偏微分方程数值解法

差分格式分析

刘 瑜

March 5, 2018

Outline

差分格式的相容性

Definition (差分格式的相容性)

当 $h, \tau \to 0$ 时，如果差分格式的截断误差

$$T(x_j, t_n) \to 0$$

则称差分格式是相容的.

对流方程的初值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = g(x)$$

FTFS 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

将方程的精确解 $u(x,t)$ 代入上式，得到其截断误差为

$$T(x_j, t_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h + O(\tau^2 + h^2)$$

因此格式满足相容性.

Definition (差分格式的收敛性)

当 $h, \tau \to 0$ 时，如果差分格式的解与定解问题的解的误差趋于零，即

$$e_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n \to 0$$

则称差分格式收敛.

考虑扩散方程的 $FTCS$ 格式的收敛性.
差分方程

$$u_j^{n+1} = (1-2ar)u_j^n + ar(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

其中 $r = \tau/h^2$，考虑差分方程的截断误差

$$T(x_j, t_n) = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} - a\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{h^2}$$

上式可以改写为

$$u(x_j, t_{n+1}) = (1-2ar)u(x_j, t_n) + ar[u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] + \tau T(x_j, tn)$$

令误差 $e_j^n = u_j^n - u(x_j, t_n)$，可得

$$e_j^{n+1} = (1-2ar)e_j^n + ar(e_{j-1}^n + e_{j+1}^n) - \tau T(x_j, t_n)$$

若 $2ar \leq 1$，则

$$|e_j^{n+1}| \leq (1-2ar)|e_j^n| + ar(|e_{j-1}^n| + |e_{j+1}^n|) + \tau|T(x_j, t_n)|$$

由于 $|T(x_j,t_n)| \le M(\tau+h^2)$，且假设有

$$E_n = \sup_j |e_j^n|$$

因而

$$|e_j^{n+1}| \le (1-2ar)E_n + ar(E_n+E_n) + M\tau(\tau+h^2)$$

即

$$E_{n+1} \le E_n + M\tau(\tau+h^2)$$

可以递推得到

$$E_n \le E_0 + Mn\tau(\tau+h^2)$$

如果初始条件的误差界 $E_0=0$，则

$$E_n \le Mn\tau(\tau+h^2)$$

假定 $t\le T$，则 $n\tau \le T$，因此当 $\tau,h\to 0$ 时

$$E_n \le MT(\tau+h^2) \to 0$$

根据以上论证，当 $2ar \le 1$ 时，差分方程是收敛的.

Definition (差分格式的稳定性)

设初值 u_j^0 具有误差 ϵ_j^0，则 u_j^0 就有误差 ϵ_j^n. 如果存在一个正的常数 K，使得当 $\tau \leq \tau_0, n\tau \leq T$ 时，一致有

$$\|\epsilon^n\|_h \leq K\|\epsilon^0\|_h$$

则称差分格式是稳定的.
上式中范数的定义

$$\|\epsilon^n\|_h = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\epsilon_j^n)^2 h \right\}^{\frac{1}{2}}$$

对于线性差分格式，可以表示为算子形式

$$u_j^{n+1} = \mathrm{L}_h u_j^n$$

其中 L_h 是仅依赖于 τ, h 的线性差分算子. 显然有

$$u_j^n = \mathrm{L}_h^n u_j^0$$

误差亦可表示为

$$\epsilon_j^n = \mathrm{L}_h^n \epsilon_j^0$$

因此若对于一切的 $\tau \leq \tau_0, n\tau \leq T$，有

$$\|\mathrm{L}_h^n\| \leq K$$

则差分方程是稳定的, 其中

$$\|\mathrm{L}_h^n\| = \sup_{\|u\|_h=1} \|L_h^n u\|.$$

稳定性条件还可以表示为，对于一切的 $\tau \le \tau_0, n\tau \le T$，有

$$\|u^n\|_h \le K\|u^0\|_h$$

线性对流方程的 $FTFS$ 差分格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n) = [(1+\lambda a) - \lambda a E]u_j^n$$

因此

$$u_j^n = [(1+\lambda a) - \lambda a E]^n u_j^0$$

如果初值具有误差的绝对值为 ϵ，且符号交替的取正负号，即 $\epsilon_{j+k}^0 = (-1)^k \epsilon$，且若不考虑计算过程的舍入误差，则差分格式的解在 (x_j, t_n) 处的误差为

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_m^n (1+\lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} \epsilon_{j+(n-m)}^0 = (1+2\lambda a)^n \epsilon$$

从而

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_m^n (1+\lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} (-1)^{n-m} \epsilon = (1+2\lambda a)^n \epsilon$$

讨论：

如果 $a > 0$，则误差将不断增大，差分格式不稳定.

如果 $a < 0$，当 $-1 \leq \lambda a < 0$ 时，差分格式稳定.

线性对流方程的 $FTFS$ 差分格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n) = [(1+\lambda a) - \lambda a E]u_j^n$$

因此

$$u_j^n = [(1+\lambda a) - \lambda a E]^n u_j^0$$

如果初值具有误差的绝对值为 ϵ，且符号交替的取正负号，即 $\epsilon_{j+k}^0 = (-1)^k \epsilon$，且若不考虑计算过程的舍入误差，则差分格式的解在 (x_j, t_n) 处的误差为

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_m^n (1+\lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} \epsilon_{j+(n-m)}^0 = (1+2\lambda a)^n \epsilon$$

从而

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{C}_m^n (1+\lambda a)^m (-\lambda a)^{n-m} (-1)^{n-m} \epsilon = (1+2\lambda a)^n \epsilon$$

讨论：

如果 $a > 0$，则误差将不断增大，差分格式不稳定.

如果 $a < 0$，当 $-1 \leq \lambda a < 0$ 时，差分格式稳定.

Theorem (Lax 等价定理)

给定一个适定的线性初值问题 以及与其相容 的差分格式，则差分格式的稳定性 是差分格式收敛性 的充要条件.

研究有限差分格式稳定性的 Fourier 方法

对流方程初值问题的 FTFS 格式

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n) \\
u_j^0 &= g_j = g(x_j)
\end{aligned}
$$

为了采用 Fourier 方法，需扩充离散函数的定义域

$$
\begin{aligned}
U(x, t_n) &= u_j^n, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2} \\
\Phi(x) &= g(x_j), \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}
\end{aligned}
$$

因此

$$
U(x, t_{n+1}) = U(x, t_n) - \lambda a[U(x+h, t_n) - U(x, t_n)]
$$

对 U 进行 Fourier 变换

$$U(x,t_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{U}(k,t_{n+1})\mathrm{e}^{ikx}dk$$

代入差分方程整理后得到

$$\hat{U}(k,t_{n+1})=[1-\lambda a(\mathrm{e}^{ikh}-1)]\,\hat{U}(k,t_n)=G(\tau,k)\,\hat{U}(k,t_n)$$

定义 $G(\tau,k)$ 为增长因子，因其不依赖与时间层 n，因而

$$\hat{U}(k,t_{n+1})=[G(\tau,k)]\,\hat{U}(k,t_n)$$
$$\hat{U}(k,t_n)=[G(\tau,k)]^n\,\hat{U}(k,t_0)$$

如果 $G(\tau,k)$ 的任意次幂一致有界，并设其界为 K. 应用 Parseval 等式可以得到

$$\|U(t_n)\|^2\le K^2\|U(t_0)\|^2$$

因此有 $\|u^n\|\le K\|u^0\|$ 即差分格式是稳定的.

对于线性差分方程组

$$\mathbf{u}_j^{n+1} = \mathrm{C}(x_j, \tau)\mathbf{u}_j^n \tag{1}$$

如果 $\mathrm{C}(x_j, \tau)$ 不依赖于 x_j，则可进行 Fourier 变换得到

$$\hat{\mathbf{U}}(k, t_{n+1}) = [\mathbf{G}(\tau, k)]^n \hat{\mathbf{U}}(k, t_0)$$

$\mathbf{G}(\tau, k)$ 称为增长矩阵.
差分格式稳定的充要条件是存在常数 τ_0, K 使得当 $\tau \le \tau_0, n\tau \le T$ 及所有的 $k \in \mathbb{R}$ 有

$$\|\mathbf{G}(\tau, k)^n| \le K,$$

其中矩阵范数可用任何一种范数.

Theorem (von Neumann 条件)

差分格式 (1)稳定的必要条件是当 $\tau \le \tau_0, n\tau \le T$ 及所有的 $k \in \mathbb{R}$ 有

$$|\lambda_j(\mathbf{G}(\tau,k))| \le 1 + M\tau, j = 1, 2, \cdots, p$$

其中 $\lambda_j(\mathbf{G}(\tau,k))$ 表示 $\mathbf{G}(\tau,k))$ 的特征值，M 为常数.

Theorem

如果差分格式的增长矩阵 $\mathbf{G}(\tau,k)$ 是正规矩阵，则 *von Neumann* 条件是差分格式稳定的充要条件.

当 $\mathbf{G}(\tau,k)$ 只有一个元素是，则 von Neumann 条件是差分格式稳定的充要条件

Theorem

如果存在常数 K,τ_0 使得

$$\|\mathbf{G}(\tau,k)\| \leq 1 + K\tau, \quad 0 < \tau \leq \tau_0,$$

则差分格式是稳定的.

Hirt 启示性方法

直接法

能量法