偏微分方程数值解法　春季学期　2017
第六次作业 4.7-4.13　　　　　　　　　　　　姓名: ________________

1. (*30 points*) 求解扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1\quad t>0$$
$$u(x,0)=\sin\pi x,\quad u(0,t)=u(1,t)=0$$

a) 分别采用 Crank-Nicolson 格式, Du Fort-Frankel 格式和 BDF2 格式;

b) 取 $h=0.05$，选择不同的时间步长 τ. 当 $r=\tau/h^2=0.5,1.5,2.5$ 时，分别计算 $t=0.037125,0.07425,0.111375,0.1485$ 时刻 u 的值，并作出曲线.

Note:

1) 该问题的精确解为

$$u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin\pi x.$$

2) 如果 $(n-1)\tau<t_{end}<n\tau$ (n 为整数)，则最后一步计算的时间步长 > 可以为 $t_{end}-(n-1)\tau$.

2. (*70 points*) 数值求解对流扩散方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x\in[-1,1], t>0\\ u(x,0)=-\sin(\pi x)\\ u(-1,t)=u(1,t)=0\end{cases}$$

其中对流速度 $c=1$. 粘性系数分别取 $\nu=\frac{1}{10\pi},\frac{1}{\pi}$. 给出 $t=0.2,0.4,0.6,0.8,1.0,1.6,2.0$ 时 u 的分布.

1) 空间步长 $h=0.1,0.05,0.025,0.0125$;

2) 采用中心显式格式、修正中心显式格式、迎风显式格式，Samarskii 和指数格式（本次作业只用完成中心显式格式和修正中心显式格式）;

3) 采用 Crank-Nicolson 格式进行计算;

4) 应采用多个时间步长进行实验，且显式格式给出最大的稳定时间步长，并以此时间步长进行计算;

5) 与分析解进行比较.

Note: 方程的分析解

$$\begin{aligned}u(x,t)=&16\pi^2\nu^3 c e^{\frac{c}{2\nu}(x-\frac{ct}{2})}\\ &\times\left[\sinh\left(\frac{c}{2\nu}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n\sin(n\pi x)e^{-\nu n^2\pi^2 t}}{c^4+8(c\pi\nu)^2(n^2+1)+16(\pi\nu)^4(n^2-1)^2}\right.\\ &\left.+\cosh\left(\frac{c}{2\nu}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)\cos(\frac{2n+1}{2}\pi x)e^{-\nu\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 t}}{c^4+(c\pi\nu)^2(8n^2+8n+10)+(\pi\nu)^4(4n^2+4n-3)^2}\right]\end{aligned}$$