

1. (10 points) 利用 Taylor 展开分别构造 Laplace 算子 $\Delta = u_{xx} + u_{yy}$ 的五点格式和九点格式.(注意格式中应该保留四阶偏导数)

2. (20 points) 证明差分算子之间的关系是

(a) $\nabla = E^{-1}\Delta$

(b) $\nabla\Delta = \Delta\nabla = \Delta - \nabla = \delta^2$

(c) $\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$

(d) $\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$

3. (30 points) 根据下面的表达式

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_i = \frac{1}{h^2} \left(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \dots \right) y_i$$

(1) 去掉四阶及以上差分项

(2) 去掉六阶及以上差分项分别构造二阶导数的差商近似, 并利用 Taylor 展开说明差商近似的精度.

4. (40 points) 编写程序求解下列双曲型方程,

(1) $u_t + u_x = 0$ with $u(x, 0) = -\sin \pi x$ $x \in [-1, 1]$

(2) $u_t + u_x = 0$ with $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{for } \frac{1}{3} < |x| \leq 1 \end{cases}$ $x \in [-1, 1]$

边界满足周期性条件, 即 $u(-1, t) = u(1, t)$, 进一步的对所有的 x , 有 $u(x-1, t) = u(x+1, t)$. 要求:

(a) 采用三种差分格式: FTFS, FTBS, FTCS

(b) 空间上均匀分布 40 个网格, $\lambda = \tau/h$ 取 0.5, 1.05, 2.0

(c) 计算 $t = 1$ 和 $t = 30$ 时刻 $u(x, t)$ 的值, 画出 u 关于 x 的曲线 (如果可能).