偏微分方程数值解法　春季学期　2017
第三次作业 3.18-3.23　　　　姓名: ________________

1. (*30 points*) 某种立方体材料在 x 方向上的厚度为 $L = 0.02m$，远远小于 y, z 方向上的厚度. 在材料内存在均匀热源 $q = 1000\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$, 且保持边界上的温度 $T(x=0) = 100℃, T(x=0.02) = 200℃$. 材料的热传导系数 $k = 0.5\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$. 时间足够长后，若忽略 y, z 方向上温度的变化，温度分布可由下列方程描述

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + q = 0$$

a) 求出方程的精确解；

b) 采用二阶中心差分格式近似二阶导数项，得到差分方程并处理边界条件；

c) 分别取 $h = L/10$ 和 $h = L/20$，采用追赶法求解线性方程组得到近似解并与分析解进行比较 (画出曲线).

Note: 注意物理量的单位.

2. (*30 points*) 求解扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$

a) 分别采用显式格式 FTCS 和隐式格式 BTCS 格式，写出内点差分方程和临近边界的网格点的差分方程；

b) 取 $h = 0.05$，选择不同的时间步长 τ. 当 $r = \tau/h^2 = 0.45$ 和 $r = 0.55$ 时，分别计算 $t = 0.037125, 0.07425, 0.111375, 0.1485$ 时刻 u 的值，并作出曲线.

Note:

1) 该问题的精确解为

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

2) 如果 $(n-1)\tau < t_{end} < n\tau$（$n$ 为整数），则最后一步计算的时间步长可以为 $t_{end} - (n-1)\tau$.

3. (*40 points*) 编写程序求解下列双曲型方程,

(1) $u_t + u_x = 0 \quad$ with $u(x,0) = -\sin \pi x \quad x \in [-1,1]$

(2) $u_t + u_x = 0 \quad$ with $u(x,0) = \begin{cases} 1 & for \quad |x| < \frac{1}{3} \\ 0 & for \quad \frac{1}{3} < |x| \le 1 \end{cases} \qquad x \in [-1,1]$

解是以 2 为周期的函数，即 $u(-1,t) = u(1,t)$，进一步的对所有的 x，有 $u(x-1,t) = u(x+1,t)$.
要求：

(a) 采用三种隐式差分格式：BTFS,BTBS,BTCS；

(b) 空间上均匀分布 40 个网格，$\lambda = \tau/h$ 取 0.5,1.05,2.0；

(c) 计算 $t = 1$ 和 $t = 30$ 时刻 $u(x,t)$ 的值，画出 u 关于 x 的曲线 (如果可能).

说明：

- 学习科技制图，计算结果上交电子文档；
- 数值解法实践性很强，必须通过亲自动手编程才能将理论转化为实践，才能更好的理解理论；
- 通过编程获得方程的数值解，也会有成就感.