우리는 대체를 수행합니다: $s = \frac{1-r^n}{1+r^n}$, 그리고 결과적인 적분

$$4\int_0^1 (e^{-as} - e^{-a/s})(1-s)^{-1+1/n}(1+s)^{-1-1/n}ds$$

에서 $(0, a^{1/2})$ 구간 이외의 모든 것을 제외합니다. 그러면 대수적 인자들을 상수로 대체할 수 있으며, 결정해야 할 양은 다음보다 큽니다:

$$K_3\int_0^{a^{1/2}} (e^{-a} - e^{-a/s})ds.$$

각 구간 $[(j-1)a, ja]$ (j = 1, 2, $\cdots$, $[a^{-1/2}]$)를 따로 고려합니다. j번째 구간에서 적분의 최솟값은 다음과 같습니다:

$$e^{-a} - e^{-a/j} > -a + j^{-1} - j^{-2},$$

따라서 적분의 값은 다음보다 큽니다:

$$a\sum_{j=1}^{[a^{-1/2}]} [-a + j^{-1} - j^{-2}] > K_4 a|\log a|.$$

이제 $k = 2, 3, \cdots$에 대해 $a_k = k^{-1}(\log k)^{-3/2}$라고 하고,

$$f(z) = \exp\left(-\sum a_k \frac{1+z^n k}{1-z^n k}\right).$$

만약 $n_k \to \infty$가 충분히 빠르게 이루어진다면, f는 다시 원하는 성질을 갖게 됩니다.

참고문헌

1. S. N. Mergeljan, On an integral connected with analytic functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15(1951), 395-400. (러시아어)
2. W. Rudin, The radial variation of analytic functions, Duke Math. J. 22(1955), 235-242.

미시간 대학교