МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»

(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

По основной образовательной программе подготовки бакалавров направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика профиль «Системное программирование»

Студент группы Б9122-01.03.02сп(4)
Кириенко Денис Олегович

____

(подпись)

«_____» ________________ 2024 г.

Преподаватель _старший преподаватель__
(должность, ученое звание)

Журавлев Павел Викторович___

____

(подпись) (ФИО)

«______» _______________2024 г.

г. Владивосток

2024

Постановка задачи

Реализовать и протестировать метод “вращения с преградами” для решения полной проблемы собственных значений.

Теоретическое описание метода

Метод предназначен для решения полной проблемы собственных значений невырожденной симметрической матрицы A. Решается она с помощью сходящихся итерационных процессов.

Входные данные:

1. Невырожденная симметрическая матрица A
2. Положительное число p, определяющее точность решения

Результатом работы метода является диагональная матрица D, на диагонали которой расположены все собственные значения данной матрицы.

Практическая часть

На каждой итерации строится матрица вращения T_{ij}, посредством которой происходит переход в следующую итерацию: $A^{m+1}=T_{ij}^{T}A^{m}T_{ij.}$

В методе осуществляется два цикла: общий - с итератором k, и вложенный - с итератором m.

Для построения матрицы вращения T_{ij} необходимо выполнение нескольких шагов:

1. Вычислить преграду σ_k

Вычисление преграды имеет несколько реализаций. В данной работе преграда на шаге k вычислялась так: $\sigma_k = \sqrt{(\max| a_{ij}^{(m)} |)} * 10^{-k}$, где k - шаг, m - номер итерации матрицы A, а $a_{ij}^{(m)}$ - всякое значение матрицы $A^{(m)}$.

2. Найти значения i и j

Парой индексов (i, j) обозначается наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы $A^{(m)}$ на шаге m, который соответствует условию $|a_{ij}^{(m)}| \geqslant \sigma_k$.

3. Найти значения c и s

Значения c и s должны быть такими, что $s^2 + c^2 = 1$. Вычисляются они по заданным формулам:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{|a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)}|}{d}}),$$

$$s = sgn[a_{ij}^{(m)}(a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)})]\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{|a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)}|}{d}}), \quad d = \sqrt{(a_{ii}^{(m)} - a_{jj}^{(m)})^2 + 4a_{ij}^{(m)2}}$$

, где (i, j) - пара индексов, найденная на шаге 2.

После выполнения указанных шагов строится матрица T_{ij}. Она основывается на единичной матрице, однако отличие матрицы вращения от единичной состоит в том, что:

1. Значение на позиции (i, i) равняется c
2. Значение на позиции (i, j) равняется -s
3. Значение на позиции (j, i) равняется s
4. Значение на позиции (j, j) равняется c

После этого находится $A^{m+1}=T_{ij}^{T}A^{m}T_{ij}$ и так происходит переход на следующую итерацию.

Итерации заканчиваются на шаге m, если не удается найти наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы $A^{(m)}$, модуль которого больше либо равен текущей преграде, то есть элемент с шага 2 построения матрицы вращения.

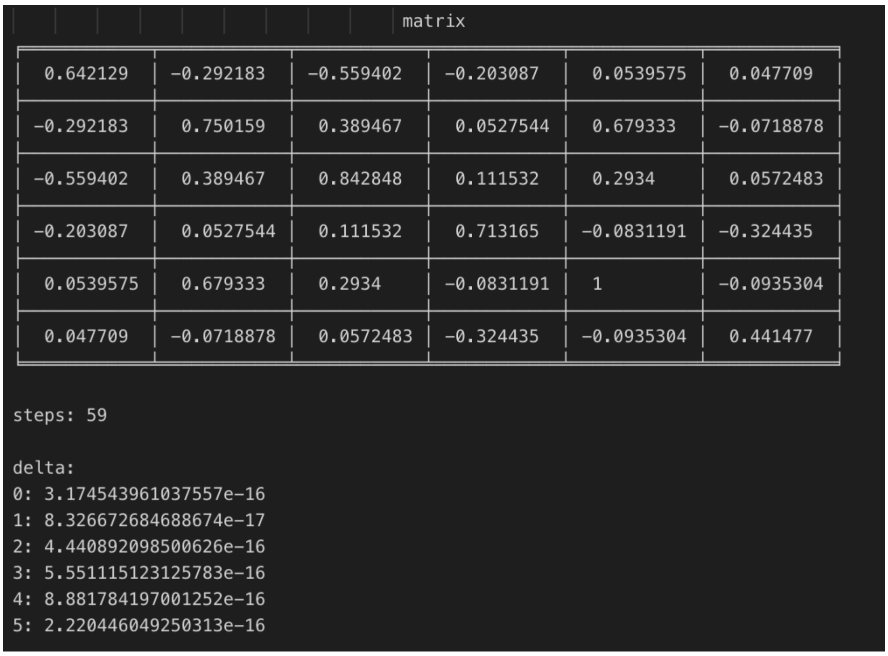
По окончании всех итераций должна получится диагональная матрица $D = A^{(m)}$, состоящая из собственных значений исходной матрицы A.

Работа выполнялась посредством языка программирования python и математической библиотеки numpy.

Заключение

Результаты тестирования кода метода дают неплохую среднюю точность, равную различию вычисленного реализованным в данной работе алгоритмом собственного значения в 16 знаке после запятой по сравнению со значением, вычисленным встроенными средствами библиотеки numpy.

Также хочется отметить количество итераций, обозначенное на фотографии ниже именем steps: в среднем на матрице 6x6 алгоритм выполняется за 50-70 итераций, а на матрице 20x20 в среднем за 850 итераций при сохранении средней точности в e-16.



matrix

0.642129	−0.292183	−0.559402	−0.203087	0.0539575	0.047709
−0.292183	0.750159	0.389467	0.0527544	0.679333	−0.0718878
−0.559402	0.389467	0.842848	0.111532	0.2934	0.0572483
−0.203087	0.0527544	0.111532	0.713165	−0.0831191	−0.324435
0.0539575	0.679333	0.2934	−0.0831191	1	−0.0935304
0.047709	−0.0718878	0.0572483	−0.324435	−0.0935304	0.441477

```
steps: 59

delta:
0: 3.174543961037557e-16
1: 8.326672684688674e-17
2: 4.440892098500626e-16
3: 5.551115123125783e-16
4: 8.881784197001252e-16
5: 2.220446049250313e-16
```

Уточнения:

- Тестирование проводилось с параметром точности p равным 8
- Под средней точностью подразумевается среднее значение всех порядков различия вычисленных значений со значениями, данными библиотекой numpy

В заключение можно сказать, что метод в реализованном в данной работе алгоритме показал достаточную точность и эффективность.

Приложение

```
import sys

import numpy as np

from labs.funcs import *

sys.stdout = open("./labs/output.txt", "w")


def rotation_with_barriers(
   A: np.ndarray,
   p: int = 4,
) -> np.ndarray:
   D = A.copy()
   n = D.shape[0]

   if np.linalg.det(D) == 0:
       raise ValueError("matrix is singular")

   counter = 0

   for K in range(1, p + 1):
       sigma = np.sqrt(np.max(np.abs(np.diag(np.diag(M))))) * 10 ** (-K)
       # sigma = 10 ** (-K)

       while True:
           if counter > 1e5:
               raise ValueError("inf cycle")

           mx_val = -np.inf
           idx = ()

           for i in range(n):
               for j in range(n):
                   if D[i, j] > mx_val and np.abs(D[i, j]) >= sigma and i != j:
                       mx_val = D[i, j]
                       idx = (i, j)

           if mx_val == -np.inf:
               break
```

```python
            i, j = idx[0], idx[1]

            d = np.sqrt((D[i, i] - D[j, j]) ** 2 + 4 * D[i, j] ** 2)
            s = np.sign(D[i, j] * (D[i, i] - D[j, j])) * np.sqrt(
                1 / 2 * (1 - np.linalg.norm(D[i, i] - D[j, j]) / d)
            )
            c = np.sqrt(1 / 2 * (1 + np.linalg.norm(D[i, i] - D[j, j]) / d))

            # print(f"K: {K} \nsigma: {sigma} \ni,j: {i+1,j+1} \nmx_val: {mx_val}")
            # print(f"c:\t{c}\ts:\t{s}")
            # print_matrix(D)

            T = np.eye(n)
            T[i, i] = T[j, j] = c
            T[i, j] = -s
            T[j, i] = s

            D = T.T @ D @ T

            counter += 1

    print(f"steps: {counter}")

    return np.diag(D)


size = (20, 20)
M = generate_symmetric_matrix(*size).astype(np.double)
M /= np.max(M)

# print_matrix(M, "matrix")

ans = rotation_with_barriers(M, p=8)  # max(p)=8
np_ans = np.linalg.eigvals(M)

ans = np.array(sorted(ans))
np_ans = np.array(sorted(np_ans))

print(
    f"""
delta:
{''.join(f"{i[0]}: {abs(i[1] - ans[i[0]])}\n" for i in enumerate(np_ans))}
"""
)
```