Fizi1004: Hidrodinamikas pamati

Praktiskais darbs Nr. 1

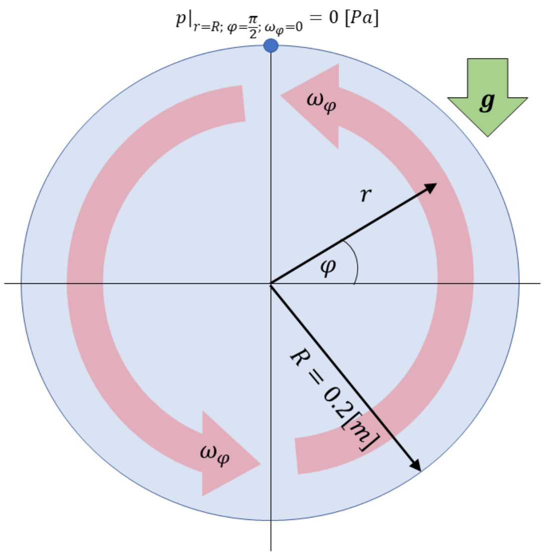
“Gandrīz-hidrostatika”

**Sistēmas apraksts**

Jums ir dots disks ar ārējo rādiusu $R = 0.2\ [m]$, kas pildīts ar ūdeni $\rho = 1000\ [kg/m^3]$ (skat. 1. attēlu). Uz šķidrumu diskā darbojas smaguma spēks. Disku ar visu šķidrumu ir iespējams rotēt ar ātrumu $n = 0: 50: 300\ [apgr./min]$ tā, ka šķidrums rotē, kā ciets ķermenis: $v_\varphi(r) = \omega_\varphi r$.

Jūs interesē spiediena $p$ sadalījums šajā sistēmā atkarībā no diska rotācijas ātruma. Lai to aprēķinātu, izdevīgi pāriet uz polāro $(r, \varphi)$ koordinātu sistēmu. Zināms, ka diskam nerotējot, spiediens tā augšējā punktā ir: $p(R, \pi/2) = 0\ [Pa]$. Vektora $\boldsymbol{g}$ komponentes tajā pierakstāmas:

$$g_r = -g \cdot sin(\varphi) \quad (1)$$
$$g_\varphi = -g \cdot cos(\varphi) \quad (2)$$




*Attēls 1. Rotējošs disks ar ūdeni.*

Sistēmas līdzsvars ir līdzīgs hidrostatiskajam – smagumu spēku kompensē spiediena gradients, izņemot papildus locekli $-\rho\frac{v_\varphi^2}{r}$ radiālajai spēka blīvuma komponentei. Polārajā (vai 2D cilindriskajā) koordinātu sistēmā impulsa pārneses jeb Navjē - Stoksa vienādojums, neievērojot viskozitāti, komponentēs pierakstāms:

$$\begin{cases} -\rho\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial r} - \rho g \cdot sin(\varphi) & (3) \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial \varphi} - \rho g \cdot cos(\varphi) & (4) \end{cases}$$

Kur vienādojums (3) raksturo spēku līdzsvaru radiālās komponentes $(r)$ virzienā, bet vienādojums (4) leņķiskās komponentes $(\varphi)$ virzienā. Pievērsiet uzmanību, ka spiediens $p(r, \varphi)$ ir funkcija no $r$ un $\varphi$!

Lai atrastu spiediena sadalījumu $p(r, \varphi)$ vispirms aplūkosim vienādojumu (4) un mēģināsim kaut ko izspriest par tā atrisinājuma formu. Vienādojumu (4) var nedaudz pārveidot un pārrakstīt:

$$\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial \varphi} = -\rho g \cdot r \cdot cos(\varphi) = h(r,\varphi) \quad (5)$$

Pirmajā brīdī varētu šķist, ka vienādojums (5) ir tikai nedaudz pārveidots (4) un tas absolūti neko jaunu nepasaka. Sastādīsim tā *matemātisko teikumu*: “Funkcijas $p(r, \varphi)$ parciāl-atvasinājums pēc $\varphi$ ir kāda cita funkcija $h(r, \varphi) = -\rho g \cdot r \cdot cos(\varphi)$.” Vai tas nozīmē, ka varam atrast $p(r, \varphi)$ vienkārši nointegrējot $h(r, \varphi)$ pa $\varphi$... ?

Ne gluži!

Tam pašam teikumam starp rindām ir izlasāms: “Funkcija $p(r,\varphi)$ var saturēt jebkuru funkciju, kas atkarīga tikai no radiālās koordinātes - $f(r)$, un parciālais atvasinājums būs tāds pats.” Tas parādīts vienādojumā (6):

$$\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial(\int h(r,\varphi)\partial\varphi + f(r))}{\partial \varphi} = h(r,\varphi) = -\rho g \cdot r \cdot cos(\varphi) \quad (6)$$

Tas nozīmē, ka $p(r,\varphi)$ atrisinājums vispārīgā gadījumā var būt:

$$p(r,\varphi) = \int h(r,\varphi)\partial\varphi + f(r) \quad (7)$$

Tagad varam integrēt (5), neuztraucoties, ka būsim kaut ko aizmiruši. Iegūst:

$$p(r,\varphi) = -\rho g \cdot r \cdot \int cos(\varphi) d\varphi + f(r) = -\rho g \cdot r \cdot sin(\varphi) + f(r) \quad (8)$$

Lai atrastu funkciju $f(r)$, ir jārisina vienādojums (3). Redzam, ka tam locekļiem labajā un kreisajā pusē ir konstante $\rho$. Ērtības labad varam pārrakstīt (8):

$$p(r,\varphi) = -\rho\big(g \cdot r \cdot sin(\varphi) + f(r)\big) \quad (9)$$

Šajā solī nedaudz pārdefinējām $f(r)$, izdalot to ar konstanti $-\rho$. Formāli varētu ieviest tai jaunu apzīmējumu, bet tā kā runa vēljoprojām ir par nezināmu funkciju, to *var* arī nedarīt.

Ievietojot spiediena formu (9) vienādojumā (3) iegūst:

$$-\rho\frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p(r,\varphi)}{\partial r} - \rho g \cdot sin(\varphi) \quad \rightarrow \quad -\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial(g \cdot r \cdot sin(\varphi) + f(r))}{\partial r} - g \cdot sin(\varphi) \quad (10)$$

Izpildot atvasināšanas darbību vienādojumā (10) iegūst:

$$-\frac{v_\varphi^2}{r} = g \cdot sin(\varphi) + \frac{df(r)}{dr} - g \cdot sin(\varphi) \quad (11)$$

Redzams, ka varam (11) saīsināt un, atceroties $v_\varphi(r)$ definīciju, pārveidot un integrēt:

$$f(r) = -\int \frac{v_\varphi^2}{r}\, dr = -\omega_\varphi^2 \int r dr = -\frac{\omega_\varphi^2 r^2}{2} + C \quad (12)$$

Gandrīz esam ieguvuši spiediena sadalījumu (13), bet integrēšanas rezultātā ir parādījusies konstante $C$. Ļoti gribētos, lai tā būtu nulle… bet tā tas var arī nebūt. Kā gan to varam noteikt?

$$p(r,\varphi) = -\rho\left(g \cdot r \cdot sin(\varphi) - \frac{\omega_\varphi^2 r^2}{2} + C\right) \quad (13)$$

To atrodam no mums zināmā nosacījuma (robežnosacījuma), ka šķidrumam nerotējot tā augšējā punktā spiediens ir 0 [Pa], jeb:

$$p(R,\pi/2)|_{\omega_\varphi=0} = -\rho(g \cdot R + C) = 0 \quad \rightarrow \quad C = -gR \quad (14)$$

Visbeidzot spiediena sadalījums rotējoša šķidruma diskā pierakstāms:

$$p(r,\varphi) = \rho \cdot \left[(R - r \cdot sin(\varphi)) \cdot g + \frac{\omega_\varphi^2 r^2}{2}\right] \quad (15)$$

**Uzdevumi**

1) Izpētiet sistēmas aprakstu un izvedumu spiediena sadalījuma formulai (15). Pārliecinieties un parādiet, ka statiskā gadījumā, kad $\omega_\varphi = 0$, formula atbilst hidrostatiskā spiediena formulai.

2) Pierakstiet ātruma diverģences izteiksmi un pārbaudiet vai apskatītā šķidruma plūsma ar ātruma sadalījumu $v_\varphi(r) = \omega_\varphi r$ apmierina nepārtrauktības nosacījumu <u>polārajās koordinātēs</u>. Paskaidrojiet, kāpēc šāda plūsma to apmierina/neapmierina?

3) Izmantojot MatLab, Python, Mathematica vai citus rīkus:

   a. Uzzīmējiet vektora **g** sadalījumu apskatītās sistēmas robežās[1]
   b. Uzzīmējiet vektora **v** sadalījumu apskatītās sistēmas robežās, kad $\omega_\varphi > 0$
   c. Uzzīmējiet skalārā lauka p sadalījumu apskatītās sistēmas robežās[2], izmantojot formulu (15) pie dažādiem rotācijas ātrumiem: $n = 0:50:300\ [apgr./min]$
   d. <u>*Papildus uzdevums</u>: Uzzīmējiet spiediena gradienta sadalījumu pie dažādiem rotācijas ātrumiem: $n = 0:50:300\ [apgr./min]$

4) Apskatiet punktā 3 c) iegūtos spiediena sadalījuma attēlus. Raksturojiet, kā spiediens mainās, palielinot rotācijas ātrumu. Raksturojiet un vienkāršā veidā ilustrējiet, kas, jūsuprāt, notiktu katrā no gadījumiem ar mazu gaisa burbuli, ja tas tiktu ievadīts sistēmā no tās apakšas.

[1] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/quiver.html

[2] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/contourf.html