$');
34 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
35 exportgraphics(gcf,'kernel1.jpg','Resolution',300);
36
37 figure
38 hold on
39 title('Nucleo di convoluzione $w(x):=w_E(x)-w_I(x)$','Interpreter','latex')
40 xlabel('$x$','Interpreter','latex');
41 axis(lims)
42 xline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
43 yline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
44 fplot(w, 'Color', 'magenta');
45 lg=legend('','','$w$');
46 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
47 exportgraphics(gcf,'kernel2.jpg','Resolution',300);
48
49 figure
50 hold on
51 x=linspace(-ext_W,ext_W,1000);
52 lims=[-ext_W,ext_W,min(W(x)),max(W(x))];
53 axis(lims);
54 title('Trasformata di Fourier del nucleo $W(k) := \widehat{w(x)}$','Interpreter','',
' latex')
55 xlabel('$k$','Interpreter','latex');
56 xline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
57 yline(0,'Color','black','LineWidth',0.08);
58 fplot(W, 'Color', '#607d8b');
59 lg=legend('','','$W$');
60 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
61 exportgraphics(gcf,'kernel3.jpg','Resolution',300);
62 end

```

5.2 Diagramma di biforcazione, modello monodimensionale

Il diagramma di biforcazione in figura 3 è visualizzato mediante la function `makeBifurcation1`. In particolare, l'esatto massimo locale k_c è ricavato calcolando la (12) ed è posto conseguentemente $a_c := W(k_c)$. Sono a questo punto generati casualmente valori $a_1 \in (0, a_c)$, nello specifico `rand()` genera un valore in $[0, 1]$ con distribuzione uniforme e conseguentemente `a_c*rand()` starà nel range voluto, $a_2 \in (a_c, 10 - a_c)$, al solito $(10 - a_c)*rand()$ determina l'ampiezza del range e $(10 - a_c)*rand() + a_c$ fissa l'estremo sinistro.

Sono infine visualizzati i grafici delle dispersioni $\lambda(k) = W(k) - a$ per i valori $a = 0, a_1, a_c, a_2$: in particolare k_0 , unico zero di $W(k)$ nella semiretta positiva, k_1, k_2 , zeri di $W(k) - a_1$, sono ricavati con metodi iterativi. Tali approssimazioni sono effettuate con `fsolve`, andando a prendere punti iniziali congeniali all'individuazione del corretto zero: l'origine o il punto a massima ascissa visualizzata `ext`.

```

1 function makeBifurcation1(b1,b2,d1,d2)
2 ext=2;
3 [w,W]=makeKernel(b1,b2,d1,d2,0);
4 bif_fun=@(k,a) W(k)-a;
5 k_c=sqrt(4/(d2^2-d1^2)*log(b2/b1*(d2/d1)^3));
6 a_c=W(k_c);
7
8 %Generazione valori casuali di plotting.
9 a1=a_c*rand();
10 a2=(10-a_c)*rand()+a_c;
11
12 %Elaborazione del diagramma di biforcazione.
13 hold on
14 title(strcat('Modello 1-dimensionale, diagramma di biforcazione: $w(x)=',num2str(b1),'e
15 ^{- \left(\frac{x}{',num2str(d1),'}\right)^2} - ',num2str(b2),'e^{- \left(\frac{x}{',num2str(d2),'}\right)^2}$','Interpreter','latex');
16 xlabel("Numeri d'onda $k$",'Interpreter','latex');
17 ylabel("Dispersione $\lambda(k)$",'Interpreter','latex')
18 z=linspace(0,ext,1000);
19 lims=[0,ext,min(W(z))-a2,max(W(z))];
20 axis(lims);

```

```

20 xline(0,'Color','black','Linewidth',0.08);
21 yline(0,'Color','black','Linewidth',0.08);
22 % caso a=0
23 fplot(@(k) bif_fun(k,0),'Color','red');
24 text(ext-0.2,bif_fun(ext-0.2,0)+0.2,'$a=0$', 'Interpreter','latex');
25 k0=fsolve(@(k) bif_fun(k,0),1e-1);
26 text(k0+0.001,-0.2,'$k_0$', 'Interpreter','latex','FontSize',8);
27 plot([k0,ext],[0,0],'Color','red','Linestyle','--','Linewidth',1);
28 % caso 0<a<a_c
29 fplot(@(k) bif_fun(k,a1),'Color','#880e4f');
30 text(ext-0.2,bif_fun(ext-0.2,a1)+0.2, strcat('$a=',num2str(a1),'$'), 'Interpreter','latex')
;
31 k1=fsolve(@(k) bif_fun(k,a1),1e-1);
32 k2=fsolve(@(k) bif_fun(k,a1),ext);
33 text(k1+0.001,-0.2,'$k_1$', 'Interpreter','latex','FontSize',8);
34 text(k2+0.001,-0.2,'$k_2$', 'Interpreter','latex','FontSize',8);
35 plot([k1,k2],[0,0],'Color','#880e4f','Linestyle',':','Linewidth',1);
36 % caso a=a_c
37 fplot(@(k) bif_fun(k,a_c),'Color','#607d8b');
38 text(ext-0.2,bif_fun(ext-0.2,a_c)+0.2, strcat('$a=a_c=',num2str(a_c),'$'), 'Interpreter','
 latex');
39 plot(k_c,0,'Color','#607d8b','Marker','.','MarkerSize',10);
40 text(k_c,-0.2,'$k_c$', 'Interpreter','latex','FontSize',8);
41 % caso a>a_c
42 fplot(@(k) bif_fun(k,a2),'Color','blue');
43 text(ext-0.2,bif_fun(ext-0.2,a2)+0.2, strcat('$a=',num2str(a2),'$'), 'Interpreter','latex')
;
44 % legenda
45 lg=legend('','','','','modi instabili','$a=0$',',',strcat('modi instabili, ','$ \ a=',num2str(
 a1),'$'),',','');
46 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
47 % box dei valori di k0,k1,k2,k_c ricavati
48 text(0.2,lims(3)+1.1,strcat('$k_0 \approx ',num2str(k0),'$'), 'Interpreter','latex','
 FontSize',8);
49 text(0.2,lims(3)+0.7,strcat('$k_1 \approx ',num2str(k1),';\ k_2 \approx ',num2str(k2),'$')
 , 'Interpreter','latex','FontSize',8);
50 text(0.2,lims(3)+0.3,strcat('$k_c = ',num2str(k_c),'$'), 'Interpreter','latex','FontSize',8)
;
51 % salvataggio immagine
52 exportgraphics(gcf,'bifurcation1.jpg','Resolution',300);
53 end

```

5.3 Implementazione della trasformazione retino-corticale

Abbiamo realizzato una semplice function `retinaToCortex` che dati i punti di campionamento di una curva in coordinate polari fornisce i trasformati dei rispettivi in coordinate cartesiane, secondo la (22), analoga al logaritmo complesso per come si è visto.

```

1 function [x,y] = retinaToCortex(theta,rho,alpha,beta)
2 x=alpha*log(2*beta*rho);
3 y=alpha*theta;
4 end

```

La figura 4 è poi realizzata testando la `retinaToCortex` su tre esempi: circonferenze concentriche, costituenti a due a due delle corone circolari, di raggi 0.5, 0.6, 1, 1.1, 1.5, 1.6; coppie di spirali a scarto $\frac{\pi}{6}$ intervallate ogni $\frac{\pi}{2}$; 36 segmenti radiali che equipartiscono l'angolo giro.

Si ricorda al lettore che la visualizzazione di curve in coordinate polari avviene mediante il comando `polarplot(theta,rho)`, dove `theta` è il vettore degli angoli e `rho` dei corrispondenti raggi.

```

1 alpha=1;
2 beta=1;
3
4 %Primo esempio: circonferenze concentriche
5 theta=linspace(0,2*pi,100);
6 rho1=0.5*ones(1,100);
7 rho2=0.6*ones(1,100);
8 rho3=ones(1,100);
9 rho4=1.1*ones(1,100);
10 rho5=1.5*ones(1,100);
11 rho6=1.6*ones(1,100);

```

```

12 % immagine sulla retina
13 polarplot(theta,rho1,'Color','#1a237e');
14 hold on
15 title('Immagine sulla retina','Interpreter','latex');
16 polarplot(theta,rho2,'Color','#1a237e');
17 polarplot(theta,rho3,'Color','#304ffe');
18 polarplot(theta,rho4,'Color','#304ffe');
19 polarplot(theta,rho5,'Color','#9fa8da');
20 polarplot(theta,rho6,'Color','#9fa8da');
21 exportgraphics(gca,'circonferenze_retina.jpg','Resolution',300);
22 % immagine corticale
23 [x1,y1]=retinaToCortex(theta,rho1,alpha,beta);
24 [x2,y2]=retinaToCortex(theta,rho2,alpha,beta);
25 [x3,y3]=retinaToCortex(theta,rho3,alpha,beta);
26 [x4,y4]=retinaToCortex(theta,rho4,alpha,beta);
27 [x5,y5]=retinaToCortex(theta,rho5,alpha,beta);
28 [x6,y6]=retinaToCortex(theta,rho6,alpha,beta);
29 figure
30 hold on
31 axis([min(x1)-0.05,max(x6)+0.05,min(y1),max(y1)]);
32 title(strcat('Corrispettiva immagine corticale: parametri $\alpha=',num2str(alpha),', \ \
beta=',num2str(beta),'$','Interpreter','latex'));
33 plot(x1,y1,'Color','#1a237e');
34 plot(x2,y2,'Color','#1a237e');
35 plot(x3,y3,'Color','#304ffe');
36 plot(x4,y4,'Color','#304ffe');
37 plot(x5,y5,'Color','#9fa8da');
38 plot(x6,y6,'Color','#9fa8da');
39 exportgraphics(gca,'circonferenze_cortex.jpg','Resolution',300);
40
41 %Secondo esempio: spirali
42 rho=linspace(0,1,200);
43 theta1=linspace(0,4*pi,200);
44 theta2=linspace(-pi/6,4*pi-pi/6,200);
45 theta3=linspace(pi/2,4*pi+pi/2,200);
46 theta4=linspace(2*pi/6,4*pi+2*pi/6,200);
47 theta5=linspace(pi,4*pi+pi,200);
48 theta6=linspace(5*pi/6,4*pi+5*pi/6,200);
49 % immagine sulla retina
50 figure
51 polarplot(theta1,rho,'Color','#1a237e');
52 hold on
53 title('Immagine sulla retina','Interpreter','latex');
54 polarplot(theta2,rho,'Color','#1a237e');
55 polarplot(theta3,rho,'Color','#304ffe');
56 polarplot(theta4,rho,'Color','#304ffe');
57 polarplot(theta5,rho,'Color','#9fa8da');
58 polarplot(theta6,rho,'Color','#9fa8da');
59 exportgraphics(gca,'spirali_retina.jpg','Resolution',300);
60 % immagine corticale
61 [x1,y1]=retinaToCortex(theta1,rho,alpha,beta);
62 [x2,y2]=retinaToCortex(theta2,rho,alpha,beta);
63 [x3,y3]=retinaToCortex(theta3,rho,alpha,beta);
64 [x4,y4]=retinaToCortex(theta4,rho,alpha,beta);
65 [x5,y5]=retinaToCortex(theta5,rho,alpha,beta);
66 [x6,y6]=retinaToCortex(theta6,rho,alpha,beta);
67 figure
68 hold on
69 axis([min(x1)-0.05,max(x6)+0.05,min(y1),max(y1)]);
70 title(strcat('Corrispettiva immagine corticale: parametri $\alpha=',num2str(alpha),', \ \
beta=',num2str(beta),'$','Interpreter','latex'));
71 plot(x1,y1,'Color','#1a237e');
72 plot(x2,y2,'Color','#1a237e');
73 plot(x3,y3,'Color','#304ffe');
74 plot(x4,y4,'Color','#304ffe');
75 plot(x5,y5,'Color','#9fa8da');
76 plot(x6,y6,'Color','#9fa8da');
77 exportgraphics(gca,'spirali_cortex.jpg','Resolution',300);
78
79 %Terzo esempio: raggi
80 n=36;
81 theta=zeros(100,n);
82 rho=linspace(0,1,100);

```

```

83 for k=1:n
84     theta(:,k)=k*2*pi/n*ones(1,100);
85 end
86 % immagine sulla retina
87 figure
88 polarplot(theta(:,1),rho);
89 hold on
90 title('Immagine sulla retina','Interpreter','latex');
91 for k=2:n
92     polarplot(theta(:,k),rho)
93 end
94 exportgraphics(gca,'raggi_retina.jpg','Resolution',300);
95 % immagine corticale
96 figure
97 hold on
98 title(strcat('Corrispettiva immagine corticale: parametri $\alpha=',num2str(alpha),', $\beta=',num2str(beta),'$','Interpreter','latex'));
99 for k=2:n
100    [x,y]=retinaToCortex(theta(:,k),rho,alpha,beta);
101    plot(x,y)
102 end
103 exportgraphics(gca,'raggi_cortex.jpg','Resolution',300);

```

5.4 Diagramma di biforcazione, modello bidimensionale

La realizzazione del diagramma di biforcazione relativo al modello delle allucinazioni, figura 6, segue la stessa idea del caso monodimensionale di figura 3 con alcune complicazioni che andremo a sviscerare. Anzitutto la relazione di dispersione non ha più un'espressione esplicita ma si scrive come radice del polinomio caratteristico (27). Utilizzando la formula risolutrice per equazioni di secondo grado otteniamo:

$$\lambda(\mathbf{k}) = \frac{-L(\mathbf{k}) \pm \sqrt{L^2(\mathbf{k}) - 4M(\mathbf{k})}}{2} = \frac{p}{2} F_{\pm}(\mathbf{k}) - 1,$$

dove

$$F_{\pm}(\mathbf{k}) := a_{EE} W_{EE}(\mathbf{k}) - a_{II} W_{II}(\mathbf{k}) \pm \sqrt{(a_{EE} W_{EE}(\mathbf{k}) + a_{II} W_{II}(\mathbf{k}))^2 - 4a_{IE} a_{EI} W_{IE}(\mathbf{k}) W_{EI}(\mathbf{k})}.$$

Sistemiamo dunque i dettagli rimasti.

- Abbiamo già detto che nuclei della forma $w(x) = e^{-bx^2}$ sono tali che $w \circ ||.||$ ha trasformata $\frac{\pi}{b} e^{-\frac{||\mathbf{k}||^2}{4b}}$, ricordando la formula $\widehat{f(x-h)}(k) = \widehat{f}(k)e^{-ikh}$ e leggendo il tutto nelle variabili $x := ||\mathbf{x}||$, $k := ||\mathbf{k}||$, otteniamo che la trasformata di $w \circ ||.||$ con nuclei traslati $w(x) = e^{-b(x-h)^2}$ è $\frac{\pi}{b} e^{-\frac{||\mathbf{k}||^2}{4b}} e^{i||\mathbf{k}||h}$. La relazione di dispersione $\lambda(\mathbf{k})$, figurando \mathbf{k} solo all'interno delle trasformate, è dunque radiale, vale a dire che è funzione della sola $||\mathbf{k}||$ giustificando quest'ultima grandezza sull'ascissa del diagramma di biforcazione. Discorso analogo vale per il sistema (25), facendo acquistare un senso alla dipendenza del vettore V da k_c e non da \mathbf{k} nella visualizzazione dei pattern allucinatori.
- Ricaviamo k_c come il valore che massimizza $\lambda(||\mathbf{k}||)$, dunque k_c è tale da massimizzare F_+ . Ritroviamo tale valore come punto stazionario di F_+ : visto la forma di tale funzione non propriamente agevole su carta, la derivata è ricavata usando la function **diff** del toolbox simbolico e lo zero è ancora una volta approssimato con **fsolve**.
 - p_c è il valore del parametro di biforcazione tale da far assumere a λ massimo in 0. Vale a dire, $\frac{p_c}{2} F_+(||\mathbf{k}|| = k_c) - 1 = 0 \Leftrightarrow p_c = \frac{2}{F_+(k_c)}$.
 - k_1, k_2 del caso $p > p_c$ sono ricavati come nel caso monodimensionale con **fsolve**.

```

1 function [p_c,k_c]=makeBifurcation2(a,b,h,plt)
2 ext=1;
3 %Definizione delle trasformate W e funzioni L,M
4 W_ee=@(k) pi/b(1)*exp(-(k.^2)/(4*b(1)))*exp(-i*h(1)*k);
5 W_ii=@(k) pi/b(2)*exp(-(k.^2)/(4*b(2)))*exp(-i*h(2)*k);
6 W_ei=@(k) pi/b(3)*exp(-(k.^2)/(4*b(3)))*exp(-i*h(3)*k);
7 W_ie=@(k) pi/b(4)*exp(-(k.^2)/(4*b(4)))*exp(-i*h(4)*k);
8 L=@(k,p) 2-p*a(1)*W_ee(k)+p*a(2)*W_ii(k);
9 M=@(k,p) 1+p.^2*a(4)*a(3)*W_ie(k)*W_ei(k)-p*a(1)*W_ee(k)-p.^2*a(1)*a(2)*W_ee(k)*W_ii(k)+p*a(2)*W_ii(k);

```

```

10
11 %Calcoli relativi alla relazione di dispersione.
12 % scrittura in forma simbolica e derivazione
13 syms k;
14 F=a(1)*W_ee(k)-a(2)*W_iik((a(1)*W_ee(k)+a(2)*W_iik))^(2-4*a(4)*a(3)*W_ie(k)*W_ei(k))
15 ^^(1/2);
16 F_prime=diff(F);
17 % conversione in forma handle function
18 F=matlabFunction(real(F));
19 F_prime=matlabFunction(real(F_prime));
20 % scrittura della dispersione lambda
21 lambda=@(k,p) p/2*F(k)-1;
22 % calcolo dei valori di biforcazione k_c,p_c
23 k_c=fsolve(F_prime,1e-1);
24 p_c=2/F(k_c);
25
26 %Controllo validità dei parametri al caso p=p_c
27 if L(0,p_c)<=0 || M(0,p_c)<=0
28     exit('Parametri non validi: soluzione spazio-indipendente non stabile.')
29 end
30
31 if plt==1
32     %Generazione valori casuali di plotting.
33     p1=0.02*rand()+(p_c-0.02);
34     p2=0.05*rand()+(p_c-0.02);
35
36     %Elaborazione del diagramma di biforcazione.
37     hold on
38     title('Modello 2-dimensionale, diagramma di biforcazione','Interpreter','latex');
39     xlabel("$||\textbf{k}||$",'Interpreter','latex');
40     ylabel("Dispersione $\Re(\lambda(\textbf{k}))$",'Interpreter','latex');
41     k=linspace(0,ext,200);
42     lims=[0,ext,min(lambda(k,p1)),max(lambda(k,p2))];
43     axis(lims);
44     xline(0,'Color','black','Linewidth',0.08);
45     yline(0,'Color','black','Linewidth',0.08);
46     % caso 0<p<p_c
47     fplot(@(k) lambda(k,p1),'Color','blue');
48     text(ext-0.4,lambda(ext-0.2,p1)+0.02,strcat('$p=',num2str(p1),'$'),'Interpreter',
49     'latex');
50     % caso p=p_c
51     fplot(@(k) lambda(k,p_c),'Color','#607d8b');
52     text(ext-0.4,lambda(ext-0.4,p_c)+0.02,strcat('$p=p_c=',num2str(p_c),'$'),'Interpreter
53     ','latex');
54     text(k_c,-0.02,'$k_c$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',8);
55     % caso p>p_c
56     fplot(@(k) lambda(k,p2),'Color','#880e4f');
57     text(ext-0.4,lambda(ext-0.4,p2)+0.02,strcat('$p=',num2str(p2),'$'),'Interpreter',
58     'latex');
59     k1=max(fsolve(@(k) lambda(k,p2),0.02),0);
60     k2=fsolve(@(k) lambda(k,p2),ext);
61     text(k1+0.001,-0.02,'$k_1$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',8);
62     text(k2+0.001,-0.02,'$k_2$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',8);
63     plot([k1,k2],[0,0],'Color','#880e4f','Linestyle',':','Linewidth',1);
64     % legenda
65     lg=legend('','','','','','','',strcat('modi instabili, ','$ \ p = ',num2str(p2),'$'));
66     set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
67     % box dei valori di k1,k2,k_c ricavati
68     text(0.2,lims(3)+0.12,strcat('$k_1 \approx ',num2str(k1),'; \ k_2 \approx ',num2str(k2)
69     ,'$'),'Interpreter','latex','FontSize',8);
70     text(0.2,lims(3)+0.1,strcat('$k_c \approx ',num2str(k_c),'$'),'Interpreter','latex',

```

5.5 Visualizzazione dei pattern di allucinazione

Visto che si è interessati soltanto all'aspetto qualitativo dei *pattern* sono omesse le grandezze sugli assi e l'esplícito calcolo degli autovettori $\mathbf{V}(p_c, k_c)$.

I *pattern* a strisce verticali (30), orizzontali (31), oblique (32) che riportiamo in figura 7 sono realizzati dalla

function **makeStripes**: una matrice Z di soli zeri ed uni, con uni corrispondenti alle coordinate aventi valore delle soluzioni positive è realizzata con l'ausilio della funzione **meshgrid**. L'uso della **spy** consente di mostrarne le posizioni non nulle; la coerenza con l'orientazione del piano cartesiano è raggiunta con **fliplr** che dispone le colonne in maniera specchiata.

L'inversa della mappa retina-corticale è realizzata marcando sul piano complesso gli $z = \frac{1}{2\beta} e^{\alpha^{-1}w}$ corrispondenti ai $w := x + iy$ tali che $Z_{xy} = 1$. Da notare che l'esponenziale complesso mappa valori vicini sulla griglia indotta dalla **meshgrid** in valori potenzialmente molto distanti, questa la ragione della bassa risoluzione ai bordi dell'immagine contro il maggior livello di dettaglio che troviamo al centro (un esempio tangibile è dato dalle spirali nell'ultima immagine a destra della figura 7).

```

1 function makeStripes(a,b,h)
2 %Recupero i valori di biforcazione p_c,k_c
3 [p_c,k_c]=makeBifurcation2(a,b,h,0);
4
5 %Costruisco la griglia di mesh
6 ext=10*2*pi/k_c; % 10 intervalli di periodicità
7 x=linspace(-ext,ext,1000);
8 y=linspace(-ext,ext,1000);
9 [X,Y]=meshgrid(x,y);
10
11 %STRISCE VERTICALI
12 %Evidenzio i valori positivi della soluzione sui punti della griglia
13 figure
14 hold on
15 %title(strcat('Equilibri $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_1):','k_c=',num2str(k_c),'$'),'
16 % Interprete','latex')
16 Z=(cos(k_c*X) >= 0);
17 spy(fliplr(Z));
18 xlabel('$x_1$', 'Interpreter', 'latex');
19 ylabel('$x_2$', 'Interpreter', 'latex');
20 % cancellazione dei valori sugli assi
21 set(gca,'XTick',[]);
22 set(gca,'YTick',[]);
23 % legenda
24 lg=legend('$E\geq 0$');
25 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
26 % salvataggio immagine
27 exportgraphics(gcf,'stripesicortex.jpg','Resolution',300);
28
29 %Calcolo l'immagine sulla retina
30 alpha=1;
31 beta=1;
32 figure
33 hold on
34 axis('equal');
35 %title(strcat('Immagine sulla retina $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_1):','k_c=',num2str(
36 % k_c),'$'),'Interpreter','latex');
36 for l=1:length(Z)
37 if Z(1,l) == 1
38 z_ret=1/(2*beta)*exp(1/alpha.*X(:,l)+i.*Y(:,l));
39 plot(z_ret,'Color',[0, 0.4470, 0.7410]);
40 end
41 end
42 xlabel('$x_1$', 'Interpreter', 'latex');
43 ylabel('$x_2$', 'Interpreter', 'latex');
44 % cancellazione dei valori sugli assi
45 set(gca,'XTick',[]);
46 set(gca,'YTick',[]);
47 % salvataggio immagine
48 exportgraphics(gcf,'stripesiretina.jpg','Resolution',300);
49
50 %STRISCE ORIZZONTALI
51 %Evidenzio i valori positivi della soluzione sui punti della griglia
52 figure
53 hold on
54 %title(strcat('Equilibri $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_2):','k_c=',num2str(k_c),'$'),'
55 % Interprete','latex')
55 Z=(cos(k_c*Y) >= 0);
56 spy(fliplr(Z));
57 xlabel('$x_1$', 'Interpreter', 'latex');
58 ylabel('$x_2$', 'Interpreter', 'latex');
59 % cancellazione dei valori sugli assi

```

```

60 set(gca,'XTick',[]);
61 set(gca,'YTick',[]);
62 % legenda
63 lg=legend('$E\geq 0$');
64 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
65 % salvataggio immagine
66 exportgraphics(gcf,'stripes2cortex.jpg','Resolution',300);
67
68 %Calcolo l'immagine sulla retina
69 alpha=1;
70 beta=1;
71 figure
72 hold on
73 axis([-1e2,1e2,-1e2,1e2]);
74 %title(strcat('Immagine sulla retina $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_2):','k_c=',num2str(
75 for m=1:length(Z)
76 if Z(m,1) == 1
77 z_ret=1/(2*beta)*exp(1/alpha.*X(m,:)+i.*Y(m,:));
78 plot(z_ret,'Color',[0, 0.4470, 0.7410]);
79 end
80 end
81 xlabel('$x_1$', 'Interpreter','latex');
82 ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
83 % cancellazione dei valori sugli assi
84 set(gca,'XTick',[]);
85 set(gca,'YTick',[]);
86 % salvataggio immagine
87 exportgraphics(gcf,'stripes2retina.jpg','Resolution',300);
88
89 %STRISCE OBLIQUE
90 %Necessito di una griglia di mesh più fine.
91 x=linspace(-ext,ext,2000);
92 y=linspace(-ext,ext,2000);
93 [X,Y]=meshgrid(x,y);
94
95 %Evidenzio i valori positivi della soluzione sui punti della griglia
96 figure
97 hold on
98 phi=pi/3;
99 %title(strcat('Equilibri $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_1 \cos(\varphi) + k_c x_2 \sin(\varphi)):', 'k_c=', num2str(k_c), '\varphi=\frac{\pi}{3}', '$'), 'Interpreter','latex')
100 Z=(cos(k_c*X*cos(phi)+k_c*Y*sin(phi)) >= 0);
101 spy(fliplr(Z));
102 xlabel('$x_1$', 'Interpreter','latex');
103 ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
104 % cancellazione dei valori sugli assi
105 set(gca,'XTick',[]);
106 set(gca,'YTick',[]);
107 % legenda
108 lg=legend('$E\geq 0$');
109 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');
110 % salvataggio immagine
111 exportgraphics(gcf,'stripes3cortex.jpg','Resolution',300);
112
113 %Calcolo l'immagine sulla retina
114 alpha=1;
115 beta=1;
116 figure
117 hold on
118 axis([-1e-2,1e-2,-1e-2,1e-2]);
119 %title(strcat('Immagine sulla retina $E(x_1,x_2)\propto \cos(k_c x_1 \cos(\varphi) + k_c x_2 \sin(\varphi)):', 'k_c=', num2str(k_c), '\varphi=\frac{\pi}{3}', '$'), 'Interpreter','latex')
120 for m=1:length(Z)
121 if Z(m,1) == 1
122 z_ret=[];
123 l=0;
124 while l<m
125 z_ret(end+1)=1/(2*beta)*exp(1/alpha.*X(m-l,1:l)+i.*Y(m-l,1:l));
126 l=l+1;
127 end
128 plot(z_ret,'Color',[0, 0.4470, 0.7410]);

```

```

129     end
130 end
131 xlabel('$x_1$', 'Interpreter', 'latex');
132 ylabel('$x_2$', 'Interpreter', 'latex');
133 % cancellazione dei valori sugli assi
134 set(gca, 'XTick', []);
135 set(gca, 'YTick', []);
136 % salvataggio immagine
137 exportgraphics(gcf, 'stripes3retina.jpg', 'Resolution', 300);
138
139 end

```

Patterns a celle quadrate e romboidali di figura 8 sono realizzati dalle functions `makeSquares` e `makeRhombuses`. Per non ripeterci troppo riportiamo soltanto `makeHexagons` che disegna gli esagoni: la novità rispetto alle strisce è data dalla visualizzazione a curve di livello colorata (funzione `contourf`), quest'ultima non richiede `fliplr` a differenza della `spy` mostrandosi automaticamente coerente con la `meshgrid`.

```

1 function makeHexagons(a,b,h)
2 %Recupero i valori di biforcazione p_c,k_c
3 [p_c,k_c]=makeBifurcation2(a,b,h,0);
4
5 %Costruisco la griglia di mesh per la visualizzazione a livelli
6 ext=5*2*pi/k_c; % 5 intervalli di periodicità
7 x=linspace(-ext,ext,1000);
8 y=linspace(-ext,ext,1000);
9 [X,Y]=meshgrid(x,y);
10
11 %Scrivo sulla matrice Z i valori della soluzione.
12 Z=cos(k_c*(sqrt(3)/2.*Y+1/2.*X))+cos(k_c*(sqrt(3)/2.*Y-1/2.*X))+cos(k_c.*X);
13
14 %Visualizzazione dei livelli.
15 figure
16 hold on
17 axis('equal')
18 colormap turbo
19 %title(strcat('$E(x_1,x_2)\propto \cos\left(k_c \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)\right) + \cos\left(k_c \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1\right)\right) + \cos(k_c x_1)$', 'Interpreter', 'latex'));
20 contourf(Z);
21 % cancellazione dei valori sugli assi
22 set(gca, 'XTick', []);
23 set(gca, 'YTick', []);
24 % salvataggio immagine
25 exportgraphics(gcf, 'hexaLevels.jpg', 'Resolution', 300);
26
27 %Costruisco la griglia di mesh per la visualizzazione dei valori positivi
28 %(più piccola)
29 ext=2*2*pi/k_c; % 2 intervalli di periodicità
30 x=linspace(-ext,ext,1000);
31 y=linspace(-ext,ext,1000);
32 [X,Y]=meshgrid(x,y);
33
34 %Scrivo sulla matrice Z i valori della soluzione.
35 Z=cos(k_c*(sqrt(3)/2.*Y+1/2.*X))+cos(k_c*(sqrt(3)/2.*Y-1/2.*X))+cos(k_c.*X);
36
37 %Visualizzazione dei valori positivi
38 figure
39 %title(strcat('$E(x_1,x_2)\propto \cos\left(k_c \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)\right) + \cos\left(k_c \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1\right)\right) + \cos(k_c x_1)$', 'Interpreter', 'latex'));
40 axis('equal');
41 hold on
42 colormap gray
43 Z_sp=(Z >= 0);
44 contour(Z, [-1, -1]);
45 spy(fliplr(Z_sp));
46 xlabel('');
47 % cancellazione dei valori sugli assi
48 set(gca, 'XTick', []);
49 set(gca, 'YTick', []);
50 % legenda
51 lg=legend('','$E\geq 0$');

```

```
52 set(lg,'Interpreter','latex','Location','northeast');  
53 % salvataggio immagine  
54 exportgraphics(gcf,'hexaPositivity.jpg','Resolution',300);  
55 end
```

Riferimenti bibliografici

- [1] Murray J.D., *Mathematical Biology vol.II - Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer (2003).