ОТЧЁТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 10

Уравнения эллиптического типа

(Вариант 9)

Выполнил студент 3 курса ПМиИ
Кондратьев Виталий

Цель работы:
усвоить методы решения ***линейного дифференциального уравнения 2-го порядка эллиптического типа***.

Численное решение дифференциального уравнения в частных производных предполагает получение двумерной числовой таблицы приближенных значений U_{ij} искомой функции $U(x,y)$ с заданной точностью для некоторых значений аргументов

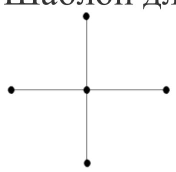
$x_i \in [a, b], y_j \in [c, d]$

Задание.

Решить эллиптическое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

методом 2-го порядка точности.
Сетки по x и по y взять равномерные.
Шаблон для разностной схемы:



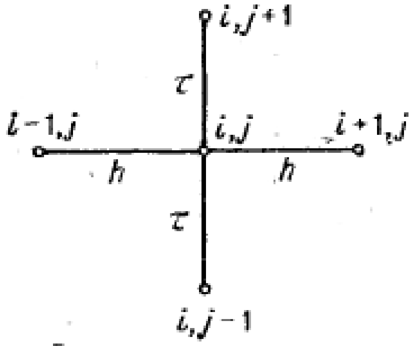
Для решения разностных уравнений применить:
А) метод простой итерации
Б) метод Зейделя
Оценивать погрешность итераций с помощью сравнения двух последовательных приближений.
Взять сетки размерами 5×5 ячеек и 10×10 ячеек и сравнить полученные решения.

Для всех вариантов $[a, b]$ = [0; 10], $[c, d]$ = [0; 10]. Погрешность решения 0,01.
Для всех вариантов граничные условия $U(x,c) = x + c$, $U(x,d) = x + d$,

$$U(a,y) = a + y, \quad U(b,y) = b + y$$

№ вар.	Правая часть
9	$f(x,y) = y(10 - x)$

Рассмотрим уравнение Лапласа:



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2xy$$

Для решения задачи построим трехслойную разностную схему крест. Разностное уравнение, построенное по данной схеме:

$$\frac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^j + u_{i-1}^{j}}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2} = f_i^j$$

$$i = \overline{1, I-1}, \qquad j = \overline{1, J-1}$$

Упрощая данное уравнение, получим:

$$u_{i+1}^{j} + u_{i-1}^{j} + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} - 4u_i^j = h^2 f_i^j$$

Начальные условия:

$$u_i^0 = {\varphi_1}_0^j, \qquad i = \overline{0, I}$$
$$u_i^0 = {\varphi_2}_l^j, \qquad i = \overline{0, I}$$

Граничные условия в сеточном виде:

$$u_0^j = {\psi_1}_0^j, \qquad j = \overline{1, J}$$
$$u_l^j = {\psi_2}_l^j, \qquad j = \overline{1, J}$$

Метод простой итерации

Каждое из уравнений запишем в виде, разрешенном относительно значения u_i^j, в центральном узле:

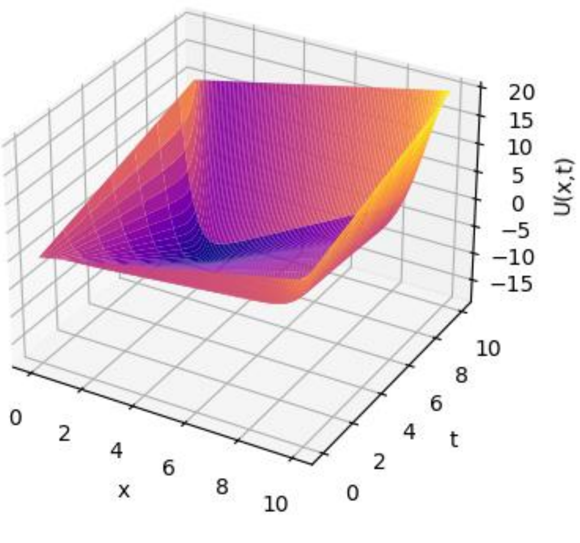
$$u_i^j = \frac{1}{4}\left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} - h^2 f_i^j\right)$$

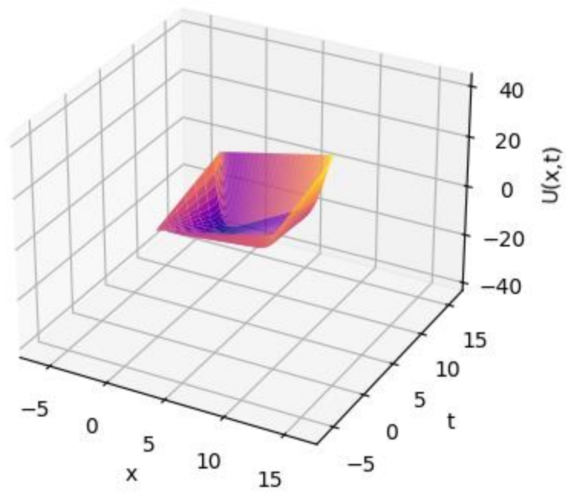
В качестве первого приближения возьмем $u_i^j = 0$. Итерации завершаются при выполнении условия:

$$\max_i \left| U_i^{(k)} - U_i^{(k+1)} \right| < 0{,}01$$

Графики:

Сетка 5×5: Сетка 10×10:





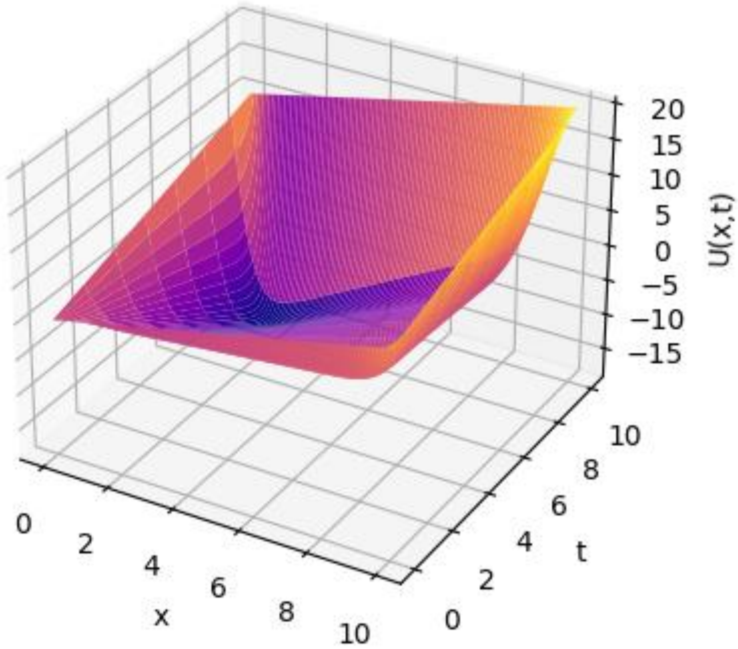
Метод Зейделя

Аналогично с методом простой итерации, в качестве первого приближения возьмем $u_i^j = 0$. Итерации завершаются при выполнении условия:

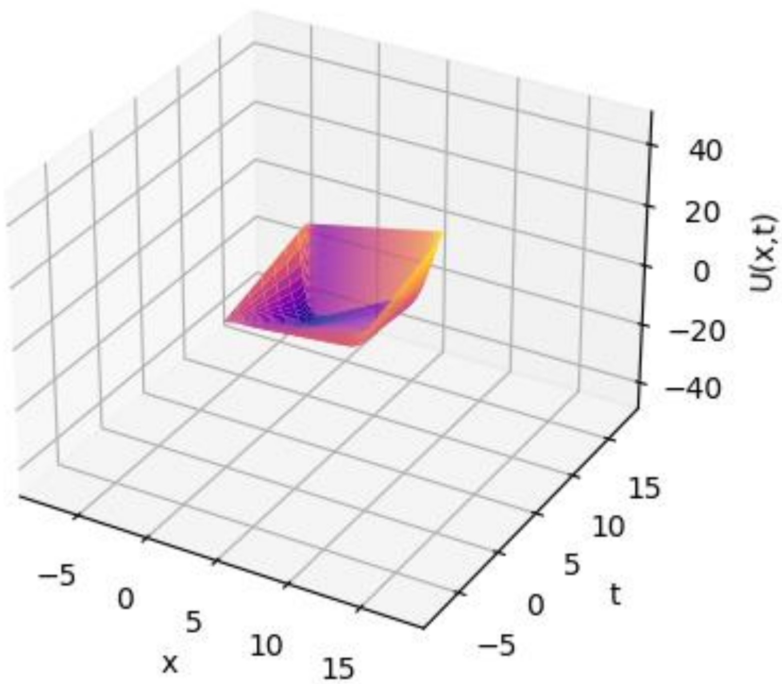
$$\max_i \left| U_i^{(k)} - U_i^{(k+1)} \right| < 0{,}01$$

Графики:

Сетка 5×5:



Сетка 10×10:



ПРИЛОЖЕНИЕ

```
"""
Лабораторная работа №10
Студент ОНК «ИВТ» ВШ КНиИИ направления ПМиИ 3 курса
Кондратьев Виталий
Вариант 9
"""
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt


def Ux0(x):
    return x


def Uxl(x):
    return x + 10


def U0y(y):
    return y


def Uly(y):
    return y + 10


def f(x, y):
    return y * (10-x)


h = 0.1
p = int(10 / h) + 1
U = [0] * p
print(p)

for i in range(p):
    U[i] = [0] * p

for i in range(0, p):
    x = h * i
    U[i][0] = Ux0(x)
    U[i][p - 1] = Uxl(x)

for j in range(1, p):
    y = h * j
    U[0][j] = U0y(y)
    U[p - 1][j] = Uly(y)

Un = [0] * p
for i in range(p):
    Un[i] = [0] * p


while True:
    for i in range(1, p - 1):
        M = 0
        for j in range(1, p - 1):
            x = h * i
            y = h * j
```

```
            Un[i][j] = (U[i + 1][j] + U[i - 1][j] + U[i][j + 1] + U[i][j - 1]
- h * h * f(x, y)) / 4
            d = abs(Un[i][j] - U[i][j])
            if (M < d):
                M = d
    for i in range(1, p - 1):
        for j in range(1, p - 1):
            U[i][j] = Un[i][j]
    if (M < 0.01):
        break

u, v = numpy.mgrid[0:p, 0:p]
x = h * u
y = h * v
z = x - x
for j in range(0, p):
    for i in range(0, p):
        z[i][j] = U[i][j]

fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.50))
axes = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
axes.set_xlabel("x")
axes.set_ylabel("t")
axes.set_zlabel("U(x,t)")
suf = axes.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=15, cmap='plasma',
edgecolor='none')
plt.show()


for i in range(p):
    U[i] = [0] * p

for i in range(0, p):
    x = h * i
    U[i][0] = Ux0(x)
    U[i][p - 1] = Ux1(x)

for j in range(1, p):
    y = h * j
    U[0][j] = U0y(y)
    U[p - 1][j] = U1y(y)

Un = [0] * p
for i in range(p):
    Un[i] = [0] * p


while True:
    for i in range(1, p - 1):
        M = 0
        for j in range(1, p - 1):
            x = h * i
            y = h * j
            Un[i][j] = (U[i + 1][j] + U[i - 1][j] + U[i][j + 1] + U[i][j - 1]
- h * h * f(x, y)) / 4
            d = abs(Un[i][j] - U[i][j])
            if (M < d):
                M = d
    for i in range(1, p - 1):
        for j in range(1, p - 1):
            U[i][j] = Un[i][j]
    if (M < 0.01):
        break
```

```
u, v = numpy.mgrid[0:p, 0:p]
x = h * u
y = h * v
z = x - x
for j in range(0, p):
    for i in range(0, p):
        z[i][j] = U[i][j]

fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.50))
axes = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
axes.set_xlabel("x")
axes.set_ylabel("t")
axes.set_zlabel("U(x,t)")
suf = axes.plot_surface(x, y, z, rstride=1, cstride=15, cmap='plasma',
edgecolor='none')
plt.show()
```