

1. (30 points) 分析求解二维和三维扩散方程的 Peaceman-Rachford 格式的稳定性.

2. (70 points) 数值求解二维扩散方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, 0 < x, y < 1, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \exp(x + y), 0 < x, y < 1 \\ u(0, y, t) = \exp(y + 2t) \\ u(1, y, t) = \exp(1 + y + 2t) \\ u(x, 0, t) = \exp(x + 2t) \\ u(x, 1, t) = \exp(1 + x + 2t) \end{array} \right.$$

(1) 空间步长  $h = 0.02$ ;

(2) 分别采用 ADI 格式 (Peaceman-Rachford, Douglas, 预测-校正格式)、Crank-Nicolson 格式和 FTCS 格式;

(3) 给出  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  时  $u$  的分布. 列表给出在点  $(0.1, 0.1), (0.2, 0.2), (0.3, 0.3), (0.4, 0.4), (0.5, 0.5), (0.6, 0.6), (0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)$  处的计算值及其误差. 隐式格式  $r = \frac{\tau}{h^2} = 0.5$ , 显式格式  $r = 0.2$ .

(4) 对于隐式格式, 增加时间步长, 观察格式的稳定性.

Note: 方程的分析解  $u = \exp(x + y + 2t)$ .