

Exercise 5.1.

가정: $\langle B = v_1, \dots, v_n \rangle$ 은 $\langle \mathbb{R}^n \rangle$ 의 직교 기저이다. $\langle B \rangle$ 가 $\langle \mathbb{R}^n \rangle$ 의 기저임을 보여라. (4점)

Exercise 5.2.

가정: $\langle A \in \mathbb{R}^{n \times n} \rangle$ 는 직교 행렬이다. 다음을 보여라:

a) 임의의 $\langle x \in \mathbb{R}^n \rangle$ 에 대해: $\langle |Ax| = |x| \rangle$,

b) 임의의 $\langle x, y \in \mathbb{R}^n \rangle$ 에 대해: $\langle \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \rangle$. (8점)

Exercise 5.3.

가정: $\langle s_\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rangle$ 는 $\langle x \rangle$ 의 항복을 $\langle \tau \rangle$ 만큼 순환적으로 이동시키는 함수로, $\langle s_\tau(x) := (x_1, x_{\tau+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{\tau-1})^T \rangle$.

a) 행렬 $\langle S_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n} \rangle$ 를 구성하라.

b) $\langle S_\tau \rangle$ 는 어떤 성질을 가지는가? 올바른 모든 선택지를 표시하라 (그리고 단지 그것들만):

- $\langle S \rangle$ 는 정사각 행렬이다,
- $\langle S \rangle$ 는 대칭 행렬이다,
- $\langle S \rangle$ 는 가역 행렬이다,
- $\langle S \rangle$ 는 직교 행렬이다,
- $\langle S \rangle$ 는 항등 행렬의 배수이다,
- $\langle S \rangle$ 는 그래프의 인접 행렬일 수 있다. (6점)

Exercise 5.4.

가정: $\langle v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \rangle$ 는 $\langle \mathbb{R}^n \rangle$ 의 직교 정규 기저이다. 임의의 $\langle x \in \mathbb{R}^n \rangle$ 에 대해, $\langle y \in \mathbb{R}^n \rangle$ 를 $\langle x \rangle$ 를 $\langle v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \rangle$ 에 대한 계수 벡터로 나타낸다 (즉, $\langle y = (y_1, \dots, y_n)^T \rangle$)이며 $\langle y \rangle$ 에

a) 다음을 보여라: $\langle |y| = |x| \rangle$.

b) $\langle \tilde{y} := \sum_{j=1}^k y_j v^{(j)} \rangle$ ($k < n$) 라고 하며, $\langle \sum_{j=1}^k (y_j)^2 \geq 0.9 \sum_{j=1}^n (y_j)^2 \rangle$ 를 가정하자. $\langle |\tilde{y}| \rangle$ 와 $\langle |y| \rangle$ 를 비교하여 무엇을 말할 수 있는가? (6점)

Exercise 5.5.

가정: $\langle A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \rangle$ 이다. $\langle \lambda \in \mathbb{R} \rangle$ 가 $\langle A \rangle$ 의 고윳값임을 보이기 위해서는 $\langle \lambda \rangle$ 가 다음 방정식을 만족해야 한다:
 $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$.

이 방정식의 해를 계산하는 공식을 제시하라. (4점)

Exercise 5.6.

가정: $\langle A \in \mathbb{R}^{m \times n} \rangle$ 는 정사각 행렬이다.

a) 행렬 $\langle B \in \mathbb{R}^{n \times m} \rangle$ 가 존재한다고 가정하자 (즉, 행과 열의 수가 각각 바뀌었다!) $\langle BA = I \in \mathbb{R}^{n \times n} \rangle$ 는 $\langle n \times n \rangle$ 항등 행렬이다; 이러한 행렬 $\langle B \rangle$ 는 $\langle A \rangle$ 의 왼쪽 역행렬이라고 한다. 모든 $\langle Ax = b \rangle$

이 해를 가지는지 보여라. 해는 반드시 유일한가. 아니면 여러 개일 수 있는가? (3점)

b) $\langle A \in \mathbb{R}^{n \times n} \rangle$ 라고 하자. $\langle A \rangle$ 가 가역임을 보이기 위해서는 모든 $\langle b \in \mathbb{R}^n \rangle$ 에 대해 선형 방정식 시스템 $\langle Ax = b \rangle$ 가 정확히 하나의 해 $\langle x \in \mathbb{R}^n \rangle$ 를 가지는지 보여라. (6점)

c) $\langle A \in \mathbb{R}^{m \times n} \rangle$ 라고 하며, $\langle A \rangle$ 에 기본 행 연산을 적용하여 행 계단형 행렬 $\langle A' \rangle$ 를 얻는다고 가정하자.

다음 두 명제를 고려하라:

(i) 임의의 $\langle b \in \mathbb{R}^m \rangle$ 에 대해, 방정식 시스템 $\langle Ax = b \rangle$ 은 해 $\langle x \in \mathbb{R}^n \rangle$ 를 가지며;

(ii) 행렬 $\langle A' \rangle$ 의 계수는 $\langle m \rangle$ 이며, 즉, 정확히 $\langle m \rangle$ 개의 주요 원소를 가진다.

이 두 명제가 동치임을 보여라, 즉, 하나가 다른 하나를 함의함을 보여라. 또한 (ii)가 $\langle m \leq n \rangle$ 을 함의함을 보여라. (7점)

d) $\langle A \rangle$ 와 $\langle A' \rangle$ 는 Part c) 에서와 같이 정의한다고 가정하자. 다음 두 명제를 고려하라:

(iii) 임의의 $\langle b \in \mathbb{R}^m \rangle$ 에 대해, 방정식 시스템 $\langle Ax = b \rangle$ 는 정확히 하나의 해 $\langle x \in \mathbb{R}^n \rangle$ 를 가지며;

(iv) $\langle m = n \rangle$ 이며, 행렬 $\langle A' \rangle$ 의 계수는 $\langle n \rangle$ 이며, $\langle n \rangle$ 개의 대각선 상의 비례로 항복, 대각선 아래의 항복은 0이며, 대각선 위의 항복은 임의의 값이 가능하다 (즉, $\langle A' \rangle$ 의 항복 $\$ a'(ij) \$$ 는 $a(ii) \$ \neq 0 \$$ 이고 $a(iii) \$ = 0 \$$ ($i > j$)), $1 \$ \neq 1 \$$

명제 (iii) 와 (iv) 가 동치임을 보여라. (6점)

Note: The bounding box coordinates for the image were not included in the provided text.