偏微分方程数值解法　春季学期　2017
第八次作业　选做　　　　　　　　　　　　姓名: ________________

1. (*100 points*) 编写程序求解下列双曲型方程,

(1) 计算 $u(x,30)$，其中
$u_t + u_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = -\sin \pi x \quad x \in [-1,1]$

(2) 计算 $u(x,4)$，其中

$$u_t + u_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad |x| < \frac{1}{3} \\ 0 & for \quad \frac{1}{3} < |x| \le 1 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

(3) 计算 $u(x,0.6)$，其中

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad |x| < \frac{1}{3} \\ 0 & for \quad \frac{1}{3} < |x| \le 1 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

(4) 计算 $u(x,0.3)$，其中

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad |x| < \frac{1}{3} \\ -1 & for \quad \frac{1}{3} < |x| \le 1 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$$

解是以 2 为周期的函数，即 $u(-1,t) = u(1,t)$，进一步的对所有的 x，有 $u(x-1,t) = u(x+1,t)$.
要求:

(a) (1)、(2) 采用 Van Leer 和 Sweby 通量限制格式；(3)、(4) 采用 Sweby 通量限制格式;Sweby 通量限制格式可以应用多种通量限制器函数.

(b) 空间上均匀分布 40 个网格，$\lambda = \tau/h$ 取 0.8. 如果 $(n-1)\tau < t_{end} < n\tau$（$n$ 为整数），则最后一步计算的时间步长可以为 $t_{end} - (n-1)\tau$.

(c) 画出 u 的分布曲线，并与精确解比较.

提示:
问题的关键在于边界点的处理. 利用问题的周期性，可以很容易的处理边界条件. 以 FTFS 格式为例,

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

对于左端边界点 0，可以按上式直接计算

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \lambda a(u_1^n - u_0^n)$$

而对于右端边界点 N，需要再向右延拓一个网格，即

$$u_N^{n+1} = u_N^n - \lambda a(u_{N+1}^n - u_N^n)$$

根据周期性，有 $u_{N+1}^n = u_1^n$，代入上式即可.
其他格式照此办理.