偏微分方程数值解法　春季学期　2017
第四次作业 3.24-3.30　　　　　　　　　　姓名: ______________________

1. (*30 points*) 证明定理：若 A 严格对角占优，则 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代对任意的初值都收敛.

2. (*70 points*) 利用五点格式离散求解 Laplace 方程，采用简单迭代法对得到的线性方程组进行求解.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x,y<1$$
$$u(x,0)=u(0,y)=u(1,y)=0, u(x,1)=\sin\pi x.$$

划分网格 $\Delta x=\Delta y=h=\frac{1}{n+1}$，对于 *Dirichlet* 边界条件，边界上的值已知，因此只需计算内点的值，将得到 n^2 个方程组成的线性方程组.

(1) 采用自然排序，写出对于该问题的 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 迭代法的分量形式.

(2) 分别取 $n=9,19,39,79,159,319$，采用 Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 迭代法计算线性方程组，得到方程的近似解，记录每种方法所需的迭代步数并进行比较.(要求误差范数 $\|\mathbf{u^{(n+1)}}-\mathbf{u^{(n)}}\|_2<1E-12$)

(3) 计算在点 $(0.5,0.5)$ 处的差分解与精确解的绝对误差 e，做出 $h-e$ 曲线和 $\log(h)-\log(e)$ 曲线，并解释结果.

说明：
SOR 迭代的松弛因子 ω 取 1.25,1.5,1.8 及最优值 ω_{opt}.