偏微分方程数值解法　春季学期　2017
第二次作业 3.10-3.15　　　　姓名: ______________________

1. (*10 points*) 利用 Taylor 展开分别构造 Laplace 算子 $\Delta = u_{xx} + u_{yy}$ 的五点格式和九点格式.(注意误差项应该保留四阶偏导数)

2. (*20 points*) 证明差分算子之间的关系是

(a) $\nabla = E^{-1}\Delta$

(b) $\nabla\Delta = \Delta\nabla = \Delta - \nabla = \delta^2$

(c) $\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$

(d) $\mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$

3. (*30 points*) 根据下面的表达式

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \cdots\right)y_i$$

(1) 去掉四阶及以上差分项

(2) 去掉六阶及以上差分项

分别构造二阶导数的差商近似，并利用 Taylor 展开说明差商近似的精度.

4. (*20 points*) 编写程序求解下列双曲型方程,

(1) $u_t + u_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = -\sin\pi x \quad x \in [-1,1]$

(2) $u_t + u_x = 0 \quad \text{with } u(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad |x| < \frac{1}{3} \\ 0 & for \quad \frac{1}{3} < |x| \le 1 \end{cases} \quad x \in [-1,1]$

解是以 2 为周期的函数，即 $u(-1,t) = u(1,t)$，进一步的对所有的 x，有 $u(x-1,t) = u(x+1,t)$. 要求：

(a) 采用三种差分格式：FTFS,FTBS,FTCS

(b) 空间上均匀分布 40 个网格，$\lambda = \tau/h$ 取 0.5,1.05,2.0

(c) 计算 $t = 1$ 和 $t = 30$ 时刻 $u(x,t)$ 的值，画出 u 关于 x 的曲线 (如果可能).

提示:
问题的关键在于边界点的处理. 利用问题的周期性，可以很容易的处理边界条件. 如果采用 FTFS，

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

对于左端边界点 0，可以按上式直接计算

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \lambda a(u_1^n - u_0^n)$$

而对于右端边界点 N，需要再向右延拓一个网格，即

$$u_N^{n+1} = u_N^n - \lambda a(u_{N+1}^n - u_N^n)$$

根据周期性，有 $u_{N+1}^n = u_1^n$，代入上式即可.
FTFS,FTCS 可以照此办理.

5. (*20 points*) 求解扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

a) 分别采用显式格式 FTCS 和隐式格式 BTCS 格式，写出内点差分方程和临近边界的网格点的差分方程;

b) 取 $h = 0.05$，选择不同的时间步长 τ. 当 $r = \tau/h^2 = 0.45$ 和 $r = 0.55$ 时，分别计算 $t = 0.037125, 0.07425, 0.111375, 0.1485$ 时刻 u 的值 >，并作出曲线.

Note:

1) 该问题的精确解为

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

2) 如果 $(n-1)\tau < t_{end} < n\tau$（$n$ 为整数)，则最后一步计算的时间步长可以为 $t_{end} - (n-1)\tau$.