

```
# Exercise 5.1.
```

가정:  $(B = v_1, \dots, v_n)$ 은  $(\mathbb{R}^n)$ 의 직교 기저이다.  $(B)$ 가  $(\mathbb{R}^n)$ 의 기저임을 보여라. (4점)

```
# Exercise 5.2.
```

가정:  $(A \in \mathbb{R}^{(n \times n)})$ 는 직교 행렬이다. 다음을 보여라:

a) 임의의  $(x \in \mathbb{R}^n)$ 에 대해:  $(|Ax| = |x|)$ ,

b) 임의의  $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ 에 대해:  $(\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle)$ . (8점)

```
# Exercise 5.3.
```

가정:  $\{ (s_{\tau} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n) \}$  는  $\{x\}$  의 항목을  $\{\tau\}$  만큼 순환적으로 이동시키는 함수로,  $(s_{\tau}(x) := (x_{\tau}, x_{\tau+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{\tau-1})^T)$ .

a) 행렬  $\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 를 구성하라.

b)  $\backslash (S_{\tau} \backslash)$ 는 어떤 성질을 가지는가? 올바른 모든 선택지를 표시하라 (그리고 단지 그것들만):

- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 정사각 행렬이다,
- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 대칭 행렬이다,
- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 가역 행렬이다,
- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 직교 행렬이다,
- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 항등 행렬의 배수이다,
- ☐  $\backslash(S\backslash)$ 는 그래프의 인접 행렬일 수 있다. (6점)

```
# Exercise 5.4.
```

가정:  $\{v^1(1), \ldots, v^n(n)\}$ 는  $\mathbb{R}^n$ 의 직교 정규 기저이다. 임의의  $x \in \mathbb{R}^n$ 에 대해,  $y \in \mathbb{R}^n$ 을  $x$ 를  $v^1(1), \ldots, v^n(n)$ 에 대한 계수 벡터 나타낸다 (즉,  $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ )이며  $\langle$

a) 다음을 보여라:  $\setminus (|y| = |x|) \setminus$ .

b)  $\forall (\tilde{y} := \sum_{j=1}^k y_j \quad v^{(\{j\})} \quad \forall (k < n) \quad \forall)$ 라고 하며,  $\forall (\sum_{j=1}^k (y_j)^2 \geq 0.9 \sum_{j=1}^n (y_j)^2 \quad \forall)$ 를 가정하자.  $\forall (\tilde{y})$ 와  $\forall (y)$ 를 비교하여 무엇을 말할 수 있는가? (6점)

```
# Exercise 5.5.
```

가정:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 이다.  $(\lambda \in \mathbb{R})$ 가  $(A)$ 의 고유값임을 보이기 위해서는  $(\lambda)$ 가 다음 방정식을 만족해야 한다:

$$\backslash[\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \backslash]$$

이 방정식의 해를 계산하는 공식을 제시하라. (4점)

```
# Exercise 5.6.
```

가정:  $(A \in \mathbb{R}^{(m \times n)})$ 는 정사각 행렬이다.

a) 행렬  $(B \in \mathbb{R}^{n \times m})$ 가 존재한다고 가정하자 (즉, 행과 열의 수가 각각 바뀌었다!)  $(BA = I \in \mathbb{R}^{n \times n})$ 는  $(n \times n)$  항등 행렬이다; 이러한 행렬  $(B)$ 는  $(A)$ 의 왼쪽 역행렬이라고 한다. 모든  $(b \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b)$

이 해를 가지는지 보여라. 해는 반드시 유일한가. 아니면 여러 개일 수 있는가? (3점)

b)  $\forall (A \in \mathbb{R}^{n \times n})$ 라고 하자.  $(A)$ 가 가역임을 보이기 위해서는 모든  $(b \in \mathbb{R}^n)$ 에 대해 선형 방정식 시스템  $(Ax = b)$ 가 정확히 하나의 해  $(x \in \mathbb{R}^n)$ 를 가지는지 보여라. (6점)

c)  $(A \in m \times n)$ 라고 하며,  $(A)$ 에 기본 행 연산을 적용하여 행 계단형 행렬  $(A')$ 를 얻는다고 가정하자.

다음 두 명제를 고려하라:

(i) 임의의  $(b \in \mathbb{R}^m)$ 에 대해, 방정식 시스템  $(Ax = b)$ 은 해  $(x \in \mathbb{R}^n)$ 를 가지며;

(11) 행렬  $(A')$ 의 계수는  $(m)$ 이며, 즉, 정확히  $(m)$ 개의 주요 원소를 가진다.

이 두 명제가 동치임을 보여라, 즉, 하나가 다른 하나를 함의함을 보여라. 또한 (ii)가  $(m \leq n)$ 을 함의함을 보여라. (7점)

d)  $\setminus(A)$ 와  $\setminus(A')$ 는 Part c)에서와 같이 정의한다고 가정하자. 다음 두 명제를 고려하라:

(iii) 임의의  $(b \in \mathbb{R}^m)$ 에 대해, 방정식 시스템  $(Ax = b)$ 는 정확히 하나의 해  $(x \in \mathbb{R}^n)$ 를 가지며;

(iv)  $\lambda(m = n)$ 이며, 행렬  $\lambda(A')$ 의 계수는  $\lambda(n)$ 이며,  $\lambda(n)$ 개의 대각선 상의 비제로 항목, 대각선 아래의 항목은 0이며, 대각선 위의 항목은 임의의 값이 가능하다 (즉,  $\lambda(A')$ 의 항목  $a'(ij)$ 는  $a(i1) \neq 0$ 이고  $a(i1) = 0$   $\lambda(i > j)$ ),  $1 \leq i \leq n$ ).

명제 (iii)와 (iv)가 동치임을 보여라. (6점)

**Note:** The bounding box coordinates for the image were not included in the provided text.