偏微分方程数值解法

椭圆型方程求解

刘 瑜

March 17, 2017

Outline

- 椭圆型方程的差分离散格式
  - 两点边值问题
  - Laplace 方程
  - Possion 方程
- 线性方程组的迭代解法
  - 简单迭代算法

椭圆型方程描述的是平衡问题，属于纯粹的边值问题.
在很多情形中，椭圆型方程是非定常问题的极限情形.
比如描述的问题增加时间维度，即增加时间导数项 ∂t 或 $\partial^2/\partial t^2$，即可转化为时间演化问题.
椭圆型方程的求解方法在抛物型和双曲型方程的求解中亦能用到.

Outline

椭圆型方程的差分离散格式

- 两点边值问题
- Laplace 方程
- Possion 方程

线性方程组的迭代解法

- 简单迭代算法

考虑两点边值问题

$$\frac{d}{dx}K(x)\frac{dU}{dx} = r(x), \quad 0 < x < L$$
$$U(0) = U_0, U(L) = U_L$$

其中 $K(x), r(x)$ 是可微的，因而上述方程等价为

$$K\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{dK}{dx}\frac{dU}{dx} = r$$

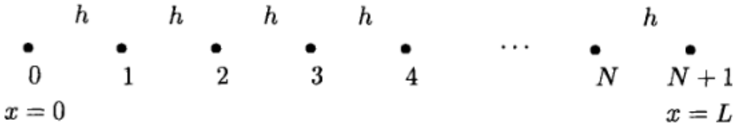

Figure: 一维网格节点

对于内点，采用二阶中心差分离散二阶和一阶导数

$$K_i \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + (dK/dx)_i \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = r_i$$

整理可得

$$\left(\frac{K_i}{h^2} + \frac{dK/dx}{2h}\right) U_{i+1} - 2\frac{K_i}{h^2} U_i + \left(\frac{K_i}{h^2} - \frac{dK/dx}{2h}\right) U_{i-1} = r_i$$

或者，可以表示为

$$A_i U_{i-1} + B_i U_i + C_i U_{i+1} = D_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

边界条件处理

Dirichlet 条件：$U(0) = U_0, U(L) = U_L$

$$B_1 U_1 + C_1 U_2 = r_1 - A_1 U_0$$
$$A_N U_{N-1} + B_N U_N = r_N - C_N U_L$$

Neumann 条件：$dU/dx(0) = a, dU/dx(L) = b$

采用一阶差分近似边界导数

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = a, or \quad U_0 = U_1 - ah$$
$$\frac{U_{N+1} - U_N}{h} = b, or \quad U_{N+1} = U_N + hb$$

二阶近似，分别采用前向、后向差分

$$\frac{-3U_0 + 4U_1 - U_2}{2h} = a$$
$$\frac{3U_{N+1} - 4U_N + U_{N-1}}{2h} = b$$

Shadow node 方法

(1) 节点 N 位于右边界 $x=L$，节点 $N+1$ 向边界外延拓一个网格

二阶中心差分格式

$$\frac{U_{N+1}-U_{N-1}}{2h}=b$$

(2) 边界位于 N 和 $N+1$ 节点中间

$$\frac{U_{N+1}-U_{N}}{h}=b$$

方程和边界条件离散后得到了三对角的线性方程组，对方程组的求解：
(1) 直接求逆
(2) 追赶法 (Thomas 算法)

Outline

椭圆型方程的差分离散格式

- 两点边值问题
- Laplace 方程
- Possion 方程

线性方程组的迭代解法

- 简单迭代算法

考虑定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x, y < 1$$
$$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0, u(x,1) = \sin \pi x.$$

五点格式

$$\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{h^2}=0$$

其截断误差为

$$T_{i,j}=\frac{h^2}{12}(u_{xxxx}+u_{yyyy})|_{i,j}+O(h^4).$$

因此，差分方程的精度为 2 阶. 差分方程可以改写为

$$4u_{i,j}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}$$

九点格式

$$\frac{1}{6h^2}[4u_{i+1,j}+4u_{i-1,j}+4u_{i,j+1}+4u_{i,j-1}$$
$$+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j}]=0$$

其截断误差为

$$T_{i,j}=\frac{h^2}{12}(u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy})|_{i,j}+O(h^4)=\frac{h^2}{12}\Delta^2 u|_{i,j}+O(h^4).$$

注意到，对于 Laplace 方程

$$\Delta u=0, \quad \Delta^2 u=0,$$

因此差分方程的精度为 4 阶. 差分方程可以改写为

$$20u_{i,j}=4u_{i+1,j}+4u_{i-1,j}+4u_{i,j+1}+4u_{i,j-1}$$
$$+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}$$

取网格间距 $\Delta x = \Delta y = h = 1/3$，由五点格式可以得到如下方程组

$$
\begin{aligned}
u_{0,1} + u_{1,0} + u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{1,1} &= 0 \\
u_{1,1} + u_{2,0} + u_{3,1} + u_{2,2} - 4u_{2,1} &= 0 \\
u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,3} - 4u_{1,2} &= 0 \\
u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{2,3} - 4u_{2,2} &= 0
\end{aligned}
$$

其中边界上的值 $u_{0,1}, u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,1}, u_{0,2}, u_{1,3}, u_{3,2}, u_{2,3}$ 已知.
内部网格点上的值，按照自然排序，记为
$\mathbf{x} = (u_{1,1}, u_{2,1}, u_{1,2}, u_{22})^T$. 方程组表示为矩阵的形式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} u_{0,1} + u_{1,0} \\ u_{2,0} + u_{3,1} \\ u_{0,2} + u_{1,3} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$

由九点格式得到

$$
\begin{aligned}
20u_{1,1} - 4(u_{2,1} + u_{1,2}) - u_{2,2} &= u_{0,2} + u_{0,0} + u_{2,0} + 4(u_{0,1} + u_{1,0}) \\
20u_{2,1} - 4(u_{1,1} + u_{2,2}) - u_{1,2} &= u_{1,0} + u_{3,0} + u_{3,2} + 4(u_{2,0} + u_{3,1}) \\
20u_{1,2} - 4(u_{1,1} + u_{2,2}) - u_{2,1} &= u_{0,3} + u_{0,1} + u_{2,3} + 4(u_{0,2} + u_{1,3}) \\
20u_{2,2} - 4(u_{2,1} + u_{1,2}) - u_{1,1} &= u_{1,3} + u_{3,1} + u_{3,3} + 4(u_{3,2} + u_{2,3})
\end{aligned}
$$

表示为矩阵形式

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & 20 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} u_{0,2} + u_{0,0} + u_{2,0} + 4(u_{0,1} + u_{1,0}) \\ u_{1,0} + u_{3,0} + u_{3,2} + 4(u_{2,0} + u_{3,1}) \\ u_{0,3} + u_{0,1} + u_{2,3} + 4(u_{0,2} + u_{1,3}) \\ u_{1,3} + u_{3,1} + u_{3,3} + 4(u_{3,2} + u_{2,3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.
$$

计算线性方程组，得到
五点格式的解为：$\mathbf{x} = (\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16})^T \approx$
$(0.108253, 0.108253, 0.32476, 0.32476)^T$,
九点格式的解为：$\mathbf{x} = (\frac{25}{154\sqrt{3}}, \frac{25}{154\sqrt{3}}, \frac{40}{77\sqrt{3}}, \frac{40}{77\sqrt{3}})^T \approx$
$(0.0937257, 0.0937257, 0.299922, 0.299922)^T$,
定解问题的精确解为

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi x \sinh \pi y}{\sinh \pi}$$

从而 $\mathbf{x}$ 的精确解为
$\mathbf{x} = (\frac{\sqrt{3}\sinh\frac{\pi}{3}}{\sinh \pi}, \frac{\sqrt{3}\sinh\frac{\pi}{3}}{\sinh \pi}, \frac{\sqrt{3}\sinh\frac{2\pi}{3}}{\sinh \pi}, \frac{\sqrt{3}\sinh\frac{2\pi}{3}}{\sinh \pi})^T \approx$
$(0.0936885, 0.0936885, 0.299857, 0.299857)^T$.

如果 $h=1/4$，由五点格式得到方程组

$$
\begin{aligned}
u_{0,1}+u_{1,0}+u_{2,1}+u_{1,2}-4u_{1,1}&=0\\
u_{1,1}+u_{2,0}+u_{3,1}+u_{2,2}-4u_{2,1}&=0\\
u_{2,1}+u_{3,0}+u_{4,1}+u_{3,2}-4u_{3,1}&=0\\
u_{0,2}+u_{1,1}+u_{2,2}+u_{1,3}-4u_{1,2}&=0\\
u_{1,2}+u_{2,1}+u_{3,2}+u_{2,3}-4u_{2,2}&=0\\
u_{2,2}+u_{3,1}+u_{4,2}+u_{3,3}-4u_{3,2}&=0\\
u_{0,3}+u_{1,2}+u_{2,3}+u_{1,4}-4u_{1,3}&=0\\
u_{1,3}+u_{2,2}+u_{3,3}+u_{2,4}-4u_{2,3}&=0\\
u_{2,3}+u_{3,2}+u_{4,3}+u_{3,4}-4u_{3,3}&=0
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} u_{0,1}+u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0}+u_{4,1} \\ u_{0,2} \\ 0 \\ u_{4,2} \\ u_{0,3}+u_{1,4} \\ u_{2,4} \\ u_{4,3}+u_{3,4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1/224(6+5\sqrt{2}) \\ 1/112(5+3\sqrt{2}) \\ 1/224(6+5\sqrt{2}) \\ 1/16(1+\sqrt{2}) \\ 1/16(2+\sqrt{2}) \\ 1/16(1+\sqrt{2}) \\ 1/224(22+37\sqrt{2}) \\ 1/112(37+11\sqrt{2}) \\ 1/224(22+37\sqrt{2}) \end{bmatrix}.$$

计算值 $u(1/2,1/2)\approx 0.213388$, 精确解 $u(1/2,1/2)\approx 0.199268$.
$u(1/4,1/4)=0.058353$, $u(1/3,1/3)\approx$
$2/3u(1/4,1.4)+1/3u(1/2,1/2)=0.110031$

由九点格式得到

$$4(u_{0,1}+u_{1,0}+u_{2,1}+u_{1,2})+u_{0,2}+u_{0,0}+u_{2,0}+u_{2,2}-20u_{1,1}=0$$
$$4(u_{1,1}+u_{2,0}+u_{3,1}+u_{2,2})+u_{1,2}+u_{1,0}+u_{3,0}+u_{3,2}-20u_{2,1}=0$$
$$4(u_{2,1}+u_{3,0}+u_{4,1}+u_{3,2})+u_{2,2}+u_{2,0}+u_{4,0}+u_{4,2}-20u_{3,1}=0$$
$$4(u_{0,2}+u_{1,1}+u_{2,2}+u_{1,3})+u_{0,3}+u_{0,1}+u_{2,1}+u_{2,3}-20u_{1,2}=0$$
$$4(u_{1,2}+u_{2,1}+u_{3,2}+u_{2,3})+u_{1,3}+u_{1,1}+u_{3,1}+u_{3,3}-20u_{2,2}=0$$
$$4(u_{2,2}+u_{3,1}+u_{4,2}+u_{3,3})+u_{2,3}+u_{2,1}+u_{4,1}+u_{4,3}-20u_{3,2}=0$$
$$4(u_{0,3}+u_{1,2}+u_{2,3}+u_{1,4})+u_{0,4}+u_{0,2}+u_{2,2}+u_{2,4}-20u_{1,3}=0$$
$$4(u_{1,3}+u_{2,2}+u_{3,3}+u_{2,4})+u_{1,4}+u_{1,2}+u_{3,2}+u_{3,4}-20u_{2,3}=0$$
$$4(u_{2,3}+u_{3,2}+u_{4,3}+u_{3,4})+u_{2,4}+u_{2,2}+u_{4,2}+u_{4,4}-20u_{3,3}=0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & -4 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & -4 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 20 & -4 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & -4 & 20 & -4 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -4 & 20 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 & -4 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4(u_{0,1} + u_{1,0}) + u_{0,2} + u_{0,0} + u_{2,0} \\ 4u_{2,0} + u_{1,0} + u_{3,0} \\ 4(u_{3,0} + u_{4,1}) + u_{2,0} + u_{4,0} + u_{4,2} \\ 4u_{0,2} + u_{0,3} + u_{0,1} \\ 0 \\ 4u_{4,2} + u_{4,1} + u_{4,3} \\ 4(u_{0,3} + u_{1,4}) + u_{0,4} + u_{0,2} + u_{2,4} \\ 4u_{2,4} + u_{1,4} + u_{3,4} \\ 4(u_{3,4} + u_{4,3}) + u_{2,4} + u_{4,2} + u_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + 2\sqrt{2} \\ 4 + \sqrt{2} \\ 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (2601 + 1891\sqrt{2})/99176 \\ (3782 + 2601\sqrt{2})/99176 \\ (2601 + 1891\sqrt{2})/99176 \\ (144 + 113\sqrt{2})/2156 \\ (113 + 72\sqrt{2})/1078 \\ (144 + 113\sqrt{2})/2156 \\ (3(4101 + 4583\sqrt{2}))/99176 \\ (3(9166 + 4101\sqrt{2}))/99176 \\ (3(4101 + 4583\sqrt{2}))/99176 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0531911 \\ 0.0752235 \\ 0.0531911 \\ 0.140912 \\ 0.19928 \\ 0.140912 \\ 0.320108 \\ 0.452701 \\ 0.320108 \end{bmatrix}$$

Table: 五点格式和九点格式精度比较

	5-points scheme	9-points scheme	analytical solution
(0.25,0.25)	0.058353	0.053191	0.0531871
(0.50,0.25)	0.082523	0.075223	0.0752178
(0.25,0.50)	0.150888	0.140912	0.1409041
(0.50,0.50)	0.213388	0.199280	0.1992681
(0.25,0.75)	0.331812	0.320108	0.3200991
(0.50,0.75)	0.469253	0.452701	0.4526881

Outline

椭圆型方程的差分离散格式

两点边值问题

Laplace 方程

Possion 方程

线性方程组的迭代解法

简单迭代算法

考虑定解问题

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=f(x,y),\quad 0<x,y<1\\ u(x,0)&=f_1(x),u(x,1)=f_2(x)\\ u(0,y)&=g_1(y),u(1,y)=g_2(y).\end{aligned}$$

五点格式

$$\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{h^2}=f_{i,j}$$

其截断误差为

$$T_{i,j}=(u_{xx}+u_{yy})|_{i,j}-f_{i,j}+\frac{h^2}{12}(u_{xxxx}+u_{yyyy})|_{i,j}+O(h^4).$$

因此，差分方程的精度为 2 阶. 差分方程可以改写为

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=h^2 f_{i,j}$$

九点格式

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6h^2}[&4u_{i+1,j}+4u_{i-1,j}+4u_{i,j+1}+4u_{i,j-1}\\
&+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j}]=f_{i,j}
\end{aligned}
$$

其截断误差为

$$
T_{i,j}=(u_{xx}+u_{yy})|_{i,j}-f_{i,j}+\frac{h^2}{12}(u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy})|_{i,j}+O(h^4).
$$

注意到，若 f 是调谐函数，即 $\Delta f=0$，则

$$
\Delta^2 u=\Delta f=0,
$$

因此差分方程的精度为 4 阶，否则只有二阶精度. 差分方程可以改写为

$$
\begin{aligned}
4(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}\\
+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j}=6h^2f_{i,j}
\end{aligned}
$$

构造如下的差分格式

$$\begin{aligned}\frac{1}{6h^2}&[4(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})\\&+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j}]\\&=f_{i,j}+\frac{h^2}{12}\Delta f(x_i,y_j)\end{aligned}$$

用五点差分格式离散 $\Delta f(x_i, y_j)$，则差分方程具有四阶精度.
差分方程为

$$\begin{aligned}4(u_{i+1,j}&+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}\\&+u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}-20u_{i,j}\\&=\frac{h^2}{2}(f_{i+1,j}+f_{i-1,j}+f_{i,j+1}+f_{i,j-1}+8f_{i,j})\end{aligned}$$

由五点差分格式离散具有 *Dirichlet* 边界条件的 *Possion* 方程得到的线性方程组为

$$\mathbf{A}_5\mathbf{x} = \mathbf{b}_5$$

其中

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & T & -I \\ & & & -I & T \end{bmatrix}.$$

由九点差分格式离散具有 *Dirichlet* 边界条件的 *Possion* 方程得到的线性方程组为

$$\mathbf{A}_9\mathbf{x} = \mathbf{b}_9$$

其中

$$\mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} T_1 & -T_2 & & & \\ -T_2 & T_1 & -T_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -T_2 & T_1 & -T_2 \\ & & & -T_2 & T_1 \end{bmatrix}.$$

Outline

椭圆型方程的差分离散格式

两点边值问题

Laplace 方程

Possion 方程

线性方程组的迭代解法

简单迭代算法

Jacobi 迭代

(1) 将线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

改写为

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} -a_{ij}x_j + b_i\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

(2) 任意选择一组初始近似值 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$，作为方程的第 0 次近似解.
(3) 依次使 $k = 1, 2, 3, \cdots$，用公式

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} -a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

求出方程的第 k 次近似解，直至满足

$$\max_{1\leq i\leq n}|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}|<\epsilon$$

其中 ϵ 是预先给定的允许误差.

考虑 $Possion$ 方程的五点差分格式

$$u_{ii} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}}{4}$$

Jacobi 迭代公式表示为

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 f_{i,j}}{4}$$

对于前例中的 Laplace 方程，用 Jacobi 迭代求解

$$u_{11}^{(k+1)} = \frac{u_{21}^{(k)} + u_{12}^{(k)} + u_{01} + u_{10}}{4}$$

$$u_{21}^{(k+1)} = \frac{u_{11}^{(k)} + u_{22}^{(k)} + u_{20} + u_{31}}{4}$$

$$u_{12}^{(k+1)} = \frac{u_{22}^{(k)} + u_{11}^{(k)} + u_{13} + u_{02}}{4}$$

$$u_{22}^{(k+1)} = \frac{u_{12}^{(k)} + u_{21}^{(k)} + u_{23} + u_{32}}{4}$$

取初始估计值 $(u_{11}^{(0)}, u_{21}^{(0)}, u_{12}^{(0)}, u_{22}^{(0)})^T = (0, 0, 0, 0)^T$.

Table: Jacobi 迭代过程

k	u_{11}	u_{22}
0	0	0
1	0	0.216506
2	0.0541266	0.270633
3	0.0811899	0.297696
4	0.0947215	0.311228
5	0.101487	0.321377
6	0.106562	0.323068
7	0.107407	0.323914
8	0.10783	0.324337
9	0.108042	0.324548
10	0.108147	0.324654
11	0.1082	0.324707
12	0.108227	0.324746

Gauss-Seidel 迭代

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Table: Gauss-Seidel 迭代过程

k	u_{11}	u_{21}	u_{12}	u_{22}
0	0	0	0	0
1	0	0	0.216506	0.270633
2	0.0541266	0.0811899	0.297696	0.311228
3	0.0947215	0.101487	0.317994	0.321377
4	0.10487	0.106562	0.323068	0.323914
5	0.107407	0.10783	0.324337	0.324548
6	0.108042	0.108147	0.324654	0.324707
7	0.1082	0.108227	0.324733	0.324746
8	0.10824	0.108247	0.324753	0.324756
9	0.10825	0.108252	0.324758	0.324759
10	0.108252	0.108253	0.324759	0.324759
11	0.108253	0.108253	0.324759	0.324759
12	0.108253	0.108253	0.32476	0.32476
13	0.108253	0.108253	0.32476	0.32476

Successive Over Relaxation, SOR

$$x_i^{(k)} = \omega \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right) + (1-\omega) x_i^{k-1}$$

其中 ω 为松弛因子，一般取 1.5~2.