Aufgabe 3: Abbiegen

Richard Wohlbold Team-ID: 00487

31. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Lös u 1.1 1.2	Darstellung des Straßennetzes	2 2 2
2	Ums 2.1	0	3
	$\frac{2.1}{2.2}$	<i>y</i> 1	4
	2.3	0 1 0 0 1	5
	2.4		6
3	Beis	spiele	6
	3.1	Beispiel aus der Aufgabenstellung	6
		3.1.1 Visualisierung	6
			6
		3.1.3 15% Toleranz	6
			6
	3.2	Beispiel 1 von der Website	7
		8	7
			7
			7
			7
	3.3	•	8
		9	8
			8
			8
			8
			8
	3.4	•	9
		8	9
			9
			9
			9
	3.5	0	9
	3.6	<u> </u>	9
	3.7	Zu wenig Parameter	
	3.8	Kein Weg zum Ziel	
		3.8.1 Eingabedatei	
		3.8.2 Visualisierung	
		3.8.3 Ausgabe	0
4	Que	ellcode (ausschnittsweise)	0

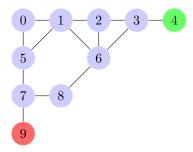


Abbildung 1: Beispiel aus der Aufgabe, als *node-based-graph*, zur Übersichtlichkeit ohne entsprechende Gewichte, repräsentiert. Knoten 9 ist dabei der Ausgangsknoten und Knoten 4 der Zielknoten

1 Lösungsidee

Für die Beantwortung von Bilals Frage muss das Straßennetz zunächst als Datenstruktur repräsentiert werden. Daraufhin arbeite ich mit einer modifizierten Version des Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus, um einen Weg zu finden, dessen Länge innerhalb der gegebenen Grenzen liegt und auf dem so wenig wie möglich abgebogen werden muss.

1.1 Darstellung des Straßennetzes

Straßennetze werden allgemein als gewichtete Graphen, d.h. Mengen von Knoten und Kanten repräsentiert. Grafisch wird ein Knoten dabei das Punkt oder Kreis repräsentiert, eine Kante als Linie zwischen zwei Knoten. Normalerweise entsprechen dabei Knoten den Kreuzungen und Kanten den Straßen zwischen den Kreuzungen, ein sog. node-based-graph [1]. Dabei hat jede Kante ein Gewicht, d.h. einen ihr zugewiesenen numerischen Wert, der meistens dem Zeit entspricht, der für das Befahren aufgewendet wird. In einfachen Szenarien, in denen die Geschwindigkeit auf allen Straßen als konstant angenommen wird, wird oft die Länge der entsprechenden Straße als Gewicht verwendet, wie es in dieser Aufgabe der Fall ist. Das Beispiel aus der Aufgabenstellung ist in Abbildung 1.1 als node-based-graph repräsentiert (ohne Gewichte).

Wenn jedoch auch das Abbiegen miteinbezogen werden soll, wird die Darstellung des Straßennetzes schwieriger. Oft soll beispielsweise auf einer Route weniger abgebogen werden, weshalb Abbiegevorgängen Gewichte zugeordnet werden, sogenannte turn costs [1]. Bei diesen Gewichten stößt die traditionelle Repräsentation der Straßennetze an ihre Grenzen, sodass bei turn costs der Ansatz eines edge-based-graphs gewählt wird. Dabei wird jede Straße als Knoten repräsentiert. Für jede Möglichkeit, von einer Straße auf eine andere zu gelangen, wird eine Kante zwischen den zwei entsprechenden Knoten hinzugefügt. Falls zwischen den Straßen abgebogen werden muss, kann dies entweder als Gewicht der Kante dargestellt werden oder ein einfaches Wahr oder Falsch für jede Kante gespeichert werden. Die Länge jeder Straße muss für einen edge-based-graph für jeden Knoten statt für jede Kante gespeichert werden. Das Beispiel aus der Aufgabe ist in Abbildung 2 als edge-based-graph repräsentiert.

1.2 Finden des optimalen Weges

Das Finden des optimalen Weges löse ich mithilfe einer modifizierten Version des Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus. Dieser benutzt eine PriorityQueue, um Kreuzungen geordnet nach ihrer Distanz zum Ausgangspunkt zu "besuchen". Wird eine Straße "besucht", werden alle Straßen, auf die man ausgehend von dieser Straße gelangen kann, der PriorityQueue mit ihrer Distanz vom Ursprung hinzugefügt. Dabei wird die Distanz vom Ursprung einer Straße aus der Distanz vom Ursprung der gerade besuchten Straße plus die Länge der nächsten Straße berechnet. Wird eine Straße besucht, die an die Zielkreuzung angrenzt, terminiert der Algorithmus und der kürzeste Weg kann rekonstruiert werden. Durch die Verwendung des edge-based-graph kann neben der Distanz vom Urspung jeweils auch die Anzahl an Abbiegevorgängen der PriorityQueue hinzugefügt werden. So kann für jede besuchte Straße auch die Anzahl an Abbiegevorgängen bestimmt werden, die man braucht, um auf sie zu gelangen. Die bereits besuchten Straßen werden einer Menge hinzugefügt. Eine Straße wird nicht besucht, falls sie bereits besucht wurde.

Der erste Schritt meines Programms ist es, den Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus wie oben beschrieben auf den edge-based-graph anzuwenden. Dadurch wird die kürzeste mögliche Distanz und die entsprechende Anzahl an Abbiegevorgängen vom Start zum Ziel n ermittelt.

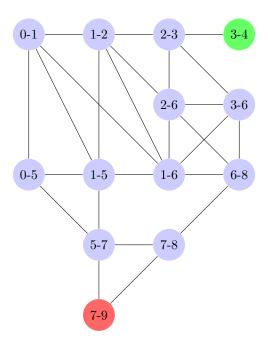


Abbildung 2: Beispiel aus der Aufgabe, als edge-based-graph repräsentiert, hier ohne Gewicht

Im Folgenden soll nun versucht werden, den kürzesten Weg mit einer gewissen Anzahl an Abbiegevorgängen m zu finden. Anfangs ist m = n - 1, falls ein solcher Weg existiert und Bilals Toleranz nicht überschreitet, wird m um jeweils 1 verringert, bis eine der Bedingungen verletzt ist. Dadurch wird der Weg mit der niedrigsten Anzahl an Abbiegevorgängen, der Bilals Anforderungen genügt, gefunden.

Wie auch anfangs, verfolgt die modifizierte Version des Dijkstra-Algorithmus die Anzahl der Abbiegevorgänge, die benötigt werden, um auf eine Straße (zu einem Knoten) zu gelangen. Anders als zuvor fügt jedoch der Algorithmus der PriorityQueue keine Straßen hinzu, für die k>m Mal abgebogen werden muss. Zusätzlich wird es erlaubt, Knoten öfter zu besuchen, sofern bei den neuen Besuchen die Zahl der Abbiegevorgänge auf der Route geringer ist, als vorher. Dazu wird die oben beschriebene Menge so abgeändert, dass sie zusätzlich zur Straße die Anzahl an Abbiegevorgängen speichert.

Somit werden nur Routen gefunden, die maximal m Abbiegevorgänge haben. Auch werden keine Routen ignoriert, die zwar etwas länger sind, aber trotzdem die entsprechende Anzahl an Abbiegevorgängen aufweisen könnten. Von allen Routen, die k Abbiegevorgänge haben, ist die Resultierende aufgrund des Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus auch die Kürzeste.

2 Umsetzung

Ich habe die Lösungsidee in Python 3 umgesetzt.

2.1 Aus der Eingabedatei zum node-based-graph

Dazu wird zuerst die Eingabedatei in einen node-based-graph eingelesen. Die eingelesenen Kreuzungen werden als dict repräsentiert: Dabei erhält jede Kreuzung einen Schlüssel, die sie eindeutig identifiziert. Die Schlüssel der Kreuzung sind jeweils die Schlüssel des dicts. Die Werte des dicts sind die Koordinaten der Kreuzung.

Auch die Straßen werden als dict repräsentiert: Dabei werden als Schüssel der Schlüssel der Startkreuzung der Straße verwendet und als Wert eine Menge mit den Schlüsseln aller Kreuzungen, mit denen die Startkreuzung verbunden ist.

Das Beispiel aus der Aufgabe wird folgendermaßen repräsentiert:

```
1 junctions = {
            0: (0, 0),
            1: (0, 1),
            2: (0, 2),
            3: (0, 3),
            4: (1, 1),
```

```
7 5: (1, 3),
6: (2, 2),
9 7: (2, 3),
8: (3, 3),
11 9: (4, 3)
}

roads = {
15 0: {1},
1: {0, 2, 4},
17 2: {1, 3, 4, 5},
3: {2, 5},
19 4: {1, 2, 6},
5: {2, 3, 6, 7},
21 6: {8, 4, 5, 7},
7: {8, 5, 6},
8: {9, 6, 7},
9: {8}
```

2.2 Vom node-based-graph zum edge-based-graph

Als nächster Schritt wandelt das Programm den node-based-graph in einen edge-based-graph um. Alle Straßen erhalten zuerst einheitliche Namen: Dazu werden die Schlüssel ihrer Start- und Endkreuzungen sortiert und mit einem Unterstrich verbunden. Daraufhin werden sie mit ihrer Länge als Knoten in einem dict (nodes) gespeichert. Die Kanten des edge-based-graphs bilden die Kreuzungen. Dabei wird jede Möglichkeit, auf eine andere Straße zu wechseln, einzeln zusammen mit der Information, ob für diesen Wechsel abgebogen werden muss, gespeichert. Dies geschieht erneut in einem dict, dessen Schlüssel der Name einer Straße bildet. Der Wert ist jeweils eine Liste von tuplen, in denen der Name der nächsten Straße und ob man geradeaus weiterfahren muss, gespeichert ist. Durch die Umwandlung in einen edgebased-graph gibt es nicht mehr nurnoch ein Ziel, sondern eine Menge an Straßen, von denen man das Ziel sofort erreicht. Im Programm wird dies als set repräsentiert, das die Namen aller Straßen, die mit der Zielkreuzung verbunden sind, enthält. Analog wird auch ein set erstellt, das die Namen aller Ausgangsstraßen enthält.

Um herauszufinden, ob man bei einem Straßenwechsel abbiegen muss, wird der Winkel zwischen den beiden Vektoren der Straßen berechnet. Es gilt:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Da $\alpha = 180^{\circ}$

$$\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -1$$

Für das Beispiel aus der Aufgabe sehen die Datenstrukturen folgendermaßen aus (mit Auslassungen):

```
'8_9': 1.0
  edges = {
    ,<sub>0</sub>_1,: {
     ('1<sub>2</sub>', True),
     ('1_4', False)
21
     ('2_5', False),
     ('2_3', True),
     ('2_4', False),
     ('0<sub>-</sub>1', True),
     ('1_4', False)
   1_4': {
     ('2_4', False),
     ('4_6', False),
     ('0<sub>-</sub>1', False),
     ('1_2', False)},
   ,2_3,: {
     ('2_4', False),
     ('1_{-2}', True),
     ('3_5', False),
     ('2_5', False)
  }.
43
   sources = \{'0_1'\}
  targets = { '8_9 '}
```

Im Folgenden wird der Algorithmus aus Abschnitt 1 ausgeführt. Dazu wird eine Funktion dijkstra definiert, der den kürzesten Weg zum Ziel mit höchstens number_turns Abbiegevorgängen findet und zurückgibt. Diese arbeitet mithilfer der PriorityQueue aus dem Paket queue. Ein Element der PriorityQueue ist ein tuple und enthält die bisherige Weglänge (Priorität, mit der die PriorityQueue die Elemente ordnet, nach dem Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus), den vorherigen Knoten des edge-based-graphs sowie der gesamte Weg bis zum Knoten und die Anzahl an Abbiegevorgängen. Wird ein neuer Knoten von dem vorherigen aus erreicht, werden die Gesamtweglänge, der vorherige Knoten, der Gesamtweg und die Anzahl an Abbiegevorgängen entsprechend angepasst und verändert der PriorityQueue hinzugefügt.

Falls auf einem Weg bereits number_turns abgebogen wurde und für den nächsten Knoten ein Abbiegevorgang benötigt wird, wird dieser nicht der PriorityQueue hinzugefügt, sodass nur Wege mit einer Maximalanzahl an Abbiegevorgängen von number_turns zurückgegeben werden können.

Ist die PriorityQueue leer, so existiert kein Weg mit number_turns oder weniger Abbiegevorgängen. Die Funktion dijkstra gibt entsprechend None zurück.

Wird kein Weg mit m Abbiegevorgängen gefunden oder überschreitet dessen Länge Bilals Toleranz, wird der letztgefundene Weg verwendet. Zur Ausgabe müssen die Knoten des edge-based-graphs wieder in Knoten des node-based-graphs umgewandelt werden. Dazu werden die Schlüssel der Knoten des edge-based-graphs aufgeteilt, sodass je zwei Schlüssel des node-based-graphs erhalten werden (siehe oben). Nun wird überprüft, von welcher Kreuzung Bilal auf die Straße fährt und die neue Kreuzung wird an die Liste an Kreuzungsschlüsseln path angehängt. Mithilfe des dicts junctions werden nun den Kreuzungsschlüsseln Koordinaten zugeordnet, die mit der Weglänge und der Anzahl an Abbiegevorgängen ausgegeben werden.

2.3 Visualisierung

Mithilfe des LaTeX-Pakets tikz lassen sich Graphen einfach visualisieren. Im Python-Code ist deshalb auch eine Funktion visualize enthalten, die eine Datei _visualize.tex erstellt, die, durch LaTeXkompiliert, eine grafische Repräsentation der Eingabedatei zeigt. Bei der Visualisierung wird die Startkreuzung grün markiert und die Endkreuzung rot markiert. x und y-Koordinaten können wie im ersten Quadranten in einem Koordinatensystem verwendet werden.

2.4 Laufzeit

Die Laufzeit des Programms ist in allen getesteten Beispielen kein Problem. Selbst für das längste Beispiel benötigt das Programm weniger als 0.2s.

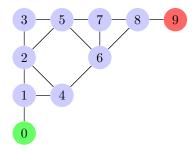
3 Beispiele

Zu jedem Beispiel drucke ich die grafische Repräsentation des Beispiels sowie die Programmausgabe und die Zeit, die zur Ausführung benötigt wird

3.1 Beispiel aus der Aufgabenstellung

Die Ergebnisse des Programms beim Beispiel aus der Aufgabenstellung entsprechen in allen Aspekten der Aufgabenstellung.

3.1.1 Visualisierung



3.1.2 0% Toleranz

```
$ python main.py ../../material/a3-abbiegen/abbiegen0.txt 0
2 Distance 5.83
3 turns
4 (0, 0) -> (0, 1) -> (1, 1) -> (2, 2) -> (3, 3) -> (4, 3)
```

3.1.3 15% Toleranz

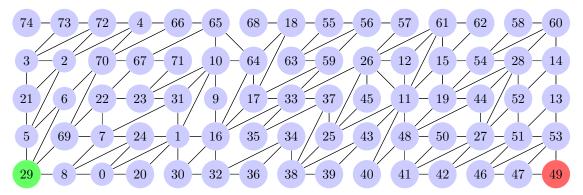
```
$ python main.py ../../material/a3-abbiegen/abbiegen0.txt 15
2 Distance 6.41
2 turns
```

3.1.4 30% Toleranz

```
1 $ python main.py ../../material/a3-abbiegen/abbiegen0.txt 30
Distance 7.0
3 1 turn
(0, 0) -> (0, 1) -> (0, 2) -> (0, 3) -> (1, 3) -> (2, 3) -> (3, 3) -> (4, 3)
```

3.2 Beispiel 1 von der Website

3.2.1 Visualisierung



3.2.2 0% Toleranz

3.2.3 15% Toleranz

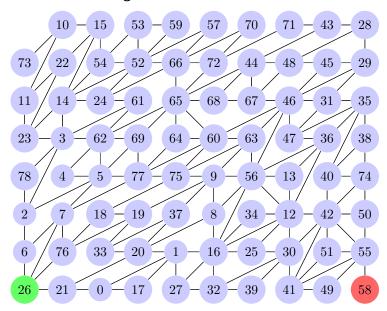
Mit 15% Toleranz lässt sich die Anzahl an Abbiegevorgängen von 6 auf 5 reduzieren:

3.2.4 30% Toleranz

Auch mit 30% Toleranz findet sich kein Weg mit weniger Abbiegevorgängen:

3.3 Beispiel 2 von der Website

3.3.1 Visualisierung



3.3.2 0% Toleranz

```
$ python main.py ../../material/a3-abbiegen/abbiegen2.txt 0
2 Distance 10.89
6 turns
4 (0, 0) -> (1, 0) -> (2, 0) -> (4, 1) -> (5, 1) -> (7, 2) -> (8, 2) -> (9, 1) -> (9, 0)
```

3.3.3 15% Toleranz

Mit 15% Toleranz kann die Anzahl an Abbiegevorgängen von 6 auf 5 verringert werden:

3.3.4 30% Toleranz

Mit 30% Toleranz kann die Anzahl an Abbiegevorgängen von 5 auf 4 verringert werden:

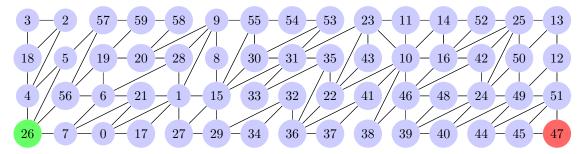
3.3.5 50% Toleranz

Mit 50% Toleranz kann die Anzahl an Abbiegevorgängen von 4 auf 3 verringert werden:

3.4 Beispiel 3 von der Website

Bei diesem Beispiel ist der kürzeste Weg bereits der mit der geringsten Anzahl an Abbiegevorgängen.

3.4.1 Visualisierung



3.4.2 0% Toleranz

3.4.3 15% Toleranz

3.4.4 30% Toleranz

3.5 Eingabedatei existiert nicht

Falls die Eingabedatei nicht existiert, wird ein Fehler zurückgegeben:

3.6 Toleranz keine Zahl oder negativ

Ist die Toleranz keine Zahl oder negativ, wird ein Fehler zurückgegeben:

```
$ python main.py ../../material/a3-abbiegen/abbiegen.txt -1
Usage main.py <filename> <tolerance (percent)>
```

3.7 Zu wenig Parameter

Sind zu wenig Parameter angegeben, wird ein Fehler zurückgegeben:

```
$ python main.py
Usage main.py <filename> <tolerance (percent)>
```

3.8 Kein Weg zum Ziel

Führt kein Weg zum Ziel, wird ein Fehler zurückgegeben.

3.8.1 Eingabedatei

```
Die Eingabedatei error.txt:
```

```
2
2 (0,0)
(1,1)
4 (0,0) (1,0)
(0,1) (1,1)
```

3.8.2 Visualisierung





3.8.3 Ausgabe

Die Programmausgabe:

```
1 $ python main.py error.txt 0
Error: Cannot find any path from source to target in road network!
```

4 Quellcode (ausschnittsweise)

Die Auslassungen belaufen sich auf die Parsen der Parameter und die Visualisierungsfunktion und sind mit . . . gekennzeichnet.

```
import sys
2 import math
  import queue
4 import numpy as np
  import collections
6 import itertools
  from collections import defaultdict
  # Auf wie viele Ziffern wird der Quotient gerundet, wenn ermittelt wird, ob an einer
      \hookrightarrow Kreuzung abgebogen werden muss?
10 FLOAT_ERROR_DIGITS = 8
12 def straight(p1, junc, p2):
      Kann man von Kreuzung Punkt p1 über Kreuzung junc auf Punkt p2 gehen, ohne abbiegen
      \hookrightarrow zu müssen?
      delta1_x = junc[0] - p1[0]
delta1_y = junc[1] - p1[1]
      delta_1 = distance(p1, junc)
18
       delta2_x = p2[0] - junc[0]
```

```
delta2_y = p2[1] - junc[1]
      delta_2 = distance(p2, junc)
      return abs(round((delta1_x*delta2_x+delta1_y*delta2_y)/(delta_1*delta_2), FLOAT_ERROR
24
      → _DIGITS))==1
26 def distance(p1, p2):
      Berechnet die Distanz von Punkt p1 zu Punkt p2
      return math.sqrt((p1[0]-p2[0])**2+(p1[1]-p2[1])**2)
32 def format_roadnode(j1, j2):
      Knoten eines edge-based-graphs (Straße), der im node-based-graph eine Kante zwischen
      \hookrightarrow zwei Knoten war, als str repräsentieren
      if j1 < j2:
          return '{}_{}'.format(j1, j2)
      return '{}_{}'.format(j2, j1)
40 def get_roadnode(n):
      Die Knoten des node-based-graphs ermitteln, zwischen denen der Knoten n des edge-
      \hookrightarrow based-graphs liegt
      return tuple(map(int, n.split("_")))
46 def build_graph(junctions, roads, source_junction, target_junction):
      Den node-based-graph aus den Kreuzungen junctions, den Straßen roads, dem Start
      \hookrightarrow source_junction und dem Ziel target_junction in einen edge-based-graph umwandeln
      nodes = dict()
50
      edges = collections.defaultdict(set)
      for source in roads:
          for target in roads[source]:
              nodes[format_roadnode(source, target)] = distance(junctions[source],
      → junctions[target])
      for junction in junctions:
           for comb in itertools.combinations(roads[junction], 2):
              pos0 = junctions[comb[0]]
60
               posj = junctions[junction]
               pos1 = junctions[comb[1]]
               s = straight(pos0, posj, pos1)
62
              r0 = format_roadnode(comb[0], junction)
               r1 = format_roadnode(comb[1], junction)
              edges[r0].add((r1, s))
               edges[r1].add((r0, s))
66
68
      sources = set()
      for next_junction in roads[source_junction]:
70
          sources.add(format_roadnode(source_junction, next_junction))
      targets = set()
      for last_junction in roads[target_junction]:
74
          targets.add(format_roadnode(target_junction, last_junction))
76
      return nodes, edges, sources, targets
80 def dijkstra(nodes, edges, sources, targets, number_turns=None):
      Den Dijkstra-Shortest-Path-Algorithmus mit der maximalen Anzahl an Abbiegevorgängen
      → number_turns auf dem gegebenen edge-based-graph ausführen (siehe Dokumentation)
      pq = queue.PriorityQueue()
      for source in sources:
          pq.put((0, source, [source], 0))
86
```

```
discovered = {}
       while True:
           if pq.empty():
               return None, None, None
           prio, node, prev, turns = pq.get()
           if node in discovered and turns >= discovered[node]:
94
                continue
96
           discovered[node] = turns
           for edge in edges[node]:
                prio_new = prio + nodes[edge[0]]
                if not edge[1]:
                    if turns == number_turns:
                        continue
                pq.put((prio_new, edge[0], prev + [edge[0]], turns + (1 if not edge[1] else
104
       → 0)))
           if node in targets:
106
                break
       distance = 0
       for step in prev:
           distance += nodes[step]
       if number_turns is not None and turns != number_turns:
           return None, None, None
114
       return prev, distance, turns
118 def parse_tuple(t):
       Einen tuple aus ints aus einem str einlesen
       return tuple(map(int, t.replace('(', '')).replace(')', '')).split(",")))
124 def parse_input(file):
       Die Eingabedatei einlesen und in einen node-based-graph umwandeln
126
       with open(file) as f:
128
           lines = f.read().split("\n")
           start_coords = parse_tuple(lines[1])
           end_coords = parse_tuple(lines[2])
           lines_roads = lines[3:]
           junctions = {}
134
           roads = defaultdict(set)
           junction_to_id = {}
           i = 0
138
           for line_road in lines_roads:
                if line_road != "":
                    line_road_split = line_road.split("")
                    a = parse_tuple(line_road_split[0])
                    b = parse_tuple(line_road_split[1])
142
                    if a not in junction_to_id:
                        junction_to_id[a] = i
144
                        junctions[i] = a
                        i += 1
146
                    if b not in junction_to_id:
                        junction_to_id[b] = i
                        junctions[i] = b
                        i += 1
                    id_a = junction_to_id[a]
id_b = junction_to_id[b]
                    roads[id_a].add(id_b)
                    roads[id_b].add(id_a)
154
           start = junction_to_id[start_coords]
           end = junction_to_id[end_coords]
       return junctions, roads, start, end
158
   def visualize(junctions, roads, start, end):
```

```
160
        . . .
162 if __name__ == '__main__':
164
        junctions, roads, source, target = parse_input(sys.argv[1])
        visualize(junctions, roads, source, target)
166
        nodes, edges, sources, targets = build_graph(junctions, roads, source, target)
        min_path, min_distance, max_turns = dijkstra(nodes, edges, sources, targets)
168
        if min_path is None:
             \textbf{print("Error:} \bot \texttt{Cannot} \bot \texttt{find} \bot \texttt{any} \bot \texttt{path} \bot \texttt{from} \bot \texttt{source} \bot \texttt{to} \bot \texttt{target} \bot \texttt{in} \bot \texttt{road} \bot \texttt{network!")}
             exit(1)
172
        less_turns = 0
        while True:
174
             path, distance, turns = dijkstra(nodes, edges, sources, targets, number_turns=max
           _turns-less_turns)
176
             if path is None or distance > min_distance * (1 + tolerance/100):
178
             res_path, res_distance, res_turns = path, distance, turns
             less_turns += 1
182
        path = [source]
        for road in res_path:
184
             j1, j2 = get_roadnode(road)
             if path[-1] == j1:
186
                 path.append(j2)
                  path.append(j1)
190
        print("Distance", round(res_distance, 2))
192
        if res_turns == 1:
             print(res_turns, "turn")
194
             print(res_turns, "turns")
        print('u->u'.join(map(lambda j: str(junctions[j]), path)))
                                                   tikz/code.py
```

Literatur

[1] Robert Geisberger und Christian Vetter. "Efficient Routing in Road Networks with Turn Costs". In: International Symposium on Experimental Algorithms. 2011. URL: https://algo2.iti.kit.edu/download/urn_ch.pdf.