High resolution Schemes of Hyperbolic PDEs

Liu Yu

April 21, 2017

Outline

双曲守恒律

数值格式的非线性稳定性

通量限制方法 (Flux-Limited Methods)

斜率限制器 (Slope Limiter)

问题

- 计算对流方程时，为什么二阶格式出现数值振荡，而一阶格式不会？
- 为什么在计算扩散方程时，二阶格式，或者更高阶格式，不会出现数值振荡？
- 数值振荡严重影响了解的稳定性和可信度，如何才能消除数值振荡？

对流占优模型的重要性：

- 高雷诺数流动
- Navier-Stokes 方程的对流项与波的传播现象有关，是最主要的非线性项来源
- 扩散项在很多情况下都是线性的；由于 Laplace 类算子的椭圆形特征，总是采用中心格式离散；扩散项不产生数值振荡，只会抹平任何强烈的变化。

守恒律

$$
\begin{aligned}
u_t + f(u)_x = 0 \quad & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x) \quad & x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

对于任意区间 $[a,b]$ 上守恒量的变化率等于边界上的净通量：

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = -(f(u(b,t)) - f(u(a,t))) = 0, \forall a < b, \forall t > 0$$

线性对流方程：

$$f(u) = au$$

Burgers 方程：

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2$$

特征

定义特征速度：

$$a(u) = \frac{df}{du}$$

沿着曲线 $\frac{dx}{dt} = a(u(x,t))$，有

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

如果 $u_0(x)$ 连续可微，偏微分方程的解为：

$$u(x,t) = u_0(x - ta(u(x,t)))$$

例：线性对流方程

$$u = u_0(x - ct)$$

例：Burgers 方程

$$u = u_0(x - tu(x,t))$$

古典解的失效 (奇性)

对 Burgers 方程，采用如下初值函数

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x < 0 \\ 1 - x & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

当 $0 < t < 1$ 其解为：

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{if } x - t < 0 \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{if } 0 \le x - t \le 1 \\ 0 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

所有的由 $x \in [0,1]$ 上的点发出的特征线相交于点 $x = 1, t = 1$，由此可知当 $t \ge 1$ 时，解是不连续的。即使 f, u_0 都是充分光滑的函数，初值问题也不可能对时间整体地有连续解存在。因此，必须推广守恒律初值问题解的定义。

间断传播速度

Lemma

Suppose that $u(x,t)$ satisfies that integral form of the conservation law

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)) \quad 0 \le t \le T$$

If u is discontinuity along the space-time curve $(z(t),t)$ that moves with dz/dt, then the jumps across the discontinuity satisfy the ***Rankine-Hugoniot jump condition***

$$\lim_{x\downarrow z(t)} f(u(x,t)) - \lim_{x\uparrow z(t)} f(u(x,t)) = \left(\lim_{x\downarrow z(t)} u(x,t) - \lim_{x\uparrow z(t)} u(x,t)\right)\frac{dz}{dt}$$

通常，将函数跳跃表示为 $[\bullet]$, 间断速度表示为 $\sigma = \frac{dz}{dt}$, 因而 Rankine-Hugoniot 跳跃条件可以表示为：

$$[f] = [u]\sigma$$

考虑上例，

$$\sigma = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = \frac{1}{2}$$

当 $t > 1$ 时，其解为：

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & 1 + \frac{1}{2}t < x \\ 0, & 1 + \frac{1}{2}t > x \end{cases}$$

弱解

令测试函数 $\phi \in C_0^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), C_0^1$ 是连续可微的紧支函数空间。

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi u_t + \phi f(u)_x]\, dxdt = 0$$

由分部积分，得到

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)]\, dxdt = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x]\, dxdt$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(\phi u)_t + (\phi f(u))_x]\, dxdt = \\
\int_0^\infty [\phi(\infty,t)u(\infty,t) - \phi(-\infty,t)u(-\infty,t)]\, dt \\
+ \int_{-\infty}^\infty [\phi(x,\infty)u(x,\infty) - \phi(x,0)u(x,0)]\, dx \\
= -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0)u(x,0)]\, dx
\end{aligned}$$

弱解

Definition

The function $u(x,t)$ is called a weak solution of conservational law if holds

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\phi_t u + \phi_x f(u)]\, dx dt = -\int_{-\infty}^\infty \phi(x,0) u(x,0)]\, dx,$$

for all funcions $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

弱解不是唯一的。

弱解的非唯一性

例：Burgers 方程的初始条件为：

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

存在多个弱解：

- 间断解 间断以 $\sigma = [f]/[u] = 1/2$ 的速度传播，

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2}t, \\ 1 & x > \frac{1}{2}t. \end{cases}$$

- 连续解

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 < x < t \\ 1 & x > t \end{cases}$$

物理解的判断

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$$

$$u_0(x)=\begin{cases} u_L & x<0, \\ u_R & x>0. \end{cases}$$

- Lax admissibility condition 间断的传播速度应满足

$$f'(u_-)>\sigma>f'(u_+)$$

- Oleinik 熵条件

$$\frac{f(u)-f(u_L)}{u-u_L}\geq\sigma=\frac{f(u_L)-f(u_R)}{u_L-u_R}\geq\frac{f(u)-f(u_R)}{u-u_R}$$

for all u between u_L and u_R

例 1 求解无穷域上的 Burgers 方程，初值条件为

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & for \quad |x|<\frac{1}{3}\\ 0 & for \quad |x|>\frac{1}{3}\end{cases}$$

在 $x=1/3$ 处的跳跃形成了激波，在 $x=-1/3$ 处的跳跃形成了简单中心膨胀波。直到中心膨胀波与激波相交，精确解为：

$$u(x,t)=\begin{cases}0 & for \quad -\infty<x<b_1,\\ \frac{x-b_1}{b_2-b_1} & for \quad b_1<x<b_2,\\ 1 & for \quad b_2<x<b_{shock},\\ 0 & for \quad b_{shock}<x<\infty,\end{cases}$$

其中 $b_1=-\frac{1}{3}, b_2=-\frac{1}{3}+t, b_{shock}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}t.$

例 1 求解无穷域上的 Burgers 方程，初值条件为

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & for \quad |x|<\frac{1}{3}\\ -1 & for \quad |x|>\frac{1}{3}\end{cases}$$

在 $x=1/3$ 处的跳跃形成了静止激波，在 $x=-1/3$ 处的跳跃形成了简单中心膨胀波。直到中心膨胀波与激波相交，精确解为：

$$u(x,t)=\begin{cases}-1 & for \quad -\infty<x<b_1,\\ -1+2\frac{x-b_1}{b_2-b_1} & for \quad b_1<x<b_2,\\ 1 & for \quad b_2<x<b_{shock},\\ -1 & for \quad b_{shock}<x<\infty,\end{cases}$$

其中 $b_1=-\frac{1}{3}-t, b_2=-\frac{1}{3}+t, b_{shock}=\frac{1}{3}$.

Riemann 问题

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0, \forall a < b, \forall t > 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & x < 0, \\ u_R & x > 0. \end{cases}$$

自相似解,$u(x,t) = w(x/t)$

$$u(x,t) = \mathcal{R}\left(u_L, u_R; \frac{x}{t}\right)$$

对于 Burgers 方程，

- $U_L > U_R$, 激波

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, x < \sigma t, \\ u_R, x > \sigma t. \end{cases}$$

  其中 $\sigma = (u_L + u_R)/2$.

- $u_L < u_R$，稀疏波

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & x < u_L t \\ x/t & u_L t \le x \le u_R t \\ u_R & x > u_R t \end{cases}$$

守恒型格式

对标量守恒律采用有限体积离散将物理计算域 $[a, b]$ N 等分，空间步长 $h = (b-a)/N, x_i = a + (i-1)h$，在区间 $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ 上对守恒律积分得到

$$\int_{C_i} u(x, t_{n+1})\,dx - \int_{C_i} u(x, t_n)\,dx = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))\,dt$$

令

$$U_i^n = \frac{1}{h}\int_{C_i} u(x, t_n)\,dx$$
$$F_{i+1/2}^n = \frac{1}{\tau}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t))\,dt$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h}(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

定义数值平均通量：

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{F}(U_{i-l+1}^n, \cdots, U_{i+l}^n) \approx F_{i+\frac{1}{2}}^n$$

于是，守恒型数值格式可以表示为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h}(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

守恒性

$$h\sum_{i=0}^{N} U_i^{n+1} = h\sum_{i=0}^{N} U_i^n - \tau(\tilde{F}_{N+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{-\frac{1}{2}}^n)$$

如果边界上的数值通量是精确的，将保持物理量的守恒。

守恒型差分格式

将具有与有限体积守恒格式相同形式的差分格式称为守恒形式的有限差分格式，即

$$u_i^{n+1} = u^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

并不是所有的有限差分格式都可以表示为守恒形式。差分格式的相容性要求

$$\tilde{F}(\omega, \cdots, \omega) = f(\omega)$$

即守恒数值通量与物理通量相容

- 迎风格式

$$\begin{cases} \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i^n), & a^n_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{i+1}^n), & a^n_{i+\frac{1}{2}} \leq 0 \end{cases}$$

- Lax-Friedrichs 格式

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\lambda}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \frac{1}{2}(f(u_i^n) + f(u^n_{i+1}))$$

Godunov 格式

定义阶梯函数

$$v^n(x) = u_i^n, x \in C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$$

令

$$\tilde{u}(x, t_n) = v^n(x)$$

可知，在任一区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构成了如下的局部 Riemann 问题，即

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial x} = 0$$

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_i^n & x - x_{i+\frac{1}{2}} < 0, \\ u_{i+1}^n & x - x_{i+\frac{1}{2}} > 0. \end{cases}$$

求解 Riemann 问题，得到在 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的解，

$$u_{RIEMANN}(u_i^n, u_{i+1}^n; 0)$$

通过守恒型格式的推导，我们已经得到

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

如果令

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = f(u_{RIEMANN}(u_i^n, u_{i+1}^n; 0))$$

则得到 Godunov 格式。Godunov 格式需要求解 Riemann 问题的精确解。

可以证明对于任意的通量函数有

$$f(u_{RIEMANN}(u_i^n, u_{i+1}^n; 0)) = \begin{cases} \min\limits_{u_i^n \le u \le u_{i+1}^n} f(u) & if \quad u_i \le u_{i+1} \\ \max\limits_{u_i^n \ge u \ge u_{i+1}^n} f(u) & if \quad u_i \ge u_{i+1} \end{cases}$$

Roe 格式

对非线性通量函数进行线性化，采用割线近似，得到

$$f(u) \approx a_{RL}(u - u_L) + f(u_L)$$

其中

$$a_{RL} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

因此，

$$f(u(u_L, u_R; 0)) \approx \begin{cases} \min\limits_{u_L \le u \le u_R} & a_{RL}(u - u_L) + f(u_L) \quad \mathit{if} \quad u_L \le u_R \\ \max\limits_{u_L \ge u \ge u_R} & a_{RL}(u - u_L) + f(u_L) \quad \mathit{if} \quad u_L \ge u_R \end{cases}$$

标量守恒律的 Roe 格式为

$$f(u_{RIEMANN}(u_i^n, u_{i+1}^n; 0)) = \begin{cases} \min(f(u_i), f(u_{i+1})) \quad \mathit{if} \quad u_i < u_{i+1} \\ \max(f(u_i), f(u_{i+1})) \quad \mathit{if} \quad u_i > u_{i+1} \end{cases}$$

Lax-Wendroff 格式

$$u(x,t+\tau)=u(x,t)+\frac{\partial u}{\partial t}\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\tau^2+O(\tau^3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{\partial f(u)}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial f(u)}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right)\\
&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(u)\frac{\partial f(u)}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

其中 $a(u)=df/du$ 用中心差商逼近空间导数，得到

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\lambda}{2}(f_{i+1}^n-f_i^n)+\frac{\lambda^2}{2}(a_{i+\frac12}f_{i+1}^n-(a_{i+\frac12}^n+a_{i-\frac12}^n)f_i^n+a_{i-\frac12}^n f_{i-1}^n)$$

其中 $a_{i+\frac12}=a(\frac{u_i+u_{i+1}}{2})$，或 $a_{i+\frac12}=\frac{a_{i+1}+a_i}{2}$ 写成守恒型格式

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n=\frac{f_i+f_{i+1}}{2}-\frac{\lambda}{2}a_{i+\frac12}^n(f_{i+1}-f_i)$$

$$\tilde{F}_{i+1/2}^n=f_i+(1-\lambda a_{i+1/2}^n)(f_{i+1}^n-f_i^n)$$

数值算例 (problem 4)

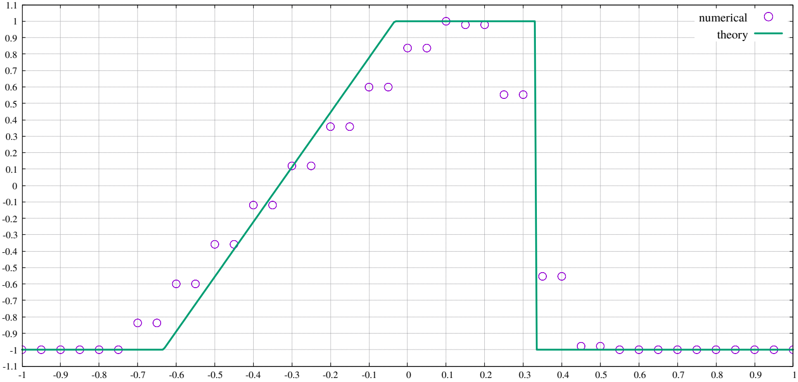

Figure: Lax-Friedrichs 格式

数值算例 (problem 4)

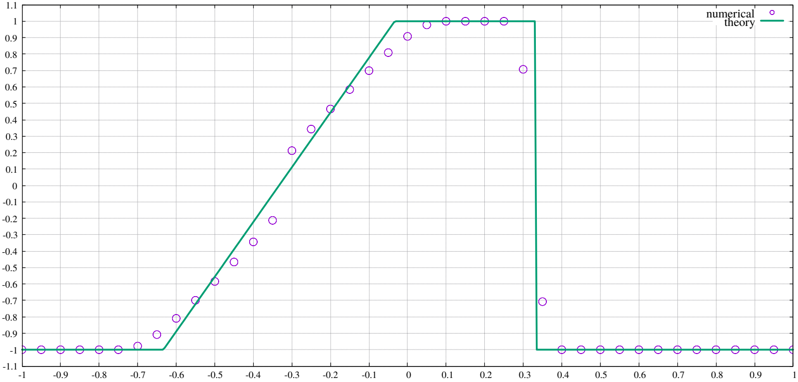

Figure: 一阶迎风格式

数值算例 (problem 4)

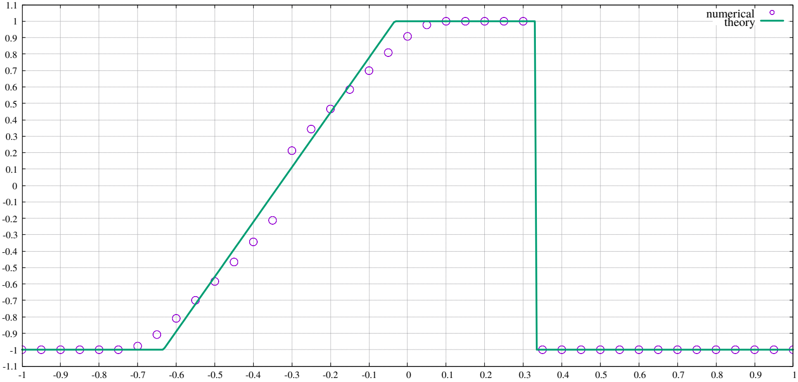

Figure: Godunov 格式

数值算例 (problem 4)

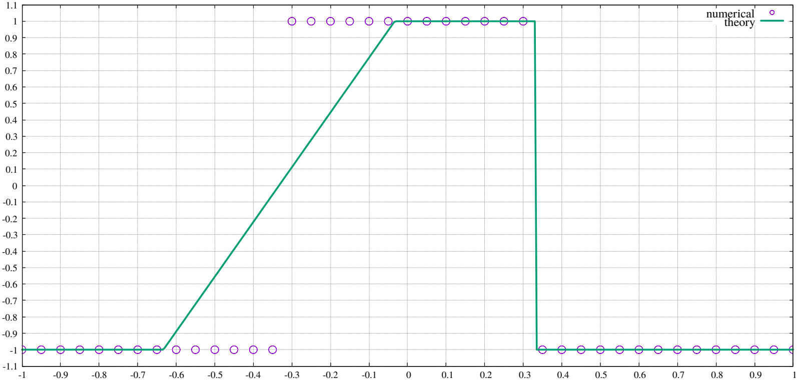

Figure: Roe 一阶格式

数值算例 (problem 4)

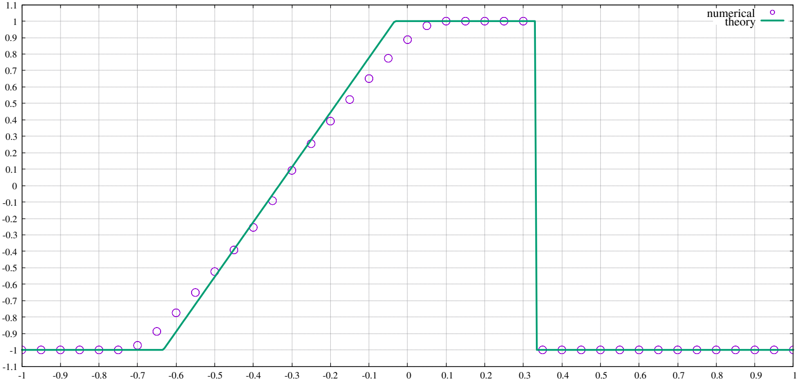

Figure: Harten 一阶格式

数值算例 (problem 4)

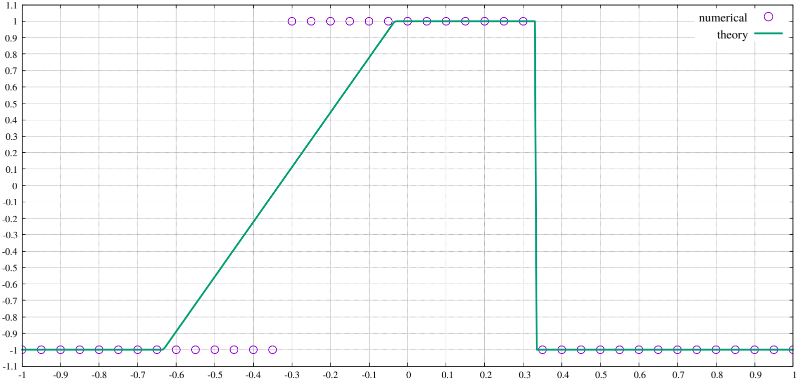

Figure: Lax-Wendroff 格式

数值算例 (problem 4)

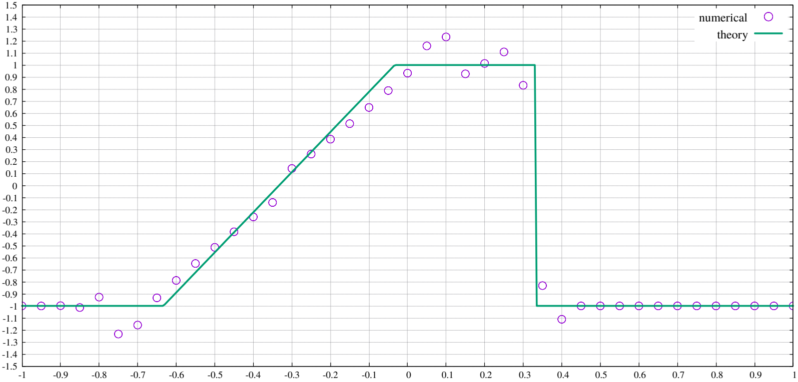

Figure: Beam-Warming 格式

数值算例 (problem 3)

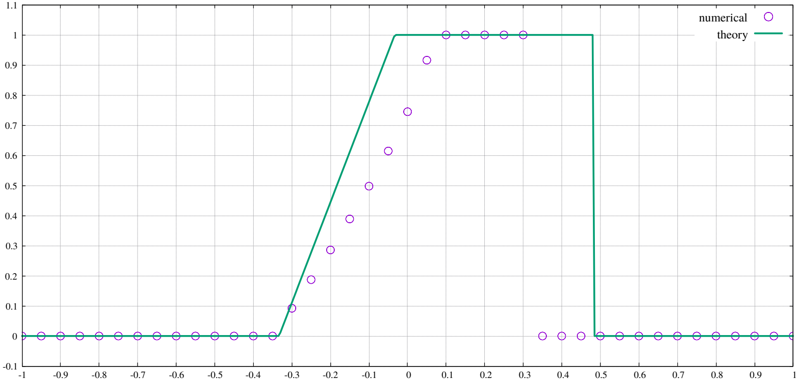

Figure: 不守恒格式

通量分裂技术

令

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u)$$

且要求

$$\frac{df^+(u)}{du} \geq 0, \qquad \frac{df^-(u)}{du} \leq 0.$$

以上称为通量分裂 (flux splitting)
守恒律的通量分裂形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0,$$

当所有的波都是右行波时，唯一的物理分裂是

$$f^+ = f, f^- = 0$$

当所有的波都是左行波时，唯一的物理分裂是

$$f^+ = 0, f^- = f$$

在其他情况，通量分裂不能描述波和通量之间的真实关系。

例 1: 采用通量分裂方法，设计线性对流方程的一阶迎风格式

$$f(u) = au, f^+(u) = \max(0, a)u, f^-(u) = \min(0, a)u$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \max(0, a)(u_i^n - u_{i-1}^n) - \lambda \min(0, a)(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

例 2: 采用通量分裂方法，设计 Burgers 方程的一阶迎风格式

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, f^+(u) = \max(0, u)\frac{u}{2}, f^-(u) = \min(0, u)\frac{u}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\min(0, u)u) \approx \frac{\min(0, u_{i+1}^n)u_{i+1}^n - \min(0, u_i^n)u_i^n}{h}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\max(0, u)u) \approx \frac{\max(0, u_i^n)u_i^n - \max(0, u_{i-1}^n)u_{i-1}^n}{h}$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}(\max(0, u_i^n)u_i^n - \max(0, u_{i-1}^n)u_{i-1}^n) \\ -\frac{\lambda}{2}(\min(0, u_{i+1}^n)u_{i+1}^n - \min(0, u_i^n)) \end{aligned}$$

通量分裂形式

$$\frac{\partial f^+}{\partial x} \approx \frac{\delta \hat{f}^+_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$
$$\frac{\partial f^-}{\partial x} \approx \frac{\delta \hat{f}^-_{i+\frac{1}{2}}}{h}$$

采用前向 Euler 时间离散，得到

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\delta \hat{f}^+_{i-\frac{1}{2}} + \delta \hat{f}^-_{i+\frac{1}{2}})$$

上式称为差分格式的通量分裂形式

Lemma (通量分裂格式可以表示为守恒形式，当且仅当)

$$\delta\hat{f}^{+}_{i+\frac{1}{2}}+\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}}=g^n_{i+1}-g^n_i$$

Proof.
必要性:

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\lambda(\delta\hat{f}^{+}_{i-\frac{1}{2}}-g_i^n+g_i^n+\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}})$$

与守恒形式比较

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}=\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}}+g_i^n,$$
$$\tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}}=-\delta\hat{f}^{+}_{i-\frac{1}{2}}+g_i^n$$

由于 $\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}=\tilde{F}^n_{(i-\frac{1}{2})+1}$,

$$-\delta\hat{f}^{+}_{i+\frac{1}{2}}+g^n_{i+1}=\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}}+g^n_i,$$

得证.

充分性: 根据已知条件

$$\delta\hat{f}^{+}_{i+\frac{1}{2}} - g^{n}_{i+1} = -(\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}} + g^{n}_{i})$$

于是

$$\delta\hat{f}^{+}_{i-\frac{1}{2}} - g^{n}_{i} + (\delta\hat{f}^{-}_{i+\frac{1}{2}} + g^{n}_{i}) = \delta\hat{f}^{+}_{i-\frac{1}{2}} - g^{n}_{i} - (\delta\hat{f}^{+}_{i+\frac{1}{2}} - g^{n}_{i+1})$$

记 $\tilde{F}^{n}_{i+1/2} = -(\delta\hat{f}^{+}_{i+\frac{1}{2}} - g^{n}_{i+1})$, 则 $\tilde{F}^{n}_{i-1/2} = -(\delta\hat{f}^{+}_{i-\frac{1}{2}} - g^{n}_{i})$ 从而差分格式可以表示为

$$u^{n+1}_{i} = u^{n}_{i} - \lambda(\tilde{F}^{n}_{i+1/2} - \tilde{F}^{n}_{i-1/2})$$

得证.

波速分裂技术 (wave speed splitting)

令

$$a(u) = a^+(u) + a^-(u),$$

且满足

$$a^+ \geq 0, \quad a^- \leq 0.$$

因而，标量守恒律可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^+ \frac{\partial u}{\partial x} + a^- \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

上式称为波速分裂形式.

波速分裂形式

$$a^{+}\frac{\partial u}{\partial x} \approx a^{+}_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}$$
$$a^{-}\frac{\partial u}{\partial x} \approx a^{-}_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$$

采用前向时间离散，得到

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a^{-}_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \lambda a^{+}_{i-\frac{1}{2}}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

上式称为差分格式的波速分裂形式。任何显式的守恒有限差分格式都可以表示为波速分裂形式。波速分裂形式与通量分裂形式的关系

$$\delta\hat{f}^{\pm}_{i+\frac{1}{2}} = a^{\pm}_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

Lemma (波速分裂形式可以表示为守恒形式，当且仅当)

$$(a^+_{i+\frac{1}{2}} + a^-_{i+\frac{1}{2}})(u^n_{i+1} - u^n_i) = g^n_{i+1} - g^n_i$$

与通量分裂类似，同样有

$$\begin{aligned} \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} &= a^-_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + g^n_i, \\ \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}} &= -a^+_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1}) + g^n_i \end{aligned}$$

任意的守恒差分格式，可以通过上式得到无穷多个波速分裂形式.

波速分裂的标准形式

Harten(1983) 发明了波速分裂的标准形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C^+_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) - C^-_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1})$$

与显式迎风格式进行比较，

$$C^+_{i+\frac{1}{2}} = -\lambda a^-_{i+\frac{1}{2}}, \quad C^-_{i+\frac{1}{2}} = \lambda a^+_{i+\frac{1}{2}}$$

对由波速分裂技术推导的格式，有

$$\lambda a(u) = C^-(u) - C^+(u), \quad C^+(u) \geq 0, \quad C^-(u) \geq 0$$

因而，可以表达成守恒格式的条件是

$$(C^-_{i+\frac{1}{2}} - C^+_{i+\frac{1}{2}})(u^n_{i+1} - u^n_i) = \lambda(g^n_{i+1} - g^n_i)$$

同样的，有

$$\lambda \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = -C^+_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \lambda g^n_i,$$
$$\lambda \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}} = -C^-_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1}) + \lambda g^n_i$$

例 1：求 FTBS 的一种有限系数的波速分裂形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n))$$

其守恒数值通量为 $\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = f(u_i^n)$，令 $g_i^n = f(u_i^n)$，则

$$\begin{aligned} \lambda\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} &= -C^+_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u_i^n) + \lambda f(u_i^n), \\ \lambda\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} &= -C^-_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u_i^n) + \lambda f(u^n_{i+1}) \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} C^+_{i+\frac{1}{2}} &= 0, \\ C^-_{i-\frac{1}{2}} &= \lambda\frac{f(u^n_{i+1} - f(u_i^n)}{u^n_{i+1} - u_i^n} = \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

其中

$$a^n_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{f(u^n_{i+1} - f(u_i^n)}{u^n_{i+1} - u_i^n}, & u^n_{i+1} \neq u_i^n, \\ f'(u_i^n), & u^n_{i+1} = u_i^n \end{cases}$$

例 2：求 FTCS 的一种有限系数的波速分裂形式

由于

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{f(u^n_{i+1} + f(u^n_i))}{2}$$

令 $g^n_i = f(u^n_i)$，则

$$\lambda\frac{f(u^n_{i+1}) + f(u^n_i)}{2} = -C^{+}_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \lambda f(u^n_i)$$

$$\lambda\frac{f(u^n_i) + f(u^n_{i-1})}{2} = -C^{+}_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1}) + \lambda f(u^n_i)$$

得到

$$\begin{aligned} C^{+}_{i+\frac{1}{2}} &= -\frac{\lambda}{2} a^n_{i+\frac{1}{2}}, \\ C^{-}_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda}{2} a^n_{i-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

人工粘性 (Artifical Viscosity)

二阶差分项具有粘性效应. 方程右端显式增加粘性项

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

空间导数采用中心差分离散

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2h}=\frac{\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^n\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{h}-\epsilon_{i-\frac{1}{2}}^n\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{h}}{h}$$

不需要保持人工粘性项的精确离散，将右端项乘以 $h/2$, 整理后得到

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^n)-f(u_{i-1}^n))+\frac{\lambda}{2}(\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n-u_i^n)-\epsilon_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n-u_{i-1}^n))$$

以上格式表示成守恒形式，守恒数值通量为

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f(u^n_i) + f(u^n_{i+1}) - \epsilon^n_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i))$$

上式称为人工粘性的守恒通量形式. 很容易发现，上式是在中心差分格式的守恒通量基础上添加了一个通量修正项，即

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = f^{FTCS}_{i+\frac{1}{2}} + f^{C}_{i+\frac{1}{2}}$$

其中

$$f^{FTCS}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f(u^n_i) + f(u^n_{i+1}))$$

$$f^{C}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i)$$

$\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}}$ 称为二阶人工粘性的粘性系数。

为了推导的方便，采用了显式人工粘性。实际在对一阶导数进行离散时，就能自然产生人工粘性，这种人工粘性称为隐式人工粘性。

例：将 FTFS 格式改写成人工粘性形式

FTFS 格式的守恒通量为 $f(u_{i+1}^n)$，因而

$$\frac{1}{2}(f(u_i^n)+f(u_{i+1}^n)-\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n-u_i^n))=f(u_{i+1}^n)$$

计算得到

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^n=-a_{i+\frac{1}{2}}^n$$

其中

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n=\begin{cases}\frac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n} & u_{i+1}^n\neq u_i^n\\ f'(u_i^n) & u_{i+1}^n=u_i^n\end{cases}$$

对于 FTBS 格式 $\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^n=-a_{i+\frac{1}{2}}^n$. 二阶人工粘性系数，当大于 0 时，称为 artifial dissipation; 当小于 0 时，称为 artifical antidissipation.

线性稳定性和非线性稳定性

线性稳定性分析主要是考虑数值解的有界性;
非线性稳定性主要关注单独的极值点 (极大值点、极小值点).
非线性稳定性对于激波和接触间断非常重要，因为如果不满足非线性稳定性，在这些区域会出现虚假振荡，严重影响解的精度和稳定性.

单调保持和单调格式

单调保持的含义：无穷空间域的标量守恒律的解是单调保持的，意味着当初值 $u(x,0)$ 是单调增加的，则解 $u(x,t)$ 在任意时刻都是单调增加的; 反之亦然.

数值格式的单调性指除了初值函数中的极值，数值解不能出现新的极值。换言之，数值解 u_i^{n+1} 不能超过上一时间层数值格式模板所包含网格点上的值 u_{i+j}^n 所覆盖值的范围.

单调格式是保持单调的，但是保持单调的格式不一定是单调格式.

Lemma (数值格式满足单调性的条件)

对于一般的显式数值格式

$$u_i^{n+1} = \sum_j b_j u_{i+j}^n$$

是单调格式的充分条件是

$$b_j \geq 0 \quad \forall j$$

Proof.

由格式的相容性条件

$$\sum_j b_j = 1$$

因而 $0 \le b_j \le 1$. 令

$$u_{\min}^n \le u_{i+j}^n \le u_{\max}^n$$

$u_{\max}^n, u_{\min}^n$ 分别表示格式模板中 u_{i+j}^n 最大值和最小值. 不等式乘以 b_j 并求和，

$$\sum_j b_j u_{\min}^n \le u_i^{n+1} = \sum_j b_j u_{i+j}^n \le \sum_j b_j u_{\max}^n$$

从而

$$u_{\min}^n \le u_i^{n+1} \le u_{\max}^n$$

□

线性对流方程的几个例子

考虑 $a>0$ 的情形, 迎风格式：

$$u_i^{n+1}=(1-\lambda a)u_i^n+\lambda a(u_{i-1}^n)$$

当 $0\le\lambda a\le 1$ 迎风格式是单调格式.
Lax-Friedrichs 格式:

$$u_i^{n+1}=(\frac{1}{2}-\lambda a)u_{i+1}^n+(\frac{1}{2}+\lambda a)u_{i-1}^n$$

说明当 $1>\lambda a>1/2$ 时，格式不是单调的.
Lax-Wendroff 格式:

$$u_i^{n+1}=(1+\lambda^2a^2)u_i^n+(\lambda-\frac{\lambda^2a^2}{2})u_{i-1}^n+(-\lambda-\frac{\lambda^2a^2}{2})u_{i+1}^n$$

Lax-Wendroff 格式不是单调格式.

Godunov 定理

Theorem (Godunov,1959)

对于双曲守恒律方程，线性单调保持格式至多具有一阶精度.

说明：

- 所有的二阶或高于二阶的线性格式，在间断处或者在存在大梯度的区域都会出现伪振荡;
- 构造二阶以上稳定格式必须要求格式是本质非线性的;
- 放宽对格式保持单调的限制，允许出现良性振荡，有可能会减少或者避免精度的损失.

TVD 条件和 TVD 格式

函数总变差的定义：

$$TV(u(\cdot,t)) = \sup_{\forall x_l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |u(x_{l+1},t) - u(x_l,t)|$$

在无穷域内定义的函数的总变差是函数极值的求和，其中极大值取正，极小值取负，无穷远处的极值计算一次，其余极值计算两次.
可以证明对于标量守恒律方程的解，其总变差非增，即要求

$$TV(u(\cdot,t_2)) \leq TV(u(\cdot,t_1))$$

对于任意 $t_2 \geq t_1$ 都成立.

数值解的总变差定义为：

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n|$$

如果数值解也满足总变差非增的要求，则

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

以上不等式即为 TVD 条件.
幸运的是，精确解总变差的计算方法也同样适用于数值解的总变差的计算.
总变差怎样才能不增加?

- 极大值不增加
- 极小值不减小
- 不出现新的极值点

数值格式的正条件 (Positivity condition)

数值格式的波速分裂形式：

$$u_i^{n+1} = u_i^n + C^+_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) - C^-_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1})$$

正条件：

$$C^+_{i+1/2} \geq 0, \quad C^-_{i+1/2} \geq 0,$$
$$C^+_{i+1/2} + C^-_{i+1/2} \leq 1$$

Harten(1983) 提出了格式的正条件.

Figure: Ami Harten (1946-1994)

Lemma (Harten,1983)

差分格式如果满足正条件，则一定满足 *TVD* 条件.

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + C^+_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^n - u_i^n) - C^-_{i-\frac{1}{2}}(u_i^n - u_{i-1}^n),\\
u_{i+1}^{n+1} &= u_{i+1}^n + C^+_{i+\frac{3}{2}}(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) - C^-_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^n - u_i^n)
\end{aligned}
$$

两式相减，得到

$$
\begin{aligned}
u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} = \quad & (1 - C^+_{i+\frac{1}{2}} - C^-_{i+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^n - u_i^n)\\
& + C^+_{i+\frac{3}{2}}(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n) + C^-_{i-\frac{1}{2}}(u_i^n - u_{i-1}^n)
\end{aligned}
$$

根据正条件，

$$
\begin{aligned}
|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \le \quad & (1 - C^+_{i+\frac{1}{2}} - C^-_{i+\frac{1}{2}})|(u_{i+1}^n - u_i^n)|\\
& + C^+_{i+\frac{3}{2}}|(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)| + C^-_{i-\frac{1}{2}}|(u_i^n - u_{i-1}^n)|
\end{aligned}
$$

不等式两边求和，得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|u_{i+1}^{n+1}-u_i^{n+1}| \leq & \sum_{i=-\infty}^{\infty}|u_{i+1}^{n}-u_i^{n}| \\ & -\sum_{i=-\infty}^{\infty}C_{i+\frac{1}{2}}^{+}|u_{i+1}^{n}-u_i^{n}|-\sum_{i=-\infty}^{\infty}C_{i+\frac{1}{2}}^{-}|u_{i+1}^{n}-u_i^{n}| \\ & +\sum_{i=-\infty}^{\infty}C_{i+\frac{3}{2}}^{+}|u_{i+2}^{n}-u_{i+1}^{n}|+\sum_{i=-\infty}^{\infty}C_{i-\frac{1}{2}}^{-}|u_{i}^{n}-u_{i-1}^{n}| \\ & =\sum_{i=-\infty}^{\infty}|u_{i+1}^{n}-u_i^{n}|.\end{aligned}$$

即

$$TV(u^{n+1})\leq TV(u^n)$$

得证.

例 1:Lax-Friedrichs 格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1-\lambda a_{i+\frac{1}{2}}^n}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - \frac{1+\lambda a_{i-\frac{1}{2}}^n}{2}(u_i^n - u_{i-1}^n)$$

其中

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n}, & u_i^n \neq u_{i+1}^n, \\ f'(u_i^n) & u_i^n = u_{i+1}^n. \end{cases}$$

例 2:FTCS 格式

$$\begin{aligned} C_{i+\frac{1}{2}}^{+} &= -\frac{\lambda}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n, \\ C_{i+\frac{1}{2}}^{-} &= \frac{\lambda}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n. \end{aligned}$$

例 3：当以下条件成立时，人工粘性格式满足正条件

$$|\lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}| \leq \lambda\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}} \leq 1$$

人工粘性形式的格式为：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}(f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)) + \frac{\lambda}{2}(\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) - \epsilon^n_{i-\frac{1}{2}}(u^n_i - u^n_{i-1}))$$

改写成波速分裂形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\lambda}{2}(\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}} - a^n_{i+\frac{1}{2}})(u^n_{i+1} - u^n_i) - \frac{\lambda}{2}(\epsilon^n_{i-\frac{1}{2}} + a^n_{i-\frac{1}{2}})(u^n_i - u^n_{i-1})$$

故

$$C^+_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2}(\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}} - a^n_{i+\frac{1}{2}})$$
$$C^-_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2}(\epsilon^n_{i+\frac{1}{2}} + a^n_{i+\frac{1}{2}})$$

迎风幅度条件 (Upwind Range Condition)

考虑迎风思想和特征线

当 $0 \le \lambda a(x_i, t^{n+1}) \le 1$ 时,

$$\min_{x_{i-1} \le x \le x_i} u(x, t^n) \le u(x_i, t^{n+1}) \le \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} u(x, t^n)$$

当 $-1 \le \lambda a(x_i, t^{n+1}) \le 0$ 时,

$$\min_{x_i \le x \le x_{i+1}} u(x, t^n) \le u(x_i, t^{n+1}) \le \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} u(x, t^n)$$

以上称为迎风幅度性质.

注意到

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{i-1}\le x\le x_i} u(x,t^n) &\le \min(u_{i-1}^n, u_i^n),\\
\max_{x_{i-1}\le x\le x_i} u(x,t^n) &\ge \max(u_{i-1}^n, u_i^n)
\end{aligned}
$$

因此当 $0 \le \lambda a(x_i, t^{n+1}) \le 1$, 如果

$$
\min(u_{i-1}^n, u_i^n) \le u(x_i^{n+1}) \le \max(u_{i-1}^n, u_i^n)
$$

则迎风幅度性质成立. 容易得到迎风幅度性质成立的简化条件

$$
\begin{aligned}
\min(u_{i-1}^n, u_i^n) \le u(x_i^{n+1}) \le \max(u_{i-1}^n, u_i^n), 0 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 1\\
\min(u_i^n, u_{i+1}^n) \le u(x_i^{n+1}) \le \max(u_i^n, u_{i+1}^n), -1 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 0
\end{aligned}
$$

以上称为迎风幅度条件，或迎风比较条件.

Lemma (显式迎风格式的迎风幅度条件成立，当且仅当)

$$0 \le C^-_{i+\frac{1}{2}} \le 1, C^+_{i+\frac{1}{2}} = 0, \mathit{if} \quad 0 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 1$$
$$0 \le C^+_{i+\frac{1}{2}} \le 1, C^-_{i+\frac{1}{2}} = 0, \mathit{if} \quad -1 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 0$$

Proof.

充分性: 只考虑 $0 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 1$ 的情形，
$-1 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 0$ 的情形类似

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C^-_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) = (1 - C^-_{i-1/2})u_i^n + C^-_{i-1/2}u_{i-1}^n$$

由于 $0 \le C^-_{i-1/2} \le 1$, 显然的 u_i^{n+1} 取值在 u_i^n, u_{i-1}^n 之间, 满足迎风幅度条件. □

必要性: 将格式表示为波速分裂形式

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + C_{i+1/2}^{+}(u_{i+1}^n - u_i^n) - C_{i-1/2}^{n}(u_i^n - u_{i-1}^n) \\
&= (1 - C_{i+1/2}^{+} - C_{i-1/2}^{-})u_i^n + C_{i-1/2}^{-}u_{i-1}^n + C_{i+1/2}^{n}u_{i+1}^n
\end{aligned}
$$

当 $0 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 1$, 如果 $C_{i+1/2}^{+} \neq 0$, 令 $u_{i-1}^n = 0, u_i^n = 0$, 但 $u_{i+1}^n \neq 0$, 则不满足迎风幅度条件, 与前提条件矛盾, 因此

$$
C_{i+1/2}^{+} = 0
$$

因此

$$
u_i^{n+1} = (1 - C_{i-1/2}^{-})u_i^n + C_{i-1/2}^{-}u_{i-1}^n
$$

不妨设 $u_i^n \ge u_{i-1}^n$, 则迎风幅度条件要求

$$
\begin{aligned}
u_{i-1}^n &(1 - C_{i-1/2}^{-})u_i^n + C_{i-1/2}^{-}u_{i-1}^n \\
u_i^n &\ge (1 - C_{i-1/2}^{-})u_i^n + C_{i-1/2}^{-}u_{i-1}^n
\end{aligned}
$$

即要求 $1 - C_{i-1/2}^{-} \ge 0, C_{i-1/2}^{-} \ge 0$.

$-1 \le \lambda a(u_i^{n+1}) \le 0$ 情形的证明类似.

- 迎风幅度条件隐含了正条件; 迎风幅度条件是正条件的特例.
- 迎风幅度条件假定 $\lambda|a| \leq 1$.
- 迎风幅度条件相对容易证明和实施，因此是最受欢迎的非线性稳定性条件.

例：证明当 $0 \le \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}} \le 1$ 时，FTBS 满足迎风幅度条件.
FTBS 的一种波速分裂形式为：

$$
\begin{aligned}
C^+_{i+\frac{1}{2}} &= 0, \\
C^-_{i+\frac{1}{2}} &= \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

显然在给定的条件下，满足迎风幅度条件.

通量限制方法的基本思想

我们之前介绍的格式都是第一代格式. 其中， 一阶格式精度低，但是在激波处不会产生伪振荡; 二阶格式，精度高于一阶格式，在光滑区域表现优于一阶格式，但是在激波处会出现伪振荡. 如果将一阶格式和二阶格式组合起来，在光滑区域采用精度较高的二阶格式，而在激波附近采用一阶格式，那么得到的格式，即能在光滑区域保持较高的精度，同时又可以在激波附近避免出现伪振荡.

问题：怎样区分激波和光滑区域？

(1) ratios of solution differrence

$$
\begin{aligned}
r_i^+ &= \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}, \\
r_i^- &= \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{u_i^n - u_{i-1}^n}.
\end{aligned}
$$

注意到 $r_i^+ = 1/r_i^-$. 解的差分比具有如下性质：

- $r_i^\pm \geq 0$ 表示解单调增加或者单调减少.
- $r_i^\pm \leq 0$ 表示解具有一个极大值或极小值.
- $|r_i^+|$ 很大，而 $|r_i^-|$ 很小，可能表示从左到右解的差分迅速减小 $(|u_i^n - u_{i-1}^n| \gg |u_{i+1}^n - u_i^n|)$, 或者表示 $u_{i+1}^n \approx u_i^n$.
- $|r_i^+|$ 很小，而 $|r_i^-|$ 很大，可能表示从左到右解的差分迅速增大 $(|u_i^n - u_{i-1}^n| \ll |u_{i+1}^n - u_i^n|)$, 或者表示 $u_{i-1}^n \approx u_i^n$.

Figure: Bram Van Leer

Van Leer's Flux-Limited Method

考虑线性对流方程，且令 $a > 0$. 采用 Lax-Wendroff 格式,

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^{L-W}_{i-\frac{1}{2}}),$$
$$\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}} = a u_i^n + \frac{1}{2} a(1-\lambda a)(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

采用 Beam-Warming 二阶迎风格式，

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^{B-W}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^{B-W}_{i-\frac{1}{2}}),$$
$$\tilde{F}^{B-W}_{i+\frac{1}{2}} = a u_i^n + \frac{1}{2} a(1-\lambda a)(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Van Leer 的通量限制方法：

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

其中

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1+\eta_i^n}{2}\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1-\eta_i^n}{2}\tilde{F}^{B-W}_{i+\frac{1}{2}}$$

或，

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = \quad & u_i^n - \lambda a(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\lambda}{4}(1-\lambda a)[(1+\eta_i^n)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ & + (1-\eta_i^n)(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)] \end{aligned}$$

注意到，当 $\eta_i^n = 1$ 时为 Lax-Wendroff 格式, 当 $\eta_i^n = -1$ 时为 Beam-Warming 格式, 当 $\eta_i^n = (r_i^+ + 1)/(r_i^+ - 1)$ 时为 FTBS, 其中

$$r_i^+ = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}.$$

当 $\eta_i^n = 1/3$ 时，格式具有三阶精度.

Van Leer 格式的通量函数

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = au^n_i + \frac{1+\eta^n_i}{4} a(1-\lambda a)(u^n_{i+1} - u^n_i) + \frac{1-\eta^n_i}{4} a(1-\lambda a)(u^n_i - u^n_{i-1})$$

表示成波速分裂形式：

$$\lambda \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = -C^+_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \lambda g^n_i$$

令 $g^n_i = \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$，得到

$$C^+_{i+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lambda \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = -C^-_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \lambda g^n_{i+1}$$

得到

$$C^-_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$\lambda a \left[1 + (1-\lambda a) \left(\frac{1+\eta^n_{i+1}}{4} \frac{1}{r^+_{i+1}} + \frac{1-\eta^n_{i+1}}{4} - \frac{1+\eta^n_i}{4} - \frac{1-\eta^n_i}{4} r^+_i \right) \right]$$

Van Leer 通量限制格式的波速分裂形式为：

$$
\begin{aligned}
C^{+}_{i+\frac{1}{2}} &= 0, \\
C^{-}_{i+\frac{1}{2}} &= \lambda a \left[1 + (1-\lambda a) \left(\frac{1+\eta^{n}_{i+1}}{4} \left(\frac{1}{r^{+}_{i+1}} - 1 \right) + \frac{1-\eta^{n}_{i}}{4} (1 - r^{+}_{i}) \right) \right]
\end{aligned}
$$

可以发现，当 $\lambda a \leq 1$，且

$$
\left| (1+\eta^{n}_{i+1}) \left(\frac{1}{r^{+}_{i+1}} - 1 \right) \right| \leq 2, \tag{1a}
$$

$$
|(1-\eta^{n}_{i})(1-r^{+}_{i})| \leq 2. \tag{1b}
$$

成立时，满足迎风幅度条件

$$
\begin{aligned}
C^{+}_{i+\frac{1}{2}} &= 0, \\
0 \leq C^{-}_{i+\frac{1}{2}} &\leq 1.
\end{aligned}
$$

当 $r_i^+ \leq 0$ 时，$\eta_i^n = \frac{r_i^+ + 1}{r_i^+ - 1}$.

证明：当 $r_i^+ \leq 0$ 时, 且不等式(1)要求对 $\forall i$ 都成立，因此不等式可以化为

$$
\begin{aligned}
|1+\eta_i^n| &\leq \frac{2|r_i^+|}{1+|r_i^+|}, \\
|1-\eta_i^n| &\leq \frac{2}{1+|r_i^+|}
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
|(1+\eta_i^n)-(1-\eta_i^n)| &\leq |1+\eta_i^n| + |1-\eta_i^n| \\
&\leq \frac{2|r_i^+|}{1+|r_i^+|} + \frac{2}{1+|r_i^+|} \\
&= 2,
\end{aligned}
$$

因此,$|\eta_i^n| \leq 1$.

于是，不等式可以进一步简化为：

$$1+\eta_i^n \leq \frac{2|r_i^+|}{1+|r_i^+|}$$
$$1-\eta_i^n \leq \frac{2}{1+|r_i^+|},$$

因此，

$$\eta_i^n \leq \frac{|r_i^+|-1}{|r_i^+|+1},$$
$$\eta_i^n \geq \frac{|r_i^+|-1}{|r_i^+|+1},$$

故 $\eta_i^n = \frac{|r_i^+|-1}{|r_i^+|+1}$，由于 $r_i^+ \leq 0$, 所以

$$\eta_i^n = \frac{r_i^+ + 1}{r_i^+ - 1},$$

即在极值点，Van Leer 通量限制方法得到的通量为一阶迎风格式的数值通量.

当 $r_i^+ > 0$ 时，η_i^n 可以取多个值.Van Leer 建议

$$\eta_i^n = \eta(r_i^+) = \frac{|r_i^+| - 1}{|r_i^+| + 1}$$

代入到不等式(1)中，显然满足迎风幅度条件. 或者，等价的取

$$\eta_i^n = -\frac{|u_{i+1}^n - u_i^n| - |u_i^n - u_{i-1}^n|}{|u_{i+1}^n - u_i^n| + |u_i^n - u_{i-1}^n|}.$$

当采用 Van Leer 限制器时，在单调区格式具有二阶精度，在极值点处格式的精度介于一阶和二阶之间; 只适用于线性方程，不能用于非线性方程（Burgers 方程，Euler 方程），因此被称为第二代方法.

作业

采用 Van Leer 通量限制方法计算线性对流问题 Test case1-2.
要求

- $\lambda = 0.8, N = 40$
- 采用 Van Leer 限制器函数，给出精确解和数值解曲线
- 当 $\eta_i^n = 1/3$ 时，给出数值解.

注意计算 r_i^+ 时，当 $u_{i+1}^n \approx u_i^n$ 时存在的问题.

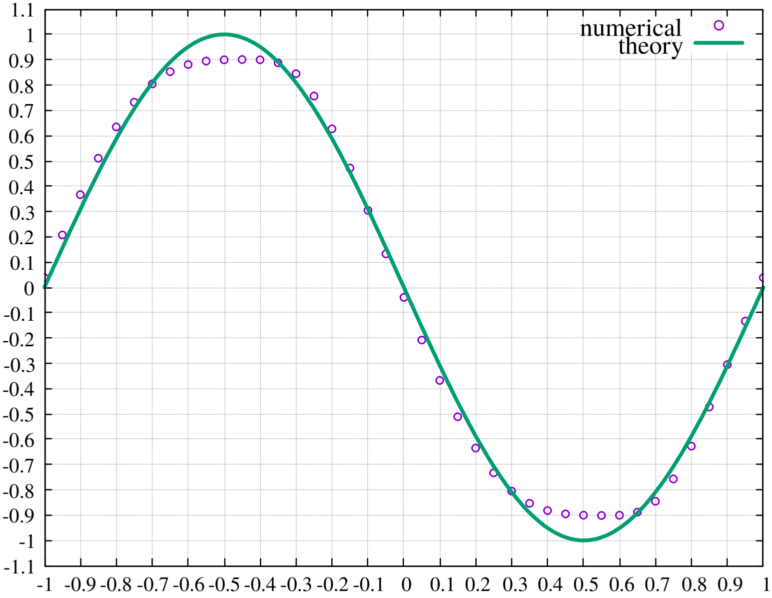

Figure: Van Leer 格式 (问题 1)

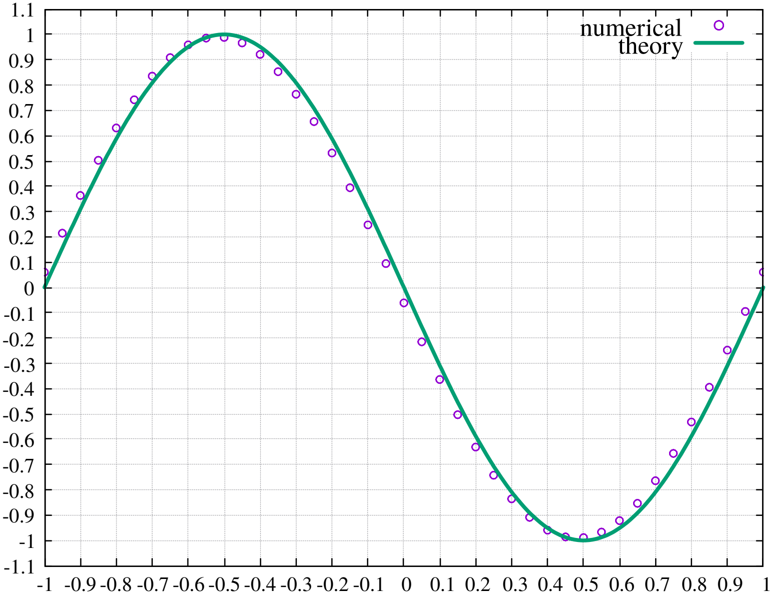

Figure: Van Leer 3 阶格式 ($\eta_i^n = 1/3$)(问题 1)

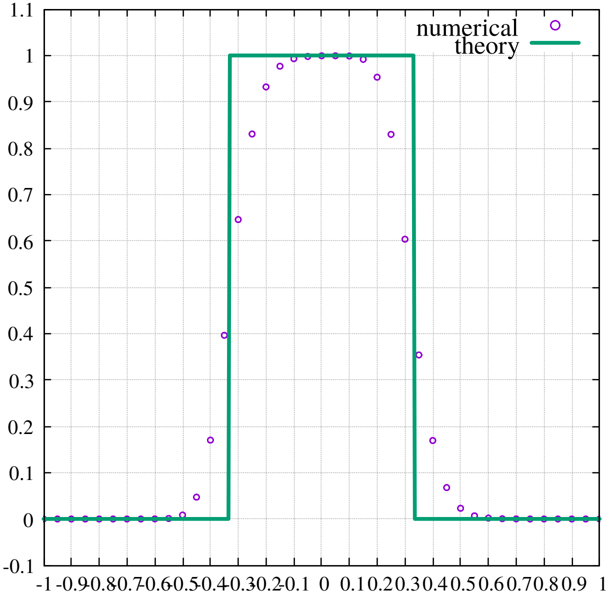

Figure: Van Leer 格式 (问题 2)

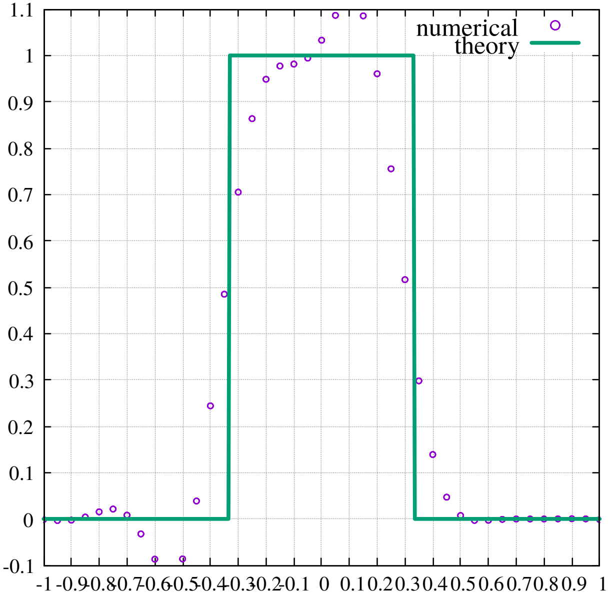

Figure: Van Leer 3 阶格式 ($\eta_i^n = 1/3$)(问题 2)

Sweby's Flux-Limited Method (TVD)

考虑线性对流方程，$a > 0$ 的情形.
FTBS 和 Lax-Wendroff 格式是相互补充的两种格式.
FTBS:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTBS} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{FTBS})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTBS} = a u_i^n.$$

Lax-Wendroff 格式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{L-W})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} = a u_i^n + \frac{1}{2} a(1 - \lambda a)(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

Sweby 的通量限制方法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

其中

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}^{FTBS}_{i+\frac{1}{2}} + \phi^n_{i+\frac{1}{2}}(\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^{FTBS}_{i+\frac{1}{2}})$$

对于 $a > 0$ 的情形，一般令 $\phi^n_{i+\frac{1}{2}} = \phi^n_i =$. 展开

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a(u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{\lambda a}{2}(1-\lambda a)[\phi_i^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - \phi_{i-1}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)].$$

尽管在形式上看起来不同，对于线性对流方程，Sweby 的通量限制器方法本质上等同于 Van Leer 的通量限制器方法.

$$\phi_i^n = \frac{1}{2}(1 + r_i^+ + \eta_i^n(1 - r_i^+))$$

当 $\phi_i^n = 1$ 时为 Lax-Wendroff 格式, 当 $\phi_i^n = 0$ 时为 FTBS 格式，当 $\phi_i^n = r_i^+$ 时为 Beam-Warming 格式.

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = au^n_i + \frac{1}{2}\phi^n_i a(1-\lambda a)(u^n_{i+1} - u^n_i)$$

将格式表示为波速分裂形式：令 $g^n_i = \tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$，可得 $C^+_{i+\frac{1}{2}} = 0$. 由于

$$\lambda a u^n_i + \frac{\lambda a}{2}(1-\lambda a)\phi^n_i(u^n_{i+1} - u^n_i) = -C^-_{i+\frac{1}{2}}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \lambda g^n_{i+1}$$

从而

$$\begin{aligned} C^-_{i+\frac{1}{2}} &= \lambda a \left(1 + \frac{1-\lambda a}{2}\phi^n_{i+1}\frac{1}{r^+_{i+1}} - \frac{1-\lambda a}{2}\phi^n_i\right) \\ &= \lambda a \left[1 + \frac{1-\lambda a}{2}\left(\frac{\phi^n_{i+1}}{r^+_{i+1}} - \phi^n_i\right)\right] \end{aligned}$$

为了满足迎风幅度条件，要求 $0 \le \lambda a \le 1$，且

$$C^{+}_{i+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$0 \le C^{-}_{i+\frac{1}{2}} \le 1.$$

因而

$$\frac{1-\lambda a}{2}\left(\frac{\phi^n_{i+1}}{r^+_{i+1}} - \phi^n_i\right) \le -1$$

且

$$1 + \frac{1-\lambda a}{2}\left(\frac{\phi^n_{i+1}}{r^+_{i+1}} - \phi^n_i\right) \le \frac{1}{\lambda a}$$

从而得到如下不等式

$$-\frac{2}{1-\lambda a} \le \frac{\phi^n_{i+1}}{r^+_{i+1}} - \phi^n_i \le \frac{2}{\lambda a}$$

进一步放宽不等式的范围

$$\left|\frac{\phi^n_{i+1}}{r^+_{i+1}} - \phi^n_i\right| \le 2$$

上一个不等式成立的一个充分条件是

$$0 \le \phi_i^n + K \le 2,$$
$$0 \le \frac{\phi_i^n}{r_i^+} + K \le 2.$$

取 $K = 0$, 可得

$$0 \le \phi_i^n \le 2,$$
$$0 \le \frac{\phi_i^n}{r_i^+} \le 2$$

或者，等价的有

$$\begin{cases} 0 \le \phi_i^n \le \min(2, 2r_i^+) & r_i^+ > 0 \\ \phi_i^n = 0 & r_i^+ \le 0. \end{cases}$$

可见，当 $r_i^+ \le 0$ 时，数值通量是一阶迎风数值通量. 可以构造不同的通量限制器 $\phi_i^n = \phi(r_i^+)$ 函数满足上述条件.

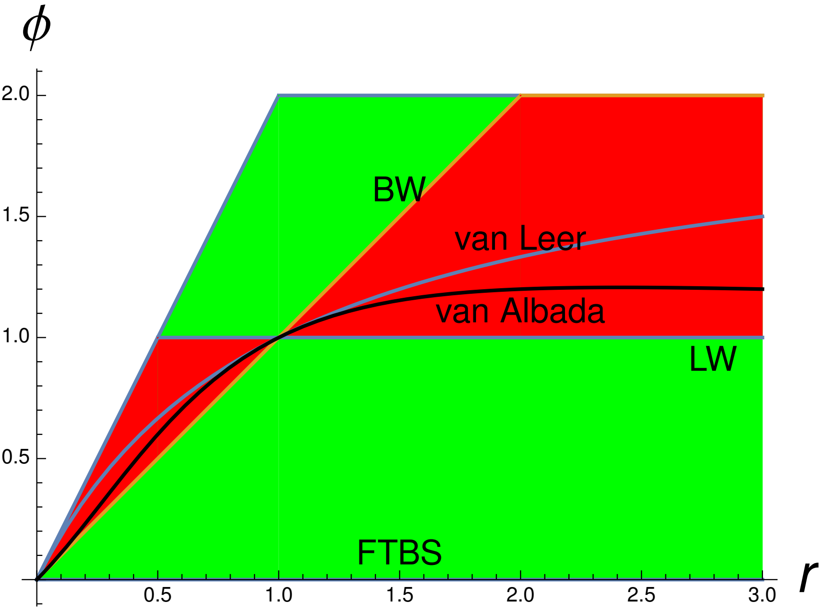

Figure: Sweby 通量限制器

几种常用限制器

第一种 minmod 限制器

$$\phi(r) = minmod(1, br)$$

其中，$1 \leq b = const. \leq 2$,

$$minmod(1, br) = \begin{cases} 1 & br \geq 1, \\ br & 0 \leq br < 1, \\ 0 & br < 0. \end{cases}$$

第二种 minmod 限制器

$$\phi(r) = minmod(b, r)$$

其中，$1 \leq b = const. \leq 2$

Superbee 限制器

$$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) = \begin{cases} 2r & 0 \le r \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \frac{1}{2} \le r \le 1, \\ r & 1 \le r \le 2, \\ 2 & r \ge 2. \end{cases}$$

可微限制器

Van Leer 限制器

$$\phi(r) = \frac{r + |r|}{r + 1}$$

van Albada 限制器

$$\phi(r) = \max(0, \frac{r^2 + r}{r^2 + 1})$$

对于 $a<0$ 的线性对流方程，
FTFS:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{FTFS})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS} = a u_{i+1}^n.$$

Lax-Wendroff 格式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{L-W})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} = a u_{i+1}^n - \frac{1}{2} a(1+\lambda a)(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

Sweby 的通量限制方法

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

其中

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}^{FTFS}_{i+\frac{1}{2}} + \phi^n_{i+1}(\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^{FTFS}_{i+\frac{1}{2}})$$

或者

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = au^n_{i+1} - \frac{1}{2}a\phi^n_{i+1}(1+\lambda a)(u^n_{i+1} - u^n_i)$$

其中 $\phi^n_{i+1} = \phi(r^-_{i+1})$. 等价地,

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda a(u^n_{i+1} - u^n_i) - \frac{\lambda a}{2}(1+\lambda a)[\phi^n_{i+1}(u^n_{i+1} - u^n_i) - \phi^n_i(u^n_i - u^n_{i-1})].$$

当 $\phi^n_{i+1} = 1$ 时为 Lax-Wendroff 格式, 当 $\phi^n_{i+1} = 0$ 时为 FTFS 格式，当 $\phi^n_{i+1} = 1/(1+\lambda a)$ 时为 FTCS, 当 $\phi^n_i = r^-_{i+1}$ 时为 Beam-Warming 格式.

$$r^-_{i+1} = \frac{u^n_{i+2} - u^n_{i+1}}{u^n_{i+1} - u^n_i}$$

通过采用与 $a>0$ 时相同的方法，可以得知当下列不等式成立时，满足迎风幅度条件

$$0 \le \phi_i^n + K \le 2,$$
$$0 \le \frac{\phi_i^n}{r_i^-} + K \le 2.$$

取 $K=0$, 可得

$$0 \le \phi_i^n \le 2,$$
$$0 \le \frac{\phi_i^n}{r_i^-} \le 2$$

在 $a>0$ 情形推导得到的 Sweby 限制器仍然适用于 $a<0$ 的情形，只需将 r^+ 换成 r^- 即可.

非线性标量守恒律

考虑 $a(u) > 0$ 的情形

FTBS

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTBS} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{FTBS})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTBS} = f(u_i^n),$$

Lax-Wendroff 格式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{L-W})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} = f(u_i)^n + \frac{1}{2}a_{i+\frac{1}{2}}^n(1 - \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

其中

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n} & u_{i+1}^n \neq u_i^n \\ f'(u_i^n) & u_{i+1}^n = u_i^n \end{cases}$$

假定 $\phi_i^n=\phi(r_i^+)$,Sweby 的通量限制方法

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}=\tilde{F}^{FTBS}_{i+\frac{1}{2}}+\phi_i^n(\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}}-\tilde{F}^{FTBS}_{i+\frac{1}{2}})$$

或

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}}=f(u_i^n)+\frac{1}{2}\phi_i^n a^n_{i+\frac{1}{2}}(1-\lambda a^n_{i+\frac{1}{2}})(u^n_{i+1}-u^n_i)$$

其中 $\phi_i^n=\phi(r_i^+)$

$$r_i^+=\frac{\tilde{F}^{L-W}_{i-\frac{1}{2}}-\tilde{F}^{FTBS}_{i-\frac{1}{2}}}{\tilde{F}^{L-W}_{i+\frac{1}{2}}-\tilde{F}^{FTBS}_{i+\frac{1}{2}}}=\frac{a^n_{i-\frac{1}{2}}(1-\lambda a^n_{i-\frac{1}{2}})(u^n_i-u^n_{i-1})}{a^n_{i+\frac{1}{2}}(1-\lambda a^n_{i+\frac{1}{2}})(u^n_{i+1}-u^n_i)}$$

当 $\phi_i^n=1$ 时为 Lax-Wendroff 格式, 当 $\phi_i^n=0$ 时为 FTBS 格式，当 $\phi_i^n=r_i^+$ 时为 Beam-Warming 格式.

表示为波速分裂形式

$$
\begin{aligned}
C^{+}_{i+\frac{1}{2}} &= 0 \\
C^{-}_{i+\frac{1}{2}} &= \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}}) \left(\frac{\phi^n_{i+1}}{r^{+}_{i+1}} - \phi^n_i \right) \right]
\end{aligned}
$$

在 $0 < \lambda a^n_{i+\frac{1}{2}} \le 1$ 时，欲满足迎风幅度条件，与前面线性方程的推导类似，同样可以得到一个充分条件：

$$
\begin{gathered}
0 \le \phi^n_i \le 2, \\
0 \le \frac{\phi^n_i}{r^{+}_i} \le 2
\end{gathered}
$$

因而由线性对流方程推导的 Sweby 限制器同样适用于非线性双曲守恒律.

考虑 $a(u) < 0$ 的情形

FTFS

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTBS} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{FTBS})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS} = f(u_{i+1}^n),$$

Lax-Wendroff 格式:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^{L-W})$$
$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} = f(u_{i+1})^n - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

其中

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} & u_{i+1}^n \neq u_i^n \\ f'(u_i^n) & u_{i+1}^n = u_i^n \end{cases}$$

假定 $\phi_i^n = \phi(r_i^-)$,Sweby 的通量限制方法

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS} + \phi_{i+1}^n(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS})$$

或

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_{i+1}^n) - \frac{1}{2}\phi_{i+1}^n a_{i+\frac{1}{2}}^n(1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

其中 $\phi_{i+1}^n = \phi(r_{i+1}^-)$

$$r_{i+1}^- = \frac{\tilde{F}_{i+\frac{3}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i+\frac{3}{2}}^{FTFS}}{\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{L-W} - \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^{FTFS}} = \frac{a_{i+\frac{3}{2}}^n(1 + \lambda a_{i+\frac{3}{2}}^n)(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)}{a_{i+\frac{1}{2}}^n(1 + \lambda a_{i+\frac{1}{2}}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n)}$$

对于一般的非线性标量守恒律，采用通量分裂方法.

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u)$$

其中

$$a^+(u) = \frac{df^+(u)}{du} \geq 0, \quad a^-(u) = \frac{df^-(u)}{du} \leq 0$$

因而

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^+(u)}{\partial x} + \frac{\partial f^-(u)}{\partial x} = 0$$

分别采用 $a(u) > 0$ 和 $a(u) < 0$ 时的 Sweby 通量限制方法求得相应的正、负分裂通量的守恒数值通量 $\hat{f}^+, \hat{f}^-$，得到

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\hat{f}^+_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^+_{i-\frac{1}{2}}) - \lambda(\hat{f}^-_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}^-_{i-\frac{1}{2}})$$

令

$$\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}^+_{i+\frac{1}{2}} + \hat{f}^-_{i+\frac{1}{2}}$$

从而

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\tilde{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{F}^n_{i-\frac{1}{2}})$$

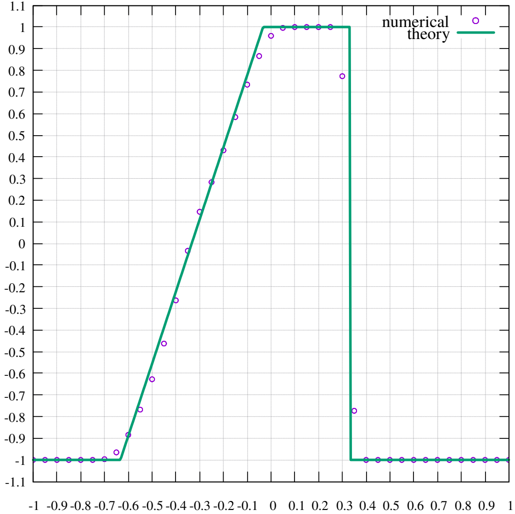

Figure: Van Leer 限制器 (问题 4)

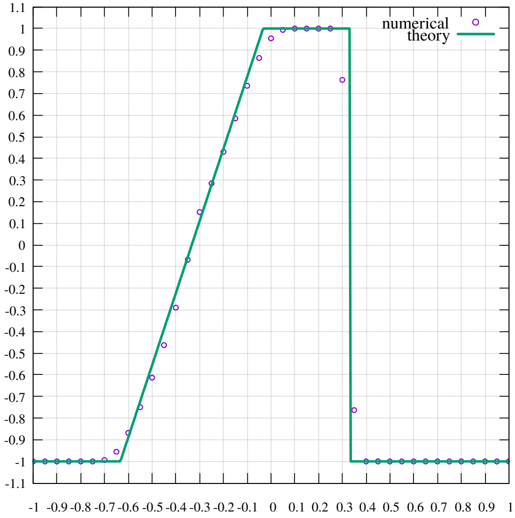

Figure: Van Albada 限制器 (问题 4)

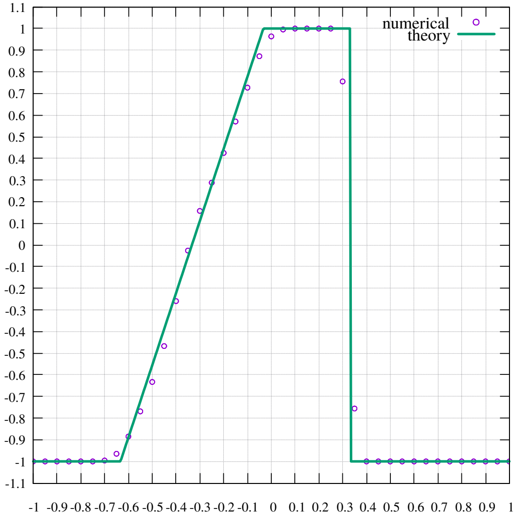

Figure: minmod 限制器 (问题 4)

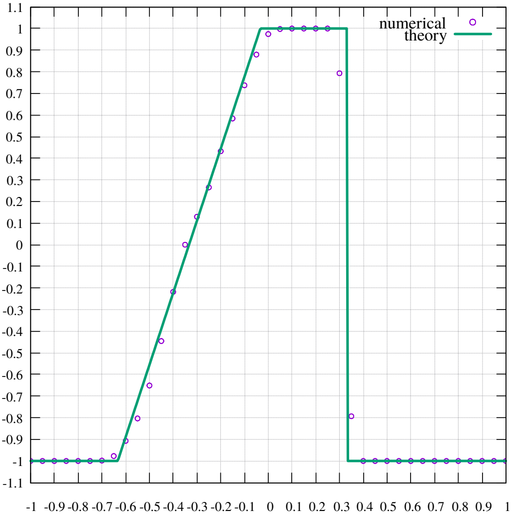

Figure: Superbee 限制器 (问题 4)

Method of Lines

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

将离散过程分为空间离散和时间离散 2 个部分：

(1) 空间离散

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, t) \approx \frac{\hat{f}_{s,i+1/2}(t) - \hat{f}_{s,i+1/2}(t)}{\Delta x}$$

冻结时间，离散空间，得到

$$\frac{du}{dt}(x_i, t) \approx -\frac{\hat{f}_{s,i+1/2}(t) - \hat{f}_{s,i-1/2}(t)}{\Delta x}$$

以上称为半离散的有限差分近似，$\hat{f}_s$ 称为半离散的守恒数值通量. 半离散近似构成了常微分方程组，在通常情况下，只需要知道离散时间层上进行半离散近似，因此

$$\frac{du_i^n}{dt} \approx -\frac{\hat{f}^n_{s,i+1/2} - \hat{f}^n_{s,i-1/2}}{\Delta x}$$

其中 $u_i^n = u(x_i, t^n)$，$\hat{f}^n_{s,i+1/2} = \hat{f}_{s,i+1/2}(t^n)$

(2) 时间离散

采用常微分方程求解器，如 Runge-Kutta 方法求解半离散方程，求得某一 $\hat{f}$，使得

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=-\frac{\hat{f}_{i+1/2}^n-\hat{f}_{i-1/2}^n}{\Delta x}$$

即冻结空间，离散时间. 上式称为完全离散的有限差分近似，$\hat{f}$ 称为完全离散的守恒数值通量.

以上的两步过程有时称为 *method of lines*.

在选择了空间离散，可以灵活选择时间离散格式.

半离散近似的右端项称为残值 (residual)，

$$R_i(t)=-\frac{\hat{f}_{s,i+1/2}(t)-\hat{f}_{s,i-1/2}(t)}{\Delta x}$$

对于定常问题，残值应该趋于 0. 残值的大小可以视为定常问题收敛与否的一个指标.

TVD/MUSCL 格式

Anderson,Thomas, Van Leer(1986): Monotone upstream-centered scheme for conservation laws

考虑标量守恒律的守恒半离散有限体积方法

$$\frac{d\bar{u}_i^n}{dt} = -\frac{\hat{f}^n_{s,i+1/2} - \hat{f}^n_{s,i-1/2}}{\Delta x}$$

其中

$$\bar{u}_i^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n)\,dx$$

$$\hat{f}^n_{s,i+1/2} \approx f(u(x_{i+1/2}, t^n))$$

采用通量分裂，$f(u) = f^+(u) + f^-(u)$，

$$\hat{f}^n_{s,i+1/2} \approx f^+(u^-(x_{i+1/2}, t^n)) + f^+(u^-(x_{i+1/2}, t^n))$$

我们需要知道 $u^\pm(x_{i+1/2}, t^n)$ 的近似值，或重构值.

重构方法

- 0 阶重构

$$u^-(x_{i+1/2},t^n)=u_i^n,$$
$$u^+(x_{i+1/2},t^n)=u_{i+1}^n$$

  具有 1 阶空间精度.

- 1 阶重构

$$u^-(x_{i+1/2},t^n)=u_i^n+\frac{1}{2}(u_i^n-u_{i-1}^n),$$
$$u^+(x_{i+1/2},t^n)=u_{i+1}^n-\frac{1}{2}(u_{i+2}^n-u_{i+1}^n)$$

  具有 2 阶空间精度.

引入斜率限制器, 取 0 阶重构和 1 阶重构的线性组合

$$u^-(x_{i+1/2},t^n)=u_i^n+\frac{1}{2}\phi(r_i^+)(u_i^n-u_{i-1}^n),$$
$$u^+(x_{i+1/2},t^n)=u_{i+1}^n-\frac{1}{2}\phi(r_{i+1}^-)(u_{i+2}^n-u_{i+1}^n)$$

TVD/MUSCL 格式的半离散形式为

$$\frac{d\bar{u}_i^n}{dt} = -\frac{\hat{f}^n_{s,i+1/2} - \hat{f}^n_{s,i-1/2}}{\Delta x}$$

其中

$$\hat{f}^n_{s,i+1/2} = f^+(u^-_{i+1/2}) + f^-(u^+_{i+1/2})$$

或者

$$\hat{f}^n_{s,i+1/2} = f^+\left(u_i^n + \frac{1}{2}\phi(r_i^+)(u_i^n - u_{i-1}^n)\right) + f^-\left(u_{i+1}^n - \frac{1}{2}\phi(r_{i+1}^-)(u_{i+2}^n - u_{i+1}^n)\right)$$

限制器函数可以采用 Sweby 通量限制方法中用到的限制器函数.