偏微分方程数值解法　春季学期　2018
第三次作业 3.27-4.2　　　　姓名: ______________________

**1.** (*40 points*) 常系数双曲型偏微分方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0$$

a) 给出迎风格式；

b) 对于初值问题，求迎风格式的稳定性；

c) 对于初边直问题，如果定义域为 $(0,1)$. 讨论边界条件如何给定.

**2.** (*60 points*) 波动方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0 \\
u(x,0) &= \begin{cases} \frac{3}{10}x & \text{if} \quad 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{3(1-x)}{20} & \text{if} \quad \frac{1}{3} \le x \le 1. \end{cases} \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \\
u(0,t) &= 0 \quad u(1,t) = 0
\end{aligned}$$

a) 写出直接求解该方程的显式差分格式；

b) 将波动方程转化为一阶双曲型方程组，并给出 Lax-Wendroff 格式;

c) 取 $c = 1/\pi$，采用直接方法和转化为一阶方程组的方法求解，给出不同时刻 $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$, $u(x,t)$ 的曲线.

Note:

1) 该问题的精确解为

$$u(x,t) = \frac{9}{10\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2}\sin n\pi x\cos nt.$$

2) 如果 $(n-1)\tau < t_{end} < n\tau$（$n$ 为整数），则最后一步计算的时间步长可以为 $t_{end} - (n-1)\tau$.

说明:

- 学习科技制图，计算结果上交电子文档；
- 数值解法实践性很强，必须通过亲自动手编程才能将理论转化为实践，才能更好的理解理论；
- 通过编程获得方程的数值解，也会有成就感.