

# 偏微分方程数值解法

## 引 论

刘 瑜

March 2, 2017

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

- 基本概念

- 偏微分方程推导实例

- 定解问题

- 方程分类

## 有限差分方法基础

- 偏导数的差商近似

- 有限差分算子

- 误差

# 为什么研究偏微分方程数值求解

- ▶ 数学物理问题大多数由偏微分方程描述  
连续介质力学（流体力学，固体力学），电磁理论，量子力学，...
- ▶ 实际中遇到的偏微分方程几乎找不到理论解，只能数值求解
- ▶ ...

# 世界上最快的计算机



Figure: 神威太湖之光

# 千万核可扩展全球大气动力学全隐式模拟

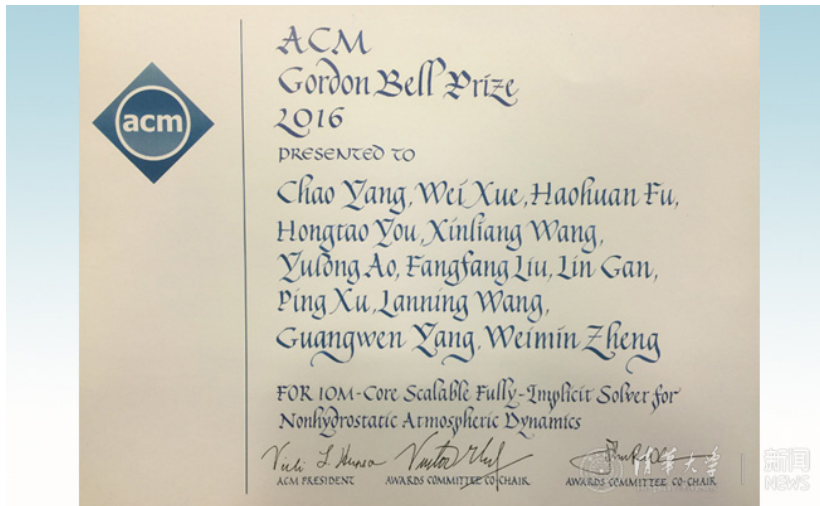


Figure: 2016 戈登·贝尔奖/中科院，清华大学

# 大气动力学控制方程

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{u}\rho_0) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u^l}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho_0 u^l) &= \rho_0 \left( -\frac{\partial \pi'}{\partial x^l} + g \frac{\Theta'}{\Theta_0} \delta_{l3} \right) \\ \frac{\rho_0 \Theta'}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho_0 \Theta') &= -\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_e\end{aligned}$$

其中： $\rho$  密度， $\mathbf{u}$  速度， $\Theta$  温度， $\pi = p/p_0$  归一化压力

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

- 基本概念

- 偏微分方程推导实例

- 定解问题

- 方程分类

## 有限差分方法基础

- 偏导数的差商近似

- 有限差分算子

- 误差

# 偏微分方程的基本概念

偏微分方程的定义: 包含变量偏导数的方程

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n}) = 0$$

其中,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ .

Notes:

- ▶ 如果  $x_i$  是空间变量, 即在特定的空间区域  $\Omega$  求解变量  $u$ , 需要在边界  $\partial\Omega$  上指定边界条件
- ▶ 如果  $x_i$  中有一个变量为时间  $t$ , 则还需要指定初始条件, 即在  $t = t_0$  时刻指定  $\Omega$  中每一点的值
- ▶ 偏微分方程组指未知变量  $(u_1, \dots, u_m)$  大于 1 个, 并且至少有一个偏微分方程含有多于 1 个变量



# 偏微分方程的基本概念

偏微分方程的阶数 指所包含偏导数的最高阶数.

线性 和 非线性 方程

定义微分算子  $\mathcal{L}$ , 偏微分方程可以表示为:

$$\mathcal{L}u = f$$

$f=0$ , 称方程是齐次 的, 否则称为非齐次 的.

线性 要求  $F$  对  $u$  及其导数项都是线性的, 即满足

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v), \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$$

非线性方程可以分为:

(1) 半线性方程 semilinear equations

方程  $F$  只对  $u$  是非线性的.

(2) 准线性方程 quasi-linear equations

方程  $F$  对  $u$  的最高阶导数项是线性的.

(3) 完全非线性方程 fully-nonlinear equations

方程  $F$  对最高阶导数项是非线性的.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(M - u)$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0\quad (x\in\mathbb{R}^2)$$

$$|\nabla u| = c(\mathbf{x})$$

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

基本概念

偏微分方程推导实例

定解问题

方程分类

## 有限差分方法基础

偏导数的差商近似

有限差分算子

误差

## 偏微分方程的推导

例：热传导方程

令  $u(x, y, z, t)$  表示温度,  $H(t)$  表示所研究区域  $\Omega$  所包含的热量,

$$H(t) = \iiint_{\Omega} c\rho u dx dy dz,$$

其中,  $c$  表示物质的比热,  $\rho$  为物质的密度, 都假定为常数, 且不考虑内部热源. 热量的变化率为  $\frac{dH}{dt} = \iiint_{\Omega} c\rho u_t dx dy dz$ . 根据能

量守恒定律和 *Fourier* 定律,

$$\frac{dH}{dt} = \iint_{\partial\Omega} (\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla u) dS,$$

其中  $\kappa$  为热传导系数. 由散度定理,

$$\iiint_{\Omega} c\rho u_t dx dy dz = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa \nabla u) dx dy dz$$

因此热传导方程的微分形式为

$$c\rho u_t = \nabla \cdot (\kappa \nabla u)$$

对流输运方程

流体以常速度  $\mathbf{c}$  运动, 在这种流体中含有某种污染物, 污染物跟随流体运动, 其密度由  $u(x, y, z, t)$  表示, 不考虑污染物的扩散.

在固定的区域  $\Omega$  内, 污染物的质量为

$$\iiint_{\Omega} u dx dy dz.$$

不考虑源和汇的影响, 在  $\Omega$  内污染物质量的变化应由进出该区域的污染物的质量决定, 即

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} u dx dy dz = - \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) u dS,$$

其中  $\mathbf{n}$  为面元外法向. 应用散度定理, 最终可得到对流输运方程的微分形式为

$$u_t + \nabla \cdot (\mathbf{c}u) = 0.$$

对于一维问题, 方程可以表示为

$$u_t + cu_x = 0.$$

# 几个典型的偏微分方程

- ▶ Laplace 方程

$$\Delta u = 0$$

- ▶ Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

给出了复自变量  $z = x + iy$  的解析函数  
 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

- ▶ Poisson 方程

$$-\Delta u = f(\mathbf{x})$$

一般形式

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_i} k_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = F(\mathbf{x})$$

► 扩散方程、传热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + F(\mathbf{x}, t)$$

其中,  $u(\mathbf{x}, t)$  表示扩散过程中某种物质的浓度或者固体中的温度,  $k_i(\mathbf{x})$  是扩散系数或热传导系数。当  $k_i = a = \text{const.}$  时

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \Delta u + F(\mathbf{x}, t).$$

► 对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) u = F$$

其中  $u = u(\mathbf{x}, t)$ ,  $F = F(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{a}$  为对流速度  
一维情形

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = F$$



► 对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u + k\Delta u = F$$

二维情形

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + k\Delta u = F$$

► 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F$$

► 重调和方程

$$\Delta^2 u = 0$$

► Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + Vu$$

其中  $u$  表示波函数,  $m$  为粒子质量,  $\hbar = h/2\pi$ ,  $V$  为势函数.

# 非线性偏微分方程

## ► 二维速度势方程

$$(1 - c^{-2}\phi_x^2)\phi_{xx} - 2c^{-2}\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1 - c^{-2}\phi_y^2)\phi_{yy} = 0$$

其中  $\phi_x = u, \phi_y = v$ .

## ► 三维不可压 Navier-Stokes 方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0\end{aligned}$$

其中,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  为速度,  $p$  为压力,  $\rho$  为密度,  $\nu$  为粘性系数.

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

- 基本概念

- 偏微分方程推导实例

- 定解问题

- 方程分类

## 有限差分方法基础

- 偏导数的差商近似

- 有限差分算子

- 误差

# 定解问题

在特定条件下对偏微分方程进行求解，这些条件成为定解条件。  
给出了方程和定解条件，就构成了一个定解问题。

初始条件：在初始时刻  $t_0$  给定物理量的值。

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x}),$$

其中  $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x, y, z)$ 。

对于热传导方程，即给定初始时刻的温度分布。

对于波动方程，需要给定一对初始条件

$$u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x}),$$

其中  $\phi(\mathbf{x})$  为初始位置， $\psi(\mathbf{x})$  为初始速度。

## 边界条件

在偏微分方程成立的区域  $\Omega$  的边界  $\partial\Omega$  上需要满足的条件.

三类最重要的边界条件:

(D) 指定  $u$  的值 (*Dirichlet* 条件)

(N) 指定法向导数  $\partial u / \partial n$  (*Neumann* 条件)

(R) 指定  $\partial u / \partial n + au$  (*Robin* 条件)

例: 一维热传导问题,  $u(x, t)$  表示温度

如果物体的左边界  $x = 0$  是完全绝热的, 右边界浸没在很大的容器中, 容器的温度为  $g(t)$ , 且物体和容器之间的热交换所需的时间可以忽略, 则边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(l, t) = g(t)$$

如果物体与容器间的热交换满足牛顿冷却定律, 则右边界条件应为

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -a[u(l, t) - g(t)],$$

其中  $a > 0$ . 这是非齐次 *Robin* 条件.

例：边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), x \in \Omega, \\ u = g(x), x \in \partial\Omega \end{cases}$$

例：一维初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), x \in (0, l), t > 0, \\ u|_{x=0} = \varphi_1(t), u|_{x=l} = \varphi_2(t), t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), u_t|_{t=0} = h(x) x \in (0, l), \end{cases}$$

其中  $a > 0$ .

# 偏微分方程的适定性

偏微分方程定解问题的适定性 (well-posedness) 的定义 (Jacques Hadamard, 1865-1963):

如果定解问题的解满足以下准则:

- (1) 存在性. 有解存在.
- (2) 唯一性. 存在唯一解.
- (3) 稳定性. 若方程或定解条件发生小的改变, 则解也只会发生小的改变. 则称定解问题是适定的, 否则是不适定的 (ill-posed).

例: 定解问题

$$u_{xy} = 0, \quad x \in [0, 1], y \in [0, 1]$$

$$u(x, 0) = f(x), u(x, 1) = g(x)$$

$$u(0, y) = m(y), u(1, y) = n(y)$$

如果  $f(x) \neq g'(x)$ , 则定解问题是不适定的.



# Outline

## 偏微分方程基础回顾

- 基本概念

- 偏微分方程推导实例

- 定解问题

- 方程分类

## 有限差分方法基础

- 偏导数的差商近似

- 有限差分算子

- 误差

## 二阶拟线性方程

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

其中  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  和  $f$  可以是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数, 也可以是  $u$  和  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  的函数.

定义矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ .

## 二阶拟线性方程的分类

假设  $a_{ij} = a_{ji}$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  的对称阵. 如果在点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\mathbf{A}$  正定或负定 (特征值全同号)  $\iff$  椭圆型方程

$\mathbf{A}$  的特征值至少有一个为 0  $\iff$  抛物型方程

$\mathbf{A}$  的特征值非 0 且有  $n-1$  个同号  $\iff$  双曲型方程

如果在  $\mathbb{R}^n$  的某个区域  $\Omega$  内, 对每点的  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 偏微分方程都属于同一类型, 就称该方程在  $\Omega$  是该类型的. 如果方程在  $\Omega$  的不同子区域属于不同类型, 方程就称在  $\Omega$  是混合型的.

例: 判断方程  $4u_{xx} + u_{yy} + 4u_{yz} + 4u_{zz} = 0$  的类型

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ , 计算特征值为  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$ , 故方程为抛物型.

## 两个自变量的二阶偏微分方程

设  $u = u(x, y)$ , 其中  $y$  可以是时间变量  $t$ , 记  $p = (u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ , 则二阶拟线性偏微分方程可以写成

$$a(x, y, p) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y, p) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y, p) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, p) = 0$$

如果对于固定的  $(x, y, u)$ ,  $ac - b^2 > 0$ , 方程是椭圆型;  
 $ac - b^2 < 0$ , 方程是双曲型;  $ac - b^2 = 0$ , 方程是抛物型.

例: *Tricomi* 方程  $u_{xx} + xu_{yy} + u = 0$

$ac - b^2 = x$ . 当  $x > 0$  时, 方程为椭圆型; 当  $x < 0$  时, 方程为双曲型; 当  $x = 0$  时, 方程为抛物型.

# 高阶方程转化为一阶方程组

波动方程:

$$u(x, t)_{tt} - \gamma^2 u(x, t)_{xx} = 0$$

$$u(x, t)_{tt} - \gamma^2 u(x, t)_{xx} = (\partial_t + \gamma \partial_x)(\partial_t - \gamma \partial_x)u(x, t) = 0$$

其中  $\partial_t \equiv \partial/\partial t, \partial_x \equiv \partial/\partial x$ , 令  $(\partial_t - \gamma \partial_x)u(x, t) = v(x, t)$ , 从而得到一阶方程组

$$(\partial_t - \gamma \partial_x)u(x, t) = v(x, t),$$

$$(\partial_t + \gamma \partial_x)v(x, t) = 0$$

Laplace 方程

$$\partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) = 0$$

令  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = v(x, y)$ ,  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = w(x, y)$ , 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}\end{aligned}$$

以上称为 *Cauchy – Riemann* 方程

对流扩散方程

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$ , 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + cv &= D \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= v \end{aligned}$$

# 一阶线性偏微分方程组的分类

设  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ . 向量函数  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ . 其中  $u_i = u_i(x, y), i = 1, 2, \dots, n$ . 又已知  $\mathbf{h}(x, y), \mathbf{u}$  连续, 矩阵函数  $\mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 则方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{A}(x, y, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{h}(x, y, \mathbf{u}) = 0,$$

在某点  $(x, y, \mathbf{u})$  的类型可由以下方法判定:

当  $\mathbf{A}$  无实特征值时, 椭圆型;

当  $\mathbf{A}$  所有的特征值都是实的, 且有  $n$  个线性无关的特征向量, 则为双曲型; 如果还满足不存在相同的实特征值, 则方程称为严格双曲型;

当  $\mathbf{A}$  的特征值为实, 但是线性无关的特征向量小于  $n$  时, 方程为抛物型.



波动方程可以表示为一阶线性偏微分方程组

$$\mathbf{u}_t(x, t) + \mathbf{A}\mathbf{u}_x(x, t) = \mathbf{C}\mathbf{u}(x, t)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

求特征值

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 - \gamma^2 = 0$$

$\lambda = \pm\gamma$ , 方程为双曲型.

对流扩散方程可以表示为一阶方程组：

$$\begin{aligned} D \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - cv &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - v &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_t(x, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_x(x, t) = \mathbf{C}\mathbf{u}(x, t)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将方程乘以  $\mathbf{A}^{-1}$ ，得到

$$\mathbf{u}_t(x, t) + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{u}_x(x, t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{u}(x, t)$$

计算  $\hat{\mathbf{A}}$  的特征值  $\lambda_{1,2} = 0$ ，特征向量  $\mathbf{r} = (1, 0)^T$ ，故方程为抛物型。

例：考虑可压缩气体的无旋、无黏、二维定常流动. 如果流场只是在自由来流条件的基础上由一轻微扰动，例如绕小攻角薄物体的流动，当自由来流是亚声速或超声速流动时，控制该流动的方程可以简化为

$$\begin{aligned}(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

其中， $u', v'$  为气体的扰动速度. 将方程改写为

$$\begin{bmatrix} 1 - M_\infty^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} = 0,$$

其中  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ .

进一步的, 通过矩阵求逆, 方程可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} = 0$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1-M_\infty^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

计算可得  $\mathbf{A}$  的特征值为

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

由此可知, 当  $M_\infty < 1$  时, 即来流为亚声速时, 方程为椭圆型;  
当来流为超声速时方程为双曲型.

# 特征线方法-几何观点

线性对流方程

$$au_x + bu_y = 0$$

上式可以表示为

$$(a, b) \cdot (u_x, u_y) = 0, \text{ or } (a, b) \cdot \Delta u = 0$$

意味着在方向  $(a, b)$  上, 函数  $u$  的方向导数为 0. 与  $(a, b)$  方向平行的曲线为

$$bx - ay = c$$

其中  $c$  为参数,  $c$  的取值决定了曲线. 在这条曲线上, 显然  $u$  的值将保持不变, 故

$$u(x, y) = f(c) = f(bx - ay)$$

## 特征线方法-特征坐标

特征线法的关键在于将偏微分方程变换为常微分方程.  
采用坐标变换:

$$\begin{cases} \xi = ax + by \\ \eta = bx - ay \end{cases}$$

在这一坐标系下

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = au_\xi + bu_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = bu_\xi - au_\eta.$$

从而

$$0 = au_x + bu_y = a(au_\xi + bu_\eta) + b(bu_\xi - au_\eta) = (a^2 + b^2)u_\xi$$

故

$$u_\xi = 0$$

方程的解为

$$u(\xi, \eta) = f(\eta)$$

即  $u(x, y) = f(bx - ay)$ .

# 特征线法-Lagrange 方法

对于 2 个自变量的一阶拟线性方程

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

Lagrange 方法大意:

1. 写出特征方程

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

2. 通过上式, 找到函数  $\Phi(x, y, u), \Psi(x, y, u)$ , 使其满足

$$d\Psi = d\Phi = 0$$

3. 方程的通解为

$$F(\Phi, \Psi) = 0,$$

其中  $F$  为任意函数.

对于线性对流方程, 特征方程

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{0}$$

显然, 可以取  $d\Phi = u$ . 由于

$$ady - bdx = d(ay - bx) = 0$$

故取  $\Psi = ay - bx$ . 方程的解满足

$$F(ay - bx, u) = 0,$$

$F$  是任意函数. 因此方程的通解为

$$u = f(bx - ay)$$



例：求解初值问题

$$xu_x + yu_y = u + 1 \quad \text{with} \quad u(x, y) = x^2 \quad \text{on} \quad y = x^2.$$

解：特征方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u+1}$$

由  $ydx - xdy = 0$ , 可以得到  $d(x/y) = 0$ .

由  $xdu - (u+1)dx$ , 可以得到  $d(u+1)/x = 0$ . 因此

$$F(x/y, (u+1)/x) = 0$$

从而

$$u(x, y) = xf(x/y) - 1$$

根据已知条件

$$x^2 = f(x/x^2) - 1$$

因此

$$f(x) = x + x^{-1}$$

故方程的解为

$$u(x, y) = x^2/y + y - 1.$$

例：求解 Burges 方程

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 \quad u(x, 0) = g(x).$$

解：根据特征方程

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

显然  $du = 0$ ，且  $d(x - ut) = 0$ . 因此通解为

$$F(u, x - ut) = 0, \quad u = f(x - ut)$$

根据初始条件  $f = g$ ，因此方程的解为

$$u = g(x - ut)$$

## 线性二阶偏微分方程的特征线

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u(x, y) = G(x, y)$$

假设特征线方程  $y = h(x)$ , 令  $\phi(x, y) = y - h(x)$ , 则特征方程为:

$$A(x, y)\phi(x, y)_x^2 + 2B(x, y)\phi(x, y)_{xy}^2 + C(x, y)\phi(x, y)_y^2 = 0$$

其中. 假设  $A(x, y) \neq 0$ , 将上式因式分解

$$A(\phi_x - \omega^+ \phi_y)(\phi_x - \omega^- \phi_y) = 0$$

其中

$$\omega^\pm(x, y) = \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)}$$

$\phi_x - \omega^+ \phi_y = 0$  和  $\phi_x + \omega^+ \phi_y = 0$  分别给出了方程的特征线.

$$dy/dx = \omega^\pm$$

例：波动方程  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  的特征线. 特征方程为

$$\phi_t^2 - c^2 \phi_x^2 = (\phi_t - c\phi_x)(\phi_t + c\phi_x) = 0$$

从而波动方程的特征线为

$$\phi(x, t) = x - ct = \text{const.}, \quad \phi(x, t) = x + ct = \text{const.}$$

例：扩散方程  $u_t = k u_{xx}$  的特征线特征方程为

$$k\phi_x^2 = 0$$

因此  $\phi = \phi(t) = \text{const.}$ . 因此特征线为直线  $t = \text{const.}$

例：Laplace 方程  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  的特征线特征方程为

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 = 0$$

显然  $\phi_x = \phi_y = 0$ . Laplace 方程不存在实特征线.

## Notes:

椭圆型方程没有特征线，因此解不能存在间断. 椭圆型方程的解十分光滑.

抛物型方程的特征线  $t = \text{const.}$ . 对于时间演化问题，不能传播奇性（间断），方程的解是光滑的.

双曲型方程的特征线可以传播奇性（间断），对于理论研究和数值计算都十分重要.

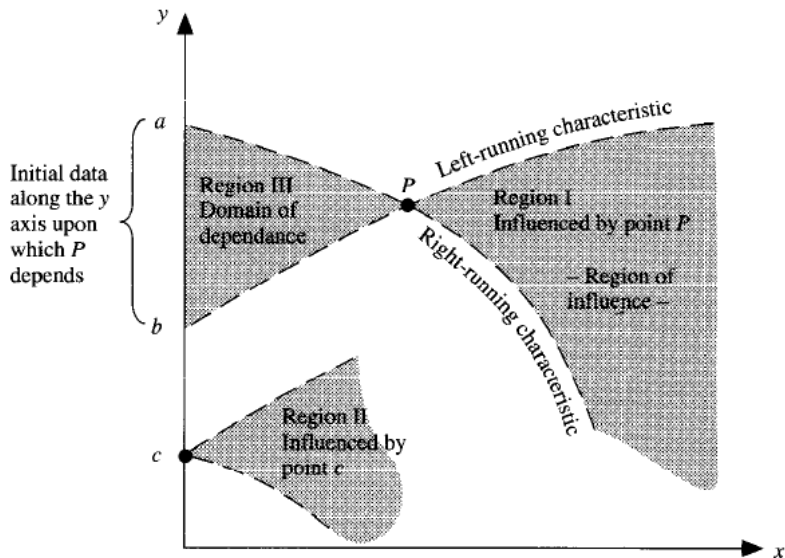


Figure: 二维定常双曲型方程的域和边界

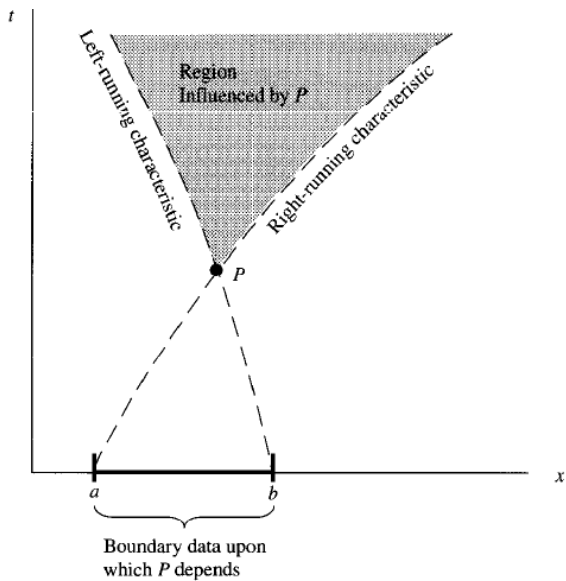


Figure: 一维非定常流动双曲型方程的域和边界

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

- 基本概念

- 偏微分方程推导实例

- 定解问题

- 方程分类

## 有限差分方法基础

- 偏导数的差商近似

- 有限差分算子

- 误差



用差商近似导数, Euler, 1768

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(0) = a$$

$(\frac{dx}{dt})_n \approx \frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t}$ , 因此

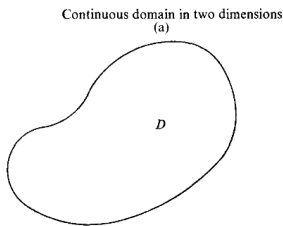
$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = f(x_n, t_n)$$

可得  $x^{n+1} = x^n + \Delta t f(x_n, t_n)$ .

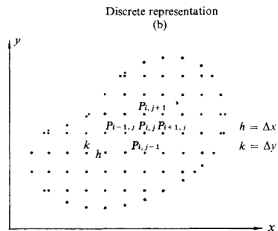
## 二维边值问题

$$\mathcal{L}u = f, \quad u = u(x, y), \quad (x, y) \in D$$

令  $P_{i,j}$  表示对定义域  $D$  的离散化. 如果采用均匀空间离散, 即  $h = \Delta x, k = \Delta y$ . 用  $u_{i,j} = u(ih, jk)$  表示在离散点  $x = ih, y = jk$  处解的精确值, 而  $U_{i,j}$  表示在该点的离散近似值.



(a) continuous domain



(b) discrete representation

Figure: 连续二维定义域的离散化

偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  的差商近似.

将  $u(x + \Delta x, y)$  关于  $(x, y)$  Taylor 展开,

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y) = & u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \\ & + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + O[(\Delta x)^4] \end{aligned} \quad (1)$$

除以  $\Delta x$ , 整理后得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

上式称为前向差分, 若用下标记号表示

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h)$$

同样可以得到

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} + O(h)$$

$O(h), O(k)$  表示差商近似截断误差.

将  $u(x - \Delta x, y)$  关于  $(x, y)$  Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x, y) = & u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \\ & - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, y) + O[(\Delta x)^4] \end{aligned} \quad (2)$$

可以得到后向差分近似

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h)$$

同样可以得到

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} + O(h)$$

由 (1)-(2) 得到

$$u(x + \Delta x, y) - u(x - \Delta x, y) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O[(\Delta x)^5]$$

二阶中心差分

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2)$$

同样可得:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2)$$

由 (1)+(2) 得到

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y) &= (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O[(\Delta x)^6] \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$  的二阶中心差分

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u(i, j) + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

同样可得:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u(i, j) + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$$

当  $h = k$  时, 对 Laplace 算子  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$  的差分离散可以表示为

$$\nabla^2 u|_{i,j} = u_{xx}|_{i,j} + u_{yy}|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} + O(h^2)$$

交叉偏导数  $\partial^2 u / \partial x \partial y$ .

$u(x + \Delta x, y + \Delta y)$  关于  $(x, y)$  进行二维 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + O(h^3, k^3, h^2 k, h k^2) \end{aligned}$$

$u(x - \Delta x, y - \Delta y)$  关于  $(x, y)$  进行二维 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + O(h^3, k^3, h^2 k, h k^2) \end{aligned}$$

$u(x + \Delta x, y - \Delta y)$  关于  $(x, y)$  进行二维 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad - \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + O(h^3, k^3, h^2 k, h k^2) \end{aligned}$$

$u(x - \Delta x, y + \Delta y)$  关于  $(x, y)$  进行二维 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) &= u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad - \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + O(h^3, k^3, h^2 k, h k^2) \end{aligned}$$



将以上 4 式相加, 得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{4hk} + O(h^3/k, k^3/h, \dots)$$

若  $h = k$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2)$$

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

基本概念

偏微分方程推导实例

定解问题

方程分类

## 有限差分方法基础

偏导数的差商近似

有限差分算子

误差

考虑单变量函数  $y = f(x)$ . 在  $x$  轴上进行离散, 取等间距  $h = x_{n+1} - x_n$ , 并记  $y_n = f(x_n)$ . 定义如下算子

前向差分:  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$

后向差分:  $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$

中心差分:  $\delta y_n = y_{n+1/2} - y_{n-1/2}$

平均算子:  $\mu y_n = \frac{1}{2}[y_{n+1/2} + y_{n-1/2}]$

位移算子:  $E y_n = y_{n+1}$

积分算子:  $J y = \int_x^{x+h} y(t) dt$

微分算子:  $D y = dy/dx$

对差分算子进行操作, 可以得到算子间的关系

$$\Delta = E - 1, \quad DJ = JD = \Delta, \quad \nabla = 1 - E^{-1} \\ \mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}), \quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2},$$

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 1 + \frac{1}{4}\delta^2, \quad 1 = \mu\mu^{-1} = \mu(1 + \frac{1}{4}\delta^2)^{-1/2} \\ &= \mu(1 - \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{3}{128}\delta^4 + \cdots) \end{aligned}$$

下面考虑微分算子  $D$  和其他算子之间的关系.  $f(x+h)$  在  $x$  处的 Taylor 展开

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

上式表示成算子形式

$$Ef(x) = \left[ 1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} + \cdots \right] f(x) = e^{hD}f(x).$$

因此算子  $E$  和  $D$  之间的关系为

$$E = e^{hD}$$

上式的意义是对于任意的  $N$  阶多项式 ( $\forall N \in \mathcal{N}$ ), 算子  $E$  和  $\sum_{n=0}^N (h^n D^n / n!)$  得到相同的结果.

根据差分算子之间的关系式，可以得到

$$\begin{aligned} hD &= \log[E] = \log(1 + \Delta) = -\log(1 - \nabla) \\ &= 2 \sinh^{-1} \delta/2 = 2 \log \left[ (1 + \frac{1}{4} \delta^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \delta \right] \end{aligned}$$

由上式，展开  $\log(1 + \Delta)$ ，

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_i = Dy_i = \frac{1}{h} \left[ \Delta - \frac{1}{2} \Delta^2 + \frac{1}{3} \Delta^3 - \cdots \right] y_i.$$

对于高阶导数

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^k y}{dx^k} \right|_i &= D^k y_i = \frac{1}{h^k} [\log(1 + \Delta)]^k \\ &= \frac{1}{h^k} \left[ \Delta^k - \frac{k}{2} \Delta^{k+1} + \frac{k(3k+5)}{24} \Delta^{k+2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k(k+2)(k+3)}{48} \Delta^{k+3} + \cdots \right] y_i. \end{aligned}$$

对于二阶导数

$$\begin{aligned} h^2 y'' &= \left[ \Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \cdots \right] y_i \\ &= (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ &\quad - (y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}) + \frac{11}{12} \Delta^4 y_i + \cdots \end{aligned}$$

根据  $E = 1 + \Delta$

$$\begin{aligned} E^p y_i &= y(x_i + ph) = (1 + \Delta)^p y_i = \left( \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \Delta^j \right) y_i \\ &= y_i + p(\Delta y_i) + \binom{p}{2} \Delta^2 y_i + \cdots \end{aligned}$$

其中  $\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}$ .

由  $y_i = Ey_{i-1}$ ,

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_i &= \frac{1}{h} [\log(1 + \Delta)] y_i = \frac{1}{h} [\log(1 + \Delta)] (1 + \Delta) y_{i-1} \\ &= \frac{1}{h} \left[ \Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 - \frac{1}{6} \Delta^3 + \cdots \right] y_{i-1}\end{aligned}$$

相应的, 对于二阶导数

$$h^2 y_i'' = \left[ \Delta^2 - \frac{1}{12} \Delta^4 + \frac{1}{12} \Delta^5 - \cdots \right] y_{i-1}.$$

## 应用后向差分算子

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_i &= D^k y_i = \frac{(-1)^k}{h^k} [\log(1 - \nabla)]^k y_i \\ &= \frac{1}{h^k} \left[ \nabla^k + \frac{k}{2} \nabla^{k+1} + \frac{k(3k+5)}{24} \nabla^{k+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k(k+2)(k+3)}{48} \nabla^{k+3} + \cdots \right] y_i.\end{aligned}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i = D y_i = \frac{1}{h} \left[ \nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \cdots \right] y_i.$$

$$\begin{aligned}h^2 y'' &= \left[ \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \cdots \right] y_i \\ &= (y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}) \\ &\quad + (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2}) + \frac{11}{12} \nabla^4 y_i + \cdots\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_i &= \left[\frac{2}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}\right] y_i \\ &= \frac{1}{h} \left( \delta - \frac{1}{24} \delta^3 + \frac{3}{640} \delta^5 - \frac{5}{7168} \delta^7 + \dots \right) y_i\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_i &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \delta^2/4}} \left[\frac{2}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}\right] y_i \\ &= \frac{\mu}{h} \left( \delta - \frac{1^2}{3!} \delta^3 + \frac{1^2 \cdot 2^2}{5!} \delta^5 - \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{7!} \delta^7 + \dots \right) y_i\end{aligned}$$

偶数阶导数

$$\begin{aligned}D^{2n} &= \left[\frac{2}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}\right]^{2n} \\ &= \frac{1}{h^{2n}} \left( \delta^{2n} - \frac{n}{12} \delta^{2n+2} + \frac{n(11+5n)}{1440} \delta^{2n+4} - \dots \right)\end{aligned}$$

因此

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_i = \frac{1}{h^2} \left( \delta^2 - \frac{1}{12} \delta^4 + \frac{1}{90} \delta^6 - \dots \right) y_i$$

## 半节点处的导数

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} \right|_{i+1/2} &= \frac{\mu}{\sqrt{1+\delta^2/4}} \left[ \frac{2}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2} \right]^{2n} y_{i+1/2} \\ \left. \frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} \right|_{i+1/2} &= \left[ \frac{2}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2} \right]^{2n+1} y_{i+1/2}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_{i+1/2} &= \frac{1}{h} \left( \delta - \frac{1}{24}\delta^3 + \frac{3}{640}\delta^5 - \frac{5}{7168}\delta^7 + \cdots \right) y_{i+1/2} \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{i+1/2} &= \frac{\mu}{h^2} \left( \delta^2 - \frac{5}{24}\delta^4 + \frac{259}{5760}\delta^6 - \frac{3229}{322560}\delta^8 + \cdots \right) y_{i+1/2}\end{aligned}$$

# Outline

## 偏微分方程基础回顾

基本概念

偏微分方程推导实例

定解问题

方程分类

## 有限差分方法基础

偏导数的差商近似

有限差分算子

误差

考虑定解问题

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

$$u(0, y) = f(y), u(x, 0) = g(x)$$

$$u_x(1, y) = a(y), u_y(x, 1) = b(x)$$

采用均匀矩形单元离散定义域.  $P_{i,j} = (ih, jk)$ , 其中  
 $h = \Delta x = 1/N, k = \Delta y = 1/M$ . 用五点差分近似二阶导数, 整理后得到有限差分方程

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = O(h^2) + O(k^2).$$

以上有限差分方程中出现的误差项  $O(h^2) + O(k^2)$  称为截断误差. 如果边界条件不是 *Dirichlet* 类型, 则边界条件的离散也会引入误差.

$$\frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{h} = a(jk) + O(h)$$

$O(h)$  称为边界截断误差.

将连续问题用离散模型替代产生的误差称为离散误差. 整个离散误差的阶数, 由所有近似的最小误差阶数决定.

当离散方程没有精确求解, 引入的误差称为舍入误差.

*Taylor* 级数展开可以较容易确定差分格式的精度.

差分算子, 估计渐近误差阶  $\Delta^k u = h^k D^k u(\xi)$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_i = \frac{1}{h^2} \left( \delta^2 - \frac{1}{12} \delta^4 + \frac{1}{90} \delta^6 - \cdots \right) y_i$$

如果忽略 6 阶以上差分项, 则  $y''$  的误差阶为  $O(h^4)$ .