Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

А.Г. КОЛОБОВ, Л.А. МОЛЧАНОВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2008

ББК 22.143
К61

Рецензент:
Т.В. Пак, к.ф.-м.н.; ИМКН ДВГУ

Колобов А.Г., Молчанова Л.А.
К61 **Ч**исленные методы линейной алгебры. Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2008. - 36 с.

Численные методы линейной алгебры содержат теоретический материал и задания для самостоятельного выполнения лабораторного практикума. Темы: "Методы решения систем линейных алгебраических уравнений", "Вычисление обратных матриц и определителей", "Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц". Приводятся примеры использования этих методов и даются варианты заданий для группы студентов.

Для студентов математических специальностей.

$$\text{К}\frac{1702030000}{180(03) - 2008}$$

ББК 22.143

Содержание

1 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, записанная в матричной форме

$$A\overline{x} = \overline{b}, \tag{1}$$

где A - матрица коэффициентов при неизвестных системы (1), $\overline{b}$ – вектор- столбец ее свободных членов, $\overline{x}$ – столбец неизвестных (искомый вектор):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & a\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \ \overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Система (1) в развернутом виде может быть выписана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Пусть далее известно, что определитель матрицы A

$$detA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \Delta \neq 0$$

Требуется найти решение этой системы, т.е. совокупность чисел $x_1, x_2, \cdots, x_n$, обращающих (1) в систему тождеств. В силу того, что $\Delta \neq 0$, по теореме о единственности решения системы линейных алгебраических уравнений такое решение существует и единственно.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две большие группы: так называемые *точные методы* и *методы последовательных приближений* [2].

Точные методы характеризуются тем, что с их помощью принципиально возможно, проделав конечное число операций, получить точные значения неизвестных. При этом, конечно, предполагается, что коэффициенты и правые части системы известны точно, а все вычисления производятся без округлений. Чаще всего они осуществляются в два этапа. На первом этапе преобразуют систему к тому или иному простому виду. На втором этапе решают упрощенную систему и получают значения неизвестных.

Методы последовательных приближений (итерационные методы) характеризуются тем, что с самого начала задаются какими-то приближенными значениями неизвестных. Из этих приближенных значений тем или иным способом получают новые "улучшенные"приближенные значения. С новыми приближенными значениями поступают точно так же и т.д. При выполнении определенных условий можно придти, вообще говоря, после бесконечного числа шагов к точному решению.

1.1 Точные методы решения

Эти методы просты и универсальны, однако вследствие неизбежных округлений результаты являются приближенными, причем оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. К ним относятся: метод исключения (варианты метода Гаусса), метод квадратного корня, метод Халецкого, метод отражений и другие.

1.1.1 Схема Гаусса с выбором главного элемента

Процесс решения системы линейных алгебраических уравнений по методу Гаусса с выбором главного элемента сводится к построению системы с треугольной матрицей, эквивалентной исходной системе.

Рассмотрим расширенную прямоугольную матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы (1):

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}\cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}\cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj}\cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}\cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Выберем наибольший по модулю элемент a_{pq}, не принадлежащий столбцу свободных членов матрицы M. Этот элемент называется главным элементом. Строка матрицы M, содержащая главный элемент, называется главной строкой. Столбец матрицы M. содержащий главный элемент, называется главным столбцом. Далее, производя некоторые операции, построим матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов. Матрица $M^{(1)}$ получатся преобразованием из M, при котором главная строка и главный столбец матрицы M исключается. Над матрицей $M^{(1)}$ повторяем те же операции, что и над матрицей M, после чего получаем матрицу $M^{(2)}$, и т.д. Таким образом, мы построим последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots, M^{(n-1)}, \qquad (4)$$

последняя из которых представляет собой двухэлементную матрицу - строку; ее также считаем главной строкой.

Для получения системы с треугольной матрицей, эквивалентной системе (1), объединяем все главные строки матриц последовательности (4), начиная с последней $M^{(n-1)}$.

Рассмотрим подробнее эту схему для системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_n &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_n &= b_4 \end{aligned}$$

Вычисления удобно записать на расчетном бланке.

В таблице 1 показан процесс построения последовательности матриц (4). Главные элементы отмечены рамкой. В III столбце помещены значения m_i, равные отношению соответствующего элемента главного столбца к главному элементу с противоположным знаком. В строках, отмеченных звездочкой, выписываем элементы соответствующих главных строк,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
M	N	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
	1	$m_1 = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1
	2		a_{21}	a_{22}	$\boxed{a_{23}}$	a_{24}	b_2
$M^{(0)}$	3	$m_3 = -\frac{a_{33}}{a_{23}}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3
	4	$m_4 = -\frac{a_{43}}{a_{23}}$	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4
	2*		$\alpha_{21} = \frac{a_{21}}{a_{23}}$	$\alpha_{22} = \frac{a_{22}}{a_{23}}$	$\alpha_{23} = 1$	$\alpha_{24} = \frac{a_{24}}{a_{23}}$	$\beta_2 = \frac{b_2}{a_{23}}$
	1	$m_1^{(1)} = -\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$a_{11}^{(1)} = a_{11} + a_{21}m_1$	$a_{12}^{(1)} = a_{12} + a_{22}m_1$	0	$a_{14}^{(1)} = a_{14} + a_{24}m_1$	$b_1^{(1)} = b_1 + b_2m_1$
$M^{(1)}$	3		$a_{31}^{(1)} = a_{31} + a_{21}m_3$	$\boxed{a_{32}^{(1)} = a_{32} + a_{22}m_3}$	0	$a_{34}^{(1)} = a_{34} + a_{24}m_3$	$b_3^{(1)} = b_3 + b_2m_3$
	4	$m_4^{(1)} = -\frac{a_{43}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}}$	$a_{41}^{(1)} = a_{41} + a_{21}m_4$	$a_{42}^{(1)} = a_{42} + a_{22}m_4$	0	$a_{44}^{(1)} = a_{44} + a_{24}m_4$	$b_4^{(1)} = b_4 + b_2m_4$
	3*		$\alpha_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\alpha_{32} = 1$	0	$\alpha_{34} = \frac{a_{34}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$	$\beta_3 = \frac{b_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}}$
	1	$m_1^{(2)} = -\frac{a_{11}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$a_{11}^{(2)} = a_{11}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_1^{(1)}$	0	0	$a_{14}^{(2)} = a_{14}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_1^{(1)}$	$b_1^{(2)} = b_1^{(1)} + b_3^{(1)}m_1^{(1)}$
$M^{(2)}$	4		$\boxed{a_{41}^{(2)} = a_{41}^{(1)} + a_{31}^{(1)}m_4^{(1)}}$	0	0	$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} + a_{34}^{(1)}m_4^{(1)}$	$b_4^{(2)} = b_4^{(1)} + b_3^{(1)}m_4^{(1)}$
	4*		$\alpha_{41} = 1$	0	0	$\alpha_{44} = \frac{a_{44}^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$	$\beta_4 = \frac{b_4^{(2)}}{a_{41}^{(2)}}$
$M^{(3)}$	1		0	0	0	$a_{14}^{(3)} = a_{14}^{(2)} + a_{44}^{(2)}m_1^{(2)}$	$b_4^{(3)} = b_1^{(2)} + b_4^{(2)}m_1^{(2)}$
	1*		0	0	0	1	$\beta_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{14}^{(3)}} = x_4$
			1				$x_1 = \beta_4 - \alpha_{44}x_4$
				1			$x_2 = \beta_3 - \alpha_{34}x_4 - \alpha_{31}x_1$
					1		$x_3 = \beta_2 - \alpha_{24}x_4 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{21}x_1$

поделенных на их главные элементы. Объединив уравнения, отмеченные звездочкой, мы получим систему

$$\begin{array}{c} (1^*) \\ (4^*) \\ (3^*) \\ (2^*) \end{array} \begin{cases} x_4 = \beta_4 \\ x_1 + \alpha_{44}x_4 = \beta_1 \\ \alpha_{31}x_1 + x_2 + \alpha_{34}x_4 = \beta_3 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + +x_3 + \alpha_{24}x_4 = \beta_2 \end{cases}$$

с треугольной матрицей, эквивалентную исходной системе. Из этой системы последовательно находим значения компонент искомого вектора $\overline{x}$ по формулам

$$\begin{array}{rcc} x_4 & = & \beta_4 \\ x_1 & = & \beta_1 - \alpha_{44}x_4 \\ x_2 & = & \beta_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{34}x_4 \\ x_3 & = & \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - \alpha_{24}x_4 \end{array}$$

Эту часть процесса отражают последние четыре строки таблицы 1.

Сам процесс исключения неизвестных называют прямым ходом, а решение системы с треугольной матрицей - обратным ходом.

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения по схеме Гаусса с выбором главного элемента.

$$A\overline{x} = \overline{b},\ \text{где } A = \begin{bmatrix} 2,1 & -4,5 & -2,0 \\ 3,0 & 2,5 & 4,3 \\ -6,0 & 3,5 & 2,5 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 19,07 \\ 3,21 \\ -18,25 \end{bmatrix}$$

Расчетный бланк решения.

M	N	m	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
$M^{(0)}$	1	m_1=0,35	2,1	-4,5	-2,0	19,07
	2	m_2=0,5	3,0	2,5	4,3	3,21
	3		$\boxed{-6,0}$	3,5	2,5	-18,25
	3*		1	-0,58333	-0,41667	3,04167
$M^{(1)}$	1	$m_1^{(1)}$=0,20270	0	-3,275	-1,125	12,6825
	2		0	4,25	$\boxed{5,55}$	-5,915
	2*		0	0,76576	1	-1,06576
$M^{(2)}$	1		0	-2,41353	0	11,48353
	1*		0	1	0	x_2=-4,75798 x_3=2,7771 x_1=1,34025

Решением системы является вектор-столбец

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1,34025 \\ -4,75798 \\ 2,5771 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Метод единственного деления.

Выразим следующую систему в форме расширенной матрицы, найдем эквивалентную ей верхнюю треугольную систему линейных уравнений и ее решение.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Расширенная матрица имеет вид

$$\begin{array}{r} \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = -3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Первая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю в первом столбце. Мы обращаемся к первой строке, как к главной, и называем элемент a_{11} главным. Значение m_{k1} является множителем строки 1, которую вычитаем из k строк, $k = 2, 3, 4$. Результатом первого исключения будет

$$\begin{array}{r} \\ \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{32} = 1,5 \\ m_{42} = -1,75 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{-4} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Вторая строка используется, чтобы исключить элементы под диагональю во втором столбце.Эта строка является главной, и значение m_{k1} является множителем строки 2, которую вычитаем из k строк, $k = 3, 4$. Результатом исключения будет

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{гл. эл.} \rightarrow \\ m_{43} = -1,9 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-5} & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 9,5 & 5,25 & 48.5 \end{array}\right]$$

Наконец, умножаем m_{43}=-1,9 на третью строку, вычитаем из четвертой строки и в результате получаем верхнюю треугольную систему линейных уравнений

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7,5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right] \tag{5}$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (5) воспользуемся алгоритмом обратной подстановки и получим

$$x_4 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x1 = 3.$$

Если a_{kk} =0, то строку k нельзя использовать для исключения элементов столбца k и строку k следует заменить такой же строкой под диагональю, чтобы получить не равный нулю главный элемент. Если этого сделать нельзя, значит, матрица, коэффициентов системы линейных уравнений является вырожденной и система не имеет единственного решения.

1.1.3 Метод оптимального исключения

Пусть дана система уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$. Обозначив b_i через a_{in+1}, преобразуем эту систему к эквивалентной системе более простого вида. Допустим, что $a_{11} \neq 0$. Разделим все коэффициенты первого уравнения системы на a_{11}, который назовем ведущим элементом первого шага, тогда

$$x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = a_{1n+1}^{(1)}$$

Здесь $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11},\ j = 2, 3, \cdots, n+1$.

Предположим, что после преобразования первых k $(k \geq 1)$ уравнений система приведена к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{1n}^{(k)} x_n & = & a_{1n+1}^{(k)} \\ x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2k+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{2n}^{(k)} x_n & = & a_{2n+1}^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \\ x_k + a_{kk+1}^{(k)} x_{k+1} + \cdots + a_{kn}^{(k)} x_n & = & a_{kn+1}^{(k)} \\ a_{k+11} x_1 + a_{k+12} x_2 + \cdots + a_{k+1n+1} x_k + \cdots + a_{k+1n} x_n & = & a_{k+1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nk+1} x_k + \cdots + a_{nn} x_n & = & a_{nn+1} \end{cases}$$

Исключим неизвестные $x_1, x_2, \cdots, x_k$ из $(k+1)$ уравнения посредством вычитания из него первых k уравнений, умноженных соответственно на числа $a_{k+11}, a_{k+12}, \cdots, a_{k+1k}$, и разделив вновь полученное уравнение на коэффициенты при x_{k+1}. Теперь $(k+1)$ уравнение примет вид:

$$x_{k+1} + a_{k+1k+2}^{(k+1)} \cdot x_{k+2} + \cdots + a_{k+1n}^{(k+1)} \cdot x_n = a_{k+1n+1}^{(k+1)}$$

Исключая с помощью этого уравнения неизвестное x_{k+1} из первых k уравнений (3), получаем опять систему вида (3), но с заменой индекса k на $k+1$, причем

$$a_{i1}^{(1)} = \frac{a_{1i}}{a_{11}},\ i = 2, 3, ..., n+1.$$

$$a_{k+1p}^{(k+1)} = \frac{a_{k+1p} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{rp}^{(k)} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum\limits_{r=1}^{k} a_{rk+1}^{(k)} a_{k+1r}};$$

$$a_{ip}^{(k+1)} = a_{ip}^{(k)} - a_{k+1p}^{(k+1)} a_{ik+1}^{(k)},\ i = 1, 2, \cdots, k;$$

$$p = k+2, k+3, \cdots, n+1; \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

После преобразования всех уравнений находим решение исходной системы $x_i = a_{in+1}^{(n)}, i = 1, 2, \cdots, n$.

Указанная схема оптимального исключения работает в случае неравенства нулю ведущих элементов. Наилучшим вариантом методом оптимального исключения является вариант с выбором максимального по модулю элемента в строке. В этом случае структура исключения сохраняется, меняется лишь порядок исключения неизвестных. Теперь в качестве ведущего элемента будем брать максимальный по модулю элемент того уравнения, который получается из $(k+1)$-го уравнения исходной системы после исключения первых k шагов. Ведущим элементом первого шага будет максимальный по модулю элемент первого уравнения системы (3). При проведении расчетов удобно пользоваться следующей вычислительной схемой:

Матрица k-го шага

$1\ 0 \dots 0$	$a^{(k)}_{1k+1}$	$a^{(k)}_{1k+2} \dots\dots a^{(k)}_{1n+1}$
$0\ 1 \cdots 0$	$a^{(k)}_{2k+1}$	$a^{(k)}_{2k+2} \dots\dots a^{(k)}_{2n+1}$
$\dots \dots \dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots$
$0\ 0 \dots 1$	$a^{(k)}_{kk+1}$	$a^{(k)}_{kk+2} \dots\dots a^{(k)}_{kn+1}$
$a_{k+11} a_{k+12} \dots a_{k+1k}$	a_{k+1k+1}	$a_{k+1k+2} \dots\dots a_{k+1n+1}$
$a_{k+21} a_{k+22} \cdots a_{k+2k}$	a_{k+2k+1}	$a_{k+2k+2} \dots\dots a_{k+2n+1}$
$\dots \dots \dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots$
$a_{n1} a_{n2} \dots a_{nk}$	a_{nk+1}	$a_{nk+2} \dots\dots a_{nn+1}$

Матрица $(k+1)$-го шага после преобразования:

$1\ 0 \dots 0$	0	$a^{(k+1)}_{ip} = a^{(k)}_{ip} + a^{k+1)}_{k+1p} a_{ik+1}$
$0\ 1 \dots 0$	0	$i = 1, 2, \cdots, k$
$\dots \dots \dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots$
$0\ 0 \dots 1$	0	$p = k+2, \dots, n+1$
$0\ 0 \dots 0$	1	$a^{(k+1)}_{k+1p} = \dfrac{a_{k+1p} - \sum\limits_{r=1}^{k} a^{(k)}_{rp} a_{k+1r}}{a_{k+1k+1} - \sum\limits_{r=1}^{k} a^{(k)}_{rk+1} a_{k+1r}}$
$a_{k+21}\ a_{k+22}\ \dots\ a_{k+2k}$	a_{k+2k+1}	$a_{k+2k+2} \dots\dots a_{k+2n+1}$
$\dots \dots \dots$	$\dots$	$\dots \dots \dots$
$a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nk}$	a_{nk+1}	$a_{nk+2} \dots\dots a_{nn+1}$

Пример. Решить методом оптимального исключения систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x1 + 6x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Вычислительная схема

k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$	k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$
	5	2	3	3		1	5/2	3/5	3/5
0	1	6	1	5	1	1	6	1	5
	3	-4	-2	8		3	-4	-2	8
k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$	k	$a^{(k)}_{i1}$	$a^{(k)}_{i2}$	$a^{(k)}_{i3}$	$a^{(k)}_{i4}$
	1	0	4/7	2/7		1	0	0	2
2	0	1	1/14	1/14	3	0	1	0	1
	3	-4	-2	8		0	0	1	-3

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3.$

1.1.4 Метод квадратного корня

Этот метод используется для решения систем, у которых матрица A симметрична. В этом случае матрицу A можно разложить в произведение двух транспонированных друг другу треугольных матриц

$$A = S'S,$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & ... & \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Формулы для определения s_{ij}:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad , s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad (j > 1),$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \quad (i > 1), \quad s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj}}{s_{ii}} \quad (j > i),$$

$$s_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

После того как матрица S найдена, решают систему

$$S'y = b,$$

а затем находят неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ из системы

$$Sx = y$$

Так как обе системы имеют треугольную форму,то они легко решаются.

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} s_{ki}y_k}{s_{ii}}, \quad (i > 1).$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} s_{ik}x_k}{s_{ii}}, \quad (i < n).$$

При практическом применении метода последовательно *прямым ходом* вычисляются коэффициенты s_{ij} и y_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а затем *обратным ходом* находятся неизвестные x_i $(i = n, n-1, ..., 1)$.

Пример. Методом квадратного корня решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & & -2x_5 & = 0,5 \\ 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & -3x_5 & = 5,4 \\ -2x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 5,0 \\ & x_2 & -2x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = 7,5 \\ -2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 3,3 \end{array}$$

Расчетный бланк решения.

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i
1	3	-2	0	-2	0,5
3	4	-5	1	-3	5,4
-2	-5	3	-2	2	5,0
0	1	-2	5	3	7,5
-2	-3	2	3	4	3,3
s_{i1}	s_{i2}	s_{i3}	s_{i4}	s_{i5}	y_i
1	3	-2	0	-2	0,5
	2,2361i	-0,4472i	-0,4472i	-1,3416i	-1,7471i
		0,8944i	2,0125i	1,5653i	-7,5803i
			3,0414i	2,2194	-2,2928
				0,8221i	0,1643i
-6,0978	-2,2016	-6,8011	-8,8996	0,1998	x_i

1.1.5 Схема Халецкого

Дана система $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

Представляем матрицу A в виде произведения двух матриц B и C, т.е. $A = BC$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Элементы b_{ij}, c_{ij} определяются по формуле:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, & c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}, & c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}), \\ (i \geq j > 1), & (1 < i < j). \end{cases}$$

Вектор решения $\bar{x}$ может быть найден из последовательного решения уравнений

$$B\bar{y} = \bar{b}, \qquad C\bar{x} = \bar{y}.$$

Так как B и C матрицы треугольные, то

$$y_1 = \frac{a_{1n+1}}{b_{11}}; \quad y_i = \left(a_{in+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k \right) / b_{ii}, \quad (i > 1),$$

и

$$x_n = y_n; \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad (i < n).$$

Пример. Методом Халецкого решить систему уравнений

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ -5x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 1,0 \\ x_1 & -5x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 3 \end{array}$$

Расчетный вид бланка и схема решения системы.

x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	3	1	-1	2	6
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	-5	1	3	-4	-12
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	2	0	1	-1	1
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	1	-5	3	-3	3
$b_{11}\|1$	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	$3\|1$	$1/3$	$-1/3$	$2/6$	2
b_{21}	$b_{22}\|1$	c_{23}	c_{24}	c_{25}	-5	$8/3 \quad \|1$	$0,5$	$-0,25$	$-0,75$
b_{31}	b_{32}	$b_{33}\|1$	c_{34}	c_{35}	2	$-2/3$	$2 \quad \|1$	$-1,25$	$-1,75$
b_{41}	$b_{42}\|1$	b_{43}	$b_{44}\|1$	c_{45}	1	$-16/3$	6	$2,5 \quad \|1$	3
				x_1					1
				x_2					-1
				x_3					2
				x_4					3

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

1.1.6 Метод отражений. Вариант 1

Метод отражений решения системы уравнений $Ax = f$ состоит в выполнении $n-1$ шагов (n - порядок матрицы), в результате чего матрица A системы приводится к верхней треугольной форме, и последующем решении системы с верхней треугольной матрицей.

Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов матрица A привелась к виду

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ & & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & ... & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & a_{kk}^{(k-1)} & a_{kk+1}^{(k-1)} & ... & a_{kn}^{(k-1)} \\ & 0 & & & ... & ... & ... & ... \\ & & & & ... & ... & ... & ... \\ & & & & a_{nk}^{(k-1)} & a_{nk+1}^{(k-1)} & ... & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

Опишем k-й шаг процесса. Цель k-го шага - обнулить все поддиагональные элементы k-го столбца. Для этого определим вектор нормали $p^{(k)} = (0, ..., 0, p_k^{(k)}, p_{k+1}^{(k)}, ..., p_n^{(k)})^T$, положив

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ -1, a_{kk}^{(k-1)} < 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, l = k+1, ..., n. \tag{7}$$

Определим теперь матрицу отражения P_k с элементами $p_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij} - 2p_i^{(k)} p_j^{(k)} / \sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2$, где σ_{ij} — символ Кронеккера.

Легко проверить, что матрица $A_k = P_k A_{k-1}$ имеет вид

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{k-1k-1}^{(k-1)} & a_{k-1k}^{(k-1)} & a_{k-1k+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{k-1n}^{(k-1)} \\ & & & & 0 & a_{kk+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & 0 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 0 & a_{nk+1}^{(k-1)} & \ldots & a_{nn}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

т.е. поддиагональные элементы ее k-ого столбца равны нулю, а первые $k-1$ строк и столбцов ее совпадают, с соответствующими строками и столбцами матрицами A_{k-1}. Кроме того, можно показать, что остальные элементы вычисляются по формулам

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} (a_{lk}^{(k-1)})^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)})}{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}, \tag{8}$$

$$i = k, k+1, \ldots, n, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

В результате выполнения всех $n-1$ шагов матрица A приведется к верхней треугольной матрице

$$A_{n-1} = P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1 A,$$

которую мы в дальнейшем будем обозначать через R : $R = A_{n-1}$. Обозначив еще $Q = P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$, приходим к равенству $A = QR$, которое удобно использовать для получения решения системы $Ax = f$.

Обратимся теперь к решению системы $Ax = f$. Если мы получили разложение $A = QR$, то для решения этой системы нам, очевидно, достаточно решить систему $Rx = Q^* f$ с треугольной матрицей R и правой частью $g = Q^* f$.Решение этой системы находится по простым явным формулам:

$$x_n = g_n / r_{nn}, \quad x_i = \frac{g_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j}{r_{ij}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Однако прежде чем находить решение по этим формулам, нам необходимо сначала вычислить правую часть преобразованной системы, т.е. вектор $g = P_{n-1} \ldots P_2 P_1 f$. Обозначим $f^{(k)} = P_k P_{k-1} P_1 f$.Тогда $f^{(k)} = P_k f^{(k-1)}$. Предположим, что вектор $f^{(k-1)}$ имеет вид

$$f^{(k-1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k-1)}, f_{k+1}^{(k-1)}, \ldots, f_n^{(k-1)})^T.$$

В силу определения матрицы P_k и определяющего ее вектора $p^{(k)}$ легко проверить, что вектор $f^{(k)}$ будет иметь вид

$$f^{(k)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_{k-1}^{(k-1)}, f_k^{(k)}, f_{k+1}^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)})^T,$$

где элементы $f_i^{(k)}$ вычисляются по формулам

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_l^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}}{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2}, \quad i = k, k+1, ..., n.$$

Пример. Решить систему методом отражения

$$\begin{cases} 6,03x_1 + 13x_2 - 17x_3 = 2,0909 \\ 13x_1 + 29,03x_2 - 38x_3 = 4,1509 \\ -17x_1 - 38x_2 + 50,03x_3 = -5,1191 \end{cases}$$

Расчетный бланк

k	a_1	a_2	a_3	a_4	p	$z^{(2)}$	$z^{(3)}$	$z^{(4)}$
k	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	p_1 p_2 p_3	$2r_2p_1/s$ $2r_2p_2/s$ $2r_2p_3/s$	$2r_3p_1/s$ $2r_3p_2/s$ $2r_3p_3/s$	$2r_4p_1/s$ $2r_4p_2/s$ $2r_4p_3/s$
					$s = \|p\|^2$	$r_2 = (p, a_2)$	$r_3 = (p, a_3)$	$r_4 = (p, a_4)$
0	6,03 13 -17	13 29,03 -38	-17 -38 50,03	2,0909 4,1509 -5,1191	28,2642 13 -17	62,5533 28,7711 -37,6238	-82,0807 -37,7526 49,3688	8,9989 4,1390 -5,4126
					1256,867	1390,825	-1825,002	200,084
1	-22,2342 0 0	-49,5533 0,2589 -0,3762	65,0807 -0,2473 0,6611	-6,9080 0,0119 0,2934	0 0,7156 -0,3762		0 -0,9322 0,4901	0 -0,2231 0,1173
					0,6536		-0,4257	-0,1019
	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(4)}$	x			
2	-22,2342 0 0	-49,5533 -0,4567 0	65,0807 0,6849 0,1710	-6,9080 0,2350 0,1761	1,03 1,03 1,03			

Ответ: $x_1 = 1,03,\ x_2 = 1,03,\ x_3 = 1,03.$

1.1.7 Метод отражений. Вариант 2

Метод отражений применяется для решения системы уравнений $Ax = f$ с комплексно неособенной матрицей. В этом методе матрица A раскладывается на произведение двух матриц: унитарной матрицы и правой треугольной.

При реализации данного метода необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$\bar{\omega} = \chi(\bar{s} - \alpha\bar{e}), \alpha = |\alpha|e^{arg\alpha}, |\alpha| = \sqrt{(\bar{s}, \bar{s})}, arg\alpha = arg(\bar{s}, \bar{e}) - \pi,$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2[|\alpha|^2 + |\alpha||(\bar{s}, \bar{e})|]}}. \tag{9}$$

Разложение комплексной матрицы A в произведение унитарной и правой треугольной происходит за несколько шагов.

Шаг 1.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем первый столбец матрицы A, т.е. $\bar{s} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$, а за $\bar{e}$ возьмем вектор $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)'$. Воспользуемся соотношениями (9) для нахождения $\alpha, \chi, \bar{\omega}_1$. Построим матрицу $C_1 = E - 2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_1^*$. Обозначим $A_1 = C_1 A$. Матрица A_1 имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdot & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdot & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdot & a\cdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdot & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Шаг 2.

В качестве вектора $\bar{s}$ выберем $\bar{s} = (0, a_{21}^{(1)}, \dots, a_{n1}^{(1)})'$, а за $\bar{e}$ возьмем вектор $\bar{e} = (0, 1, \dots, 0)'$. Затем находим $\bar{\omega}_2$ и строим матрицу $C_2 = E - 2\bar{\omega}_2\bar{\omega}_2^*$. Обозначим $A_2 = C_2 A$. Матрица A_2 имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{31}^{(2)} & \cdot & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdot & a\cdots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdot & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Продолжая этот процесс, получаем в итоге матрицу A_{n-1}, имеющую правотреугольный вид.

Рассмотрим, как находится решение системы линейных алгебраических уравнений методом отражений.

Обозначим через $A_0 = \{a_1^{(0)}, \dots, a_{n+1}^{(0)}\}$ расширенную матрицу системы $Ax = f$, где $a_{n+1}^{(0)} = (b_1, b_2, ..., b_n)'$, $a_k^{(0)} = (a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{1n})'$, $k = 1, ..., n$.

Данная матрица преобразуется к правой треугольной с помощью матриц отражения

$$A_{k+1} = C_{k+1}A_k \quad \text{или } \bar{a}_i^{(k+1)} = C_{k+1}\bar{a}_i^{(k)}, \quad k = 0, ..., n-1, \ i = 1, ..n+1.$$

При построении матрицы C_{k+1} в качестве векторов $\bar{e}$ и $\bar{s}$ возьмем векторы $\bar{e}$=$(0, ..., 0, 1, ..., 0)'$, $\bar{s}$=$(0, ..., 0, a_{k+1k+1}^{(k)}, a_{k+2k+1}^{(k)}, ..., a_{nk+1}^{(1)})'$.

После $n-1$ шага система $Ax = f$ имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}^{(n-1)}x_1 & +a_{12}^{(n-1)}x_2 & +... & a_{1n}^{(n-1)}x_n & = & a_{1n+1}^{(n-1)}, \\ & a_{22}^{(n-1)}x_2 & +... & a_{2n}^{(n-1)}x_n & = & a_{2n+1}^{(n-1)}, \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & a_{nn+1}^{(n-1)}. \end{array} \tag{10}$$

Решение системы (10) находится по формулам

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_k = \frac{a_{kn+1}^{(n-1)} - \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_{ni}^{(n-1)}x_i}{a_{kk}^{(n-1)}}. \tag{11}$$

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом отражений.

$$\begin{cases} 2x_1 + (-9+4i)x_2 + (4-3i)x_3 = 15 - i \\ -(9+4i)x_1 + 6x_2 + (-1+2i)x_3 = -22 + 26i \\ -(4+5i)x_1 - (1+2i)x_2 - 3x_3 = -12 + 10i \end{cases}$$

Решение. Пользуясь приведенным алгоритмом, находим:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -9+4\,i & 4-3\,i & 15-i \\ -9-4\,i & 6 & -1+2\,i & -22+26\,i \\ -4-5\,i & -1-2\,i & -3 & -12+10\,i \end{bmatrix}$$

Шаг первый прямого хода.

$$\overline{s} = (2,\ -9-4\,i, -4-5\,i), \quad \overline{e} = (1,0,0)$$

$$\alpha = -11,9164; \quad \chi = 0,05491$$

$$\bar{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0,7641 \\ -0,4942-0,2196\,i \\ -0,2196-0,2746\,i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_1^* = \begin{bmatrix} 0,7641, & -0,4942+0,2196\,i, & -0,2196+0,2746\,i \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,1678 & 0,7553-0,3357i & 0,3357-0,4196i \\ 0,7553+0,3357i & 0,4151 & -0,3377+0,1749 \\ 0,3357+0,4196 & -0,3377-0,1749\,i & 0,528 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4,8671-2,9371\,i & -1,7622+3,6084\,i & -10,2378+35,581\,i \\ 0 & -4,9621+0,5005\,i & 4,626-0,6176\,i & 4,8363+9,5965\,i \\ 0 & -7,4783-4,98837\,i & 1,0306+0,1708\,i & 8,3972+8,5532\,i \end{bmatrix}$$

Шаг второй прямого хода.

$$\bar{s} = (0, -4,9621+0,5005\,i, -7,4783-4,9884\,i), \quad \bar{e} = (0,1,0)$$

$$arg\alpha = -\pi + 3,0411; \quad \alpha = 10,2282-1,0316\,i; \quad \chi = 0,05644$$

$$\bar{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8574+0,08648\,i \\ -0,4221-0,2816\,i \end{bmatrix} \quad \bar{\omega}_2^* = \begin{bmatrix} 0, & -0,8574-0,08648\,i, & -0,4221+0,2816\,i \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4851 & -0,6751+0,5558\,i \\ 0 & -0,6751-0,5558\,i & 0,4851 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -11,9163 & 4.8671-2,9371\,i & -1,7622+3,6084\,i & -10,2378+35,581\,i \\ 0 & 10,2283-1,0317\,i & -3,0349+0,7571\,i & -12,7689-5,7625\,i \\ 0 & 0 & -2,9662-2,0714\,i & 6,1426-5,017\,i \end{bmatrix}$$

Обратный ход.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -0,214-3,1751\,i \\ -1,2676-0,0212\,i \\ -0,5981+2,1091\,i \end{bmatrix}$$

1.2 Итерационные методы

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{12}$$

Итерационные методы дают решение системы линейных алгебраических уравнений в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется при помощи единообразного процесса, называемого процессом итерации. Для решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами предварительно приводят систему к виду удобному для итерации

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}. \tag{13}$$

Сделать это можно несколькими способами. Например, если в матрице A $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$ для каждого $i = 1, .., n$, то удобно разрешить каждое из уравнений системы относительно диагонального неизвестного, поделив обе части i-го уравнения на a_{ii} и перенеся все члены его, кроме x_i, вправо.

Можно также привести систему (12) к виду (13), если прибавить к обеим частям i-го уравнения x_i, а затем перенести свободные члены влево.

Сходящийся процесс обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

Обычно итерации продолжаются до тех пор, пока $\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где ε - заданная точность.

1.2.1 Метод простой итерации

В методе простой итерации в качестве начального приближения берем произвольный вектор $\bar{x}^{(0)}$ и подставляем в правую часть системы, приведенной к виду, удобному для итерации. Получаем некоторый вектор $\bar{x}^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность векторов

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(0)}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(1)}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{x}^{(k)} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(k-1)}$$

Если при $k \to \infty$ $\bar{x}^{(k)} \to \bar{x}$, то вектор $\bar{x}^{(k)}$ будет решением системы (13), т. е. системы (12).

Достаточные условия сходимости метода простой итерации устанавливаются теоремой 1. Для сходимости процесса простой итерации достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы α была меньше единицы

$$\|\alpha\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \tag{14}$$

$$\|\alpha\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \tag{15}$$

$$\|\alpha\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1. \tag{16}$$

Следствие. Для системы $A\bar{x} = \bar{b}$ метод простой итерации сходится, если

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \ (i = 1, 2, ..., n)$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Пример. Методом простой итерации решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение. Так как диагональные элементы матрицы A данной системы по модулю превосходят сумму модулей остальных элементов соответствующих строк, то метод простой итерации в этом случае сходится [Положий].

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Принимая начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = 0$, получаем следующие результаты вычислений:

k	x_1	x_2	x_3	$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1$
1	1	1,2	0,8	
2	0,68	0,94	0,58	0,32
3	0,754	1,016	0,638	0,076
4	0,733	0,997	0,623	0,021
5	0,7383	1,0021	0,6270	0,0053
6	0,73688	1,00077	0,62596	0,00142
7	0,73725	1,00112	0,62624	0,00037

Сравнивая эти результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717, \ x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105, \ x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

видим, что метод простой итерации в данном случае сходится довольно быстро [8].

1.2.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простой итерайции. Основная его идея состоит в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестной x_i учитывается уже вычисленное ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_k$.

Пусть система, приведенная к виду удобному для итерации, записана так:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i, \quad (i = 1, .., n)$$

Выберем произвольно начальные приближения корней $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$.

Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить $(k+1)$-е приближение корней по следуюшим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Указанная ранее теорема сходимости для метода простой итерации остается верной для итерации по методу Зейделя.

Пример. Методом Зейделя решить следующую систему с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Разрешая систему относительно неизвестных, стоящих на диагонали, получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Достаточные условия сходимости метода Зейделя здесь выполнены.

Принимая начальное приближение $\bar{x}^{(0)} = 0$, из первого уравнения найдем $x_1 = 1$. При $x_1 = 1$ и $x_3 = 0$ второе уравнение дает $x_2 = 1,1$. Наконец, при $x_1 = 1$ и $x_2 = 1,1$ находим из третьего уравнения $x_3 = 0,59$. Таким образом, первое приближение будет:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1,1, \quad x_3 = 0,59.$$

Аналогично вычисляем последующие приближения. Получаем следующие результаты вычислений:

k	x_1	x_2	x_3	$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1$
1	1	1,1	0,59	
2	0,721	1,00990	0,62691	0,279
3	0,73533	1,00109	0,62636	0,01433
4	0,73715	1,00101	0,62618	0,00182
5	0,73718	1,00105	0,62618	0,00003

Если сравнить полученные результаты с точным решением

$$x_1 = \frac{704}{955} = 0,73717,\ x_2 = \frac{956}{955} = 1,00105,\ x_3 = \frac{598}{955} = 0,62618,$$

то видно, что метод Зейделя в данном случае сходится быстро, так как уже пятое приближение совпадает с точным решением до пятого знака [8].

1.2.3 Метод релаксации

При решении системы линейных алгебраических уравнений методом релаксации поступают следующим образом.

Систему $A\bar{x} = \bar{b}$ преобразуем к виду

$$-\bar{x} + \bar{\beta} + \alpha\bar{x} = 0,$$

т.е.

$$-x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \alpha_{ij}x_j = 0, (i = \overline{1,n}) \tag{1}$$

Взяв в качестве начального приближения $\bar{x}^{(0)}$ и подставив его в систему (1), получим невязки

$$\delta_i^{(0)} = -x_i + \beta_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \alpha_{ij}x_j = 0. \tag{2}$$

Если одной из неизвестных $x_k^{(0)}$ дать приращение $\Delta x_k^{(0)}$, то соответствующая невязка $\delta_k^{(0)}$ уменьшиться на величину $\Delta x_k^{(0)}$, а все остальные невязки $\Delta x_i^{(0)} (i \neq k)$ увеличатся на величину $\alpha_{ik}\Delta x_k^{(0)}$. Таким образом, чтобы обратить невязку $\delta x_k^{(0)}$ в нуль, достаточно величине $x_k^{(0)}$ дать приращение $\Delta x_k^{(0)} = \delta_k^{(0)}$, тогда

$$\delta_k^{(1)} = 0,$$

а все

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \alpha_{ik}\delta_k^{(0)} \quad (i \neq k).$$

Обращаем в нуль максимальную по модулю невязку путем изменения соответствующей компоненты на величину, равную этой невязке, т.е. мы получаем невязки $\delta_i^{(1)}$. С ними поступаем аналогично и т.д. Процесс заканчивается на N шаге, когда все невязки будут равны нулю с заданной степенью точности ε.

Суммируя все приращения $\Delta x_i^{(m)} (i = \overline{1,n}, m = \overline{1,N})$ с $x_i^{(0)}$, получим значения корней

$$x_i^{(N+1)} = x_i^{(0)} + \sum_{m=1}^{N} \Delta x_i^{(m)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Пример. Решить систему методом релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 15,21x_1 + 1,11x_3 = 9,01 \\ 1,32x_1 + 14,82x_2 - 0,61x_3 = 8,52 \\ 0,75x_1 - 1,26x_2 - 15,44x_3 = 8,33 \end{cases}$$

Решение. Исходная система, подготовленная к релаксации, имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1 - 0,0730x_3 + 0,5924 = 0 \\ -x_2 - 0,0891x_1 + 0,0412x_3 + 0,5790 = 0 \\ -x_3 + 0,048x_1 - 0,081x_2 - 0,5395 = 0 \end{cases}$$

Выбрав в качестве $x^{(0)} = 0$, находим вектор невязки $\bar{\delta}^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$. Норма этого вектора больше 10^{-3}, поэтому будем улучшать "пробное"решение с целью уменьшения невязок $\delta_i^{(0)}$. Выбираем одну из них, которая имеет наибольшее по модулю численное значение. Это $\delta_1^{(0)} = 0,5924$. Будем приводить ее к нулю, путем соответствующего изменения значения переменной x_1 на величину $\Delta x_1^{(0)} = \delta_1^{(0)} = 0,5924$.

Для удобства выписываем матрицу α:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0730 \\ -0,0890 & 0 & 0,0412 \\ 0,0486 & -0,0816 & 0 \end{bmatrix},$$

Возьмем $x^{(0)} = (0,0,0)$. Тогда $\delta^{(0)} = (0,5924; 0,5790; -0,5395)$.

Расчетный бланк дальнейших вычислений

k	$\Delta x_k^{(m)}$	$\delta_1^{(m)}$	$\delta_2^{(m)}$	$\delta_3^{(m)}$	m
1	0,5924	0	0,5263	-0,5107	1
2	0,5263	0	0	-0,5536	2
3	-0,5536	0,0404	-0,0228	0	3
1	0,0404	0	-0,0264	0,0019	4
2	0,0264	0	0	0,0040	5
3	0,0040	-0,0002	0,0001	0	6
1	-0,0002	0	0	0	7

Решение $x^{(8)} = (0,6326; 0,5000; -0,5496)$, невязка $\delta^{(8)} = (-0,0001;\ 0;\ 0)$.

1.3 Задания

1. Решить системы методом Гаусса с выбором главного элемента.
2. Решить системы методом единственного деления.
3. Решить системы методом оптимального исключения.
4. Решить системы методом отражения (вариант 1).

1.

$$\begin{cases} -6,45x_1+7,11x_2-9,34x_3+7,78x_4=-36; \\ 8,45x_1+6,23x_2+4,68x_3+0,91x_4=2,1; \\ -4,41x_1+6,51x_2-7,89x_3+0,63x_4=-0,2; \\ 9,26x_1+9,37x_2-9,89x_3+9,49x_4=35,6. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 6,54x_1+4,37x_2+0,92x_3-4,71x_4=96,1; \\ 6,21x_1-8,49x_2+7,72x_3+9,24x_4=91,0; \\ 6,96x_1+6,21x_2+3,18x_3-0,61x_4=87,2; \\ -7,43x_1+1,96x_2+4,53x_3-3,51x_4=78,2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -5,38x_1-9,31x_2-4,68x_3-3,99x_4=-89,8; \\ 1,33x_1+7,35x_2-1,31x_3-3,96x_4=-24,8; \\ 4,73x_1-9,22x_2+5,52x_3+6,31x_4=-14,5; \\ 1,83x_1-1,85x_2+9,99x_3-1,86x_4=60,7. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 4,92x_1+4,25x_2-0,84x_3-6,60x_4=18,7; \\ 2,56x_1+5,96x_2-1,48x_3-5,53x_4=-62,7; \\ 2,99x_1+7,46x_2+0,44x_3-2,11x_4=56; \\ 8,32x_1-3,80x_2-5,48x_3+0,71x_4=93,3. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 1,77x_1-5,31x_2+6,46x_3-8,85x_4=-52,3; \\ 7,62x_1+8,77x_2+6,40x_3+5,17x_4=40,7; \\ 1,58x_1-3,24x_2+8,34x_3-4,90x_4=88,5; \\ -6,56x_1-1,46x_2+1,98x_3-9,48x_4=29,2. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} -5,87x_1-7,28x_2-3,15x_3-0,42x_4=25,1; \\ 6,43x_1-3,98x_2-7,55x_3-1,53x_4=30,3; \\ 0,93x_1+9,41x_2+0,35x_3-0,23x_4=-44,6; \\ -9,87x_1-0,09x_2+0,04x_3+9,96x_4=85,8. \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} -0,07x_1+9,89x_2-0,17x_3-0,28x_4=0,1; \\ 9,55x_1-0,72x_2-1,16x_3+8,13x_4=-0,3; \\ 3,03x_1-4,90x_2+2,08x_3+7,19x_4=99,8; \\ -0,72x_1-3,53x_2+5,75x_3-7,77x_4=-0,5. \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} 6,61x_1+5,03x_2+1,64x_3-3,32x_4=79,8; \\ 8,33x_1-4,99x_2-6,66x_3-1,65x_4=-97,9; \\ 1,69x_1-9,95x_2+1,75x_3+1,80x_4=82; \\ -6,45x_1+5,36x_2+8,92x_3+4,29x_4=84,1. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} -1,03x_1+7,21x_2-3,28x_3-6,61x_4=32,1; \\ -0,43x_1+2,97x_2-7,46x_3+5,51x_4=-24,9; \\ 8,06x_1+3,58x_2+1,65x_3-4,77x_4=-92,8; \\ 6,88x_1-7,88x_2+9,00x_3-8,88x_4=-17,6. \end{cases}$$

10
$$\begin{cases} 5,97x_1+3,33x_2-0,70x_3-7,38x_4=98,7; \\ 1,92x_1+4,54x_2-3,55x_3-0,01x_4=87,5; \\ -2,57x_1-1,59x_2+5,84x_3-5,75x_4=86,2; \\ -9,91x_1-5,66x_2-5,57x_3-1,24x_4=73,6. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} -3,64x_1+4,65x_2-8,99x_3+5,66x_4=-21,5; \\ 6,68x_1+2,35x_2-0,97x_3-8,61x_4=2,1; \\ 0,43x_1+1,82x_2-7,75x_3+4,08x_4=80,7; \\ 6,34x_1+0,42x_2-3,24x_3+7,19x_4=-17,1. \end{cases}$$

12
$$\begin{cases} 1,4x_1+7,68x_2-0,92x_3-3,23x_4=-60,4; \\ 5,85x_1-7,38x_2+8,48x_3-8,89x_4=-88,5; \\ 9,6x_1-9,28x_2-9,67x_3-8,95x_4=-48,8; \\ -8,61x_1-7,55x_2-6,16x_3-3,71x_4=-37,2. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} -0,44x_1+2,56x_2-7,87x_3+4,7x_4=1,3; \\ 6,84x_1+1,55x_2-1,6x_3+9,95x_4=64,3; \\ -1,65x_1-1,7x_2+6,66x_3-5,03x_4=-34,4; \\ -8,37x_1-3,4x_2-1,77x_3+4,83x_4=-70. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} 9,86x_1+8,75x_2+8,61x_3+7,36x_4=-69,3; \\ 5,98x_1+3,35x_2-0,67x_3-7,31x_4=79; \\ 2,03x_1+4,72x_2-3,24x_3-8,52x_4=-90,3; \\ -1,75x_1-0,26x_2+7,99x_3-2,27x_4=88,8. \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 1,8x_1-5,57x_2+6,24x_3-9,33x_4=-42,8; \\ 6,92x_1+7,59x_2+4,51x_3+2,11x_4=34,5; \\ -3,37x_1+8,75x_2-4,62x_3-5,87x_4=91,7; \\ -0,48x_1+3,66x_2-6,82x_3+6,84x_4=26,2. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 0,68x_1-5,55x_2+5,13x_3+9,59x_4=-99,8; \\ 4,73x_1+4,33x_2-0,94x_3-6,61x_4=68,7; \\ 2,46x_1+5,85x_2-1,69x_3-5,83x_4=69; \\ 2,49x_1+6,67x_2-0,83x_3-4,16x_4=37,7. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 2,62x_1-0,64x_2-8,02x_3+1,35x_4=50,1; \\ 3,33x_1-5,32x_2+8,02x_3-7,3x_4=-91,4; \\ -9,27x_1-6,56x_2-5,83x_3-2,39x_4=58,7; \\ 1,79x_1+9,4x_2+1,19x_3+0,6x_4=67,4. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} -9,21x_1-2,61x_2-1,81x_3+5,59x_4=-82,1; \\ 6,21x_1+9,38x_2-6,83x_3-7,45x_4=24; \\ -4,27x_1-1,71x_2+4,02x_3-7,68x_4=41,9; \\ 6,35x_1+8,67x_2+5,02x_3+3,69x_4=-34,1. \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} -5,31x_1+8,25x_2-7,05x_3-8,79x_4=-12,8; \\ -5,83x_1-4,62x_2-0,45x_3+4,94x_4=-75,9; \\ -5,51x_1+9,44x_2-6,06x_3-6,62x_4=11,4; \\ -2,68x_1+0,7x_2+8,02x_3-1,28x_4=35,5. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 9,96x_1+7,68x_2+7,64x_3+5,33x_4=-32,5; \\ 2,97x_1-1,69x_2-8,71x_3-0,4x_4=54,8; \\ 0,89x_1-9,51x_2+1,39x_3+1,89x_4=-77,7; \\ -6,71x_1+5,18x_2+6,47x_3+3,66x_4=77,2. \end{cases}$$

5. Решить системы $(D + kC)x = b$ методом квадратного корня.
6. Решить системы $(D + kC)x = b$ методом Халецкого.
1. $k = 0,1(0,1)1,5$.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \; \bar{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

2. $k = 0,1(0,1)1,5$.

$$D = \begin{bmatrix} 1,28 & 2,32 & 4,14 & -3,24 & ,-5,15 \\ 2,32 & 1,49 & 5,26 & 1,56 & 3,92 \\ 4,14 & 5,26 & 4,06 & 2,44 & 4,39 \\ -3,24 & 1,56 & 2,44 & 5,42 & 1,94 \\ -5,15 & 3,92 & 4,39 & 1,94 & 4,63 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \; \bar{b} = \begin{bmatrix} -3,02 \\ 3,26 \\ 0,83 \\ -8,20 \\ -6,45 \end{bmatrix}$$

7. Решить системы методом простой итерации и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.
8. Решить системы методом релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$D = \begin{bmatrix} 6,22 & 1,42 & -1,72 & 1,91 \\ 1,42 & 5,33 & 1,11 & -1,82 \\ -1,72 & 1,11 & 5,24 & 1,42 \\ 1,91 & -1,82 & 1,42 & 6,55 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \bar{b} = \begin{bmatrix} 7,53 \\ 6,06 \\ 8,05 \\ 8,06 \end{bmatrix} \quad k = 0(1)15.$$

9. Решить системы методом отражения (вариант 2).

1. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=16+38i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=17+25i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=1+25i. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=30-12i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=21+15i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=61-i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=51-3i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=21+21i. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=26+34i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=13+17i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-1+23i. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=15+35i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=35+25i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=4+28i. \end{cases}$

6. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=55i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-8+21i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+40i. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=40+67i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=15+33i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-8+41i. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-40-67i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=-15-33i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=8-41i. \end{cases}$

9. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=68+16i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=40+18i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=37+17i. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (1+2i)x_1+(4-5i)x_2+(7+4i)x_3=-6+23i; \\ (8+i)x_1+(2-i)x_2+(1+i)x_3=10i; \\ (3+i)x_1+(1+i)x_2+(2+3i)x_3=-16+3i. \end{cases}$

2 Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

Собственным значением квадратной матрицы A называется такое число λ, для которого выполняется соотношение

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \tag{17}$$

если $\bar{x}$ - некоторый не нулевой вектор, называемый собственным вектором матрицы A, соответствующий собственному значению λ.

Это соотношение можно переписать в виде:

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}. \tag{18}$$

Условием существования ненулевого решения однородной системы (18) является требование

$$|A - \lambda E| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (-1)^n[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n] = 0. \tag{19}$$

Определение компонент собственного вектора требует решения системы n однородных уравнений с n неизвестными; для вычисления всех собственных векторов матрицы требуется решать n систем вида

$$(A - \lambda_i E)X_i = 0,$$

где $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})$ - собственный вектор матрицы A, принадлежащий собственному значению λ_i.

Под полной проблемой собственных значений понимается проблема нахождения всех собственных значений матрицы A, так же как и принадлежащих этим собственным значениям собственных векторов.

2.1 Методы получения характеристического многочлена

2.1.1 Метод Леверье.

Метод Леверье основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения (19).

Пусть

$$Q_n(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \cdots - p_n\right] \tag{20}$$

характеристический полином матрицы A и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ его корни, среди которых могут быть равные.

Тогда характеристический полином можно разложить на множители:

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n). \tag{21}$$

Перемножая скобки, стоящие справа в (21), а затем приведя подобные члены и сравнивая с коэффициентами из (20) получим, так называемые формулы Виета, выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$p_1 = \sigma_1$, $p_2 = -\sigma_2$, $\ldots$, $p_{n-1} = (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}$, $p_n = (-1)^{n-1}\sigma_n$,
$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$,
$\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n$,
$\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n$,
$\cdots$
$\sigma_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ — элементарные симметрические функции корней характеристического уравнения. Рассмотрим еще следующие симметрические функции корней:

$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Теорема единственности, известная из курса высшей алгебры, утверждает: любой симметрический многочлен можно единственным образом представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Это представление выражается для степенных сумм по формуле Ньютона

$$S_k - p_1S_{k-1} - p_2S_{k-2} - \cdots - p_{k-1}S_1 - kp_k = 0, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} p_1 = S_1, \\ p_2 = \dfrac{1}{2}(S_2 - p_1S_1), \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_k = \dfrac{1}{k}(S_k - p_1S_{k-1} - \ldots - p_{k-1}S_1), \end{cases} \tag{23}$$

и можно найти все p_k, если будут известны S_k.

Эти суммы вычисляются следующим образом:

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = SpA,$$

т.е.

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Как известно, $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ являются собственными значениями матрицы A^k. Поэтому

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = SpA^k,$$

т. е. если $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$, то

$$S_k = a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} + \ldots + a_{nn}^{(k)}.$$

Таким образом, схема раскрытия векового определителя по методу Леверье весьма простая, а именно: сначала вычисляются A^k $(k = 1, 2, \ldots n)$ - степени матрицы A, затем находятся соответствующие S_k - суммы элементов главных диагоналей матриц A^k и, наконец, по формулам (23) определяются искомые коэффициенты p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример. Раскрыть характеристическое уравнение, найти собственные значения заданной матрицы

$$A= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	A^k			SpA^k	p_k
1	2 1 1	1 2,5 1	1 1 3	7,5	7,5
2	6 5,5 6	5,5 8,25 6,5	6 6,5 11	25,25	-15,5
3	23,5 25,75 29,5	25,75 32,625 33,25	29,5 33,25 45,5	101,625	9,5

Ответ: $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$; $\lambda_1 = 1,185$; $\lambda_2 = 1,76$; $\lambda_3 = 4,555$.

2.1.2 Метод Фадеева

Метод Д.К. Фадеева является видоизменением метода Леверье. Помимо упрощений при вычислении коэффициентов характеристического полинома он позволяет определить обратную матрицу и собственные вектора матрицы.

Будем вместо последовательности A, A^2, ..., A^n вычислять последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n$, построенную следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = A, & SpA_1 = p_1, & B_1 = A_1 - p_1E, \\
A_2 = AB_1, & \dfrac{SpA_2}{2} = p_2, & B_2 = A_2 - p_2E, \\
\ldots & & \\
A_{n-1} = AB_{n-2}, & \dfrac{SpA_{n-1}}{n-1} = p_{n-1}, & B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1}E, \\
A_n = AB_{n-1}, & \dfrac{SpA_n}{n} = p_n, & B_n = A_n - p_nE.
\end{array}$$

Можно доказать, что

1) B_n -нулевая матрица,

2) если А - неособенная матрица, то $A^{-1} = B_{n-1}/p_n$,

3) каждый столбец матрицы

$$R_k = \lambda_k^{n-1}E + \lambda_k^{n-2}B_1 + \ldots + B_{n-1}$$

состоит из компонент собственного вектора, принадлежащего собственному числу λ_k.

Пример. Построить характеристическое уравнение матрицы по методу Д.К. Фадеева

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2.5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

k	A_k			$p_k = q_k$	B_k		
1	2	1	1	7,5	-5,5	1	1
	1	2,5	1		1	-5	1
	1	1	3		1	1	-4,5
2	-9	-2	-1,5	-15,5	6,5	-2	-1,5
	-2	-10,5	-1		-2	5	-1
	-1,5	-1	-11,5		-1,5	-1	4
3	9,5	0	0	9,5	0	0	0
	0	9,5	0		0	0	0
	0	0	9,5		0	0	0

Ответ: $Q_3(\lambda) = -(\lambda^3 - 7,5\lambda^2 + 15,5\lambda - 9,5)$; $\lambda_1 = 1,185$; $\lambda_2 = 1,76$; $\lambda_3 = 4,555$.

Попутно получилась обратная матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,68421 & -0,21053 & -0,15789 \\ -0,21053 & 0,52632 & -0.10526 \\ -0,15789 & -0,10526 & 0,42105 \end{bmatrix}$

2.2 Частичная проблема собственных значений.

Для решения *частичной проблемы собственных значений*, состоящей в определении одного или нескольких собственных значений и соответствующих им собственных векторов, обычно используются итерационные методы. Строится такой итерационный процесс, который сходится к одному собственному значению и собственному вектору, причем используемые алгоритмы обычно весьма экономичны.

2.2.1 Метод простой итерации

Построим итерационный процесс, применяя метод простой итерации к решению системы уравнений

$$\lambda\vec{x} = A\vec{x}. \tag{24}$$

Запишем (24), введя вспомогательный вектор y:

$$\vec{y} = A\vec{x}, \tag{25}$$

$$\lambda\vec{x} = \vec{y}. \tag{26}$$

Пусть $\vec{x}^{(0)}$ - начальное приближение собственного вектора $\vec{x}$, причем собственные векторы на каждой итерации нормированы, так что $|\vec{x}| = 1 (k = 1, 1, \ldots)$. Используем соотношение (25) для вычисления $\vec{y}^{(1)}$:

$$\vec{y}^{(1)} = A\vec{x}^{(0)}.$$

Соотношение (26) используем для вычисления первого приближения $\lambda^{(1)}$, применяя умножение обеих частей равенства скалярно на $\vec{x}^{(0)}$:

$$\lambda = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}^{(0)}}{\vec{x}^{(0)} \cdot \vec{x}^{(0)}} = \vec{y}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(0)}.$$

Здесь учтено, что вектор $\vec{x}^{(0)}$ нормирован. Следующее приближение собственного вектора $\vec{x}^{(1)}$ можно вычислить, нормируя вектор $\vec{y}^{(1)}$.

Окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\vec{y}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)},$$
$$\lambda^{(k+1)} = \vec{y}^{(k+1)} \cdot \vec{x}^{(k)}, \qquad (27)$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \frac{\vec{y}^{(k+1)}}{|\vec{y}^{(k+1)}|}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и продолжается до установления постоянных значений λ и $\vec{x}$. В качестве критерия завершения итераций следует проверять близость векторов $(sign\lambda^{(k+1)})\vec{x}^{(k+1)}$ и $\vec{x}^{(k)}$.

Найденное в результате итерационного процесса (27) число λ является наибольшим по модулю собственным значением данной матрицы A, а $\vec{x}$ - соответствующим ему собственным вектором. Скорость сходимости этого итерационного процесса зависит от удачного выбора начального приближения. Если начальный вектор близок к истинному собственному вектору, то итерации сходятся быстро.

Пример. Найти максимальное собственное значение и собственный вектор матрицы A

$$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

За начальный вектор примем $\vec{x} = (1, 1, 1)$. Итерации дадут:

k	1	2	3	4	5
x_1	0,5111	0,4913	0,4855	0,4837	0,4831
x_2	0,5750	0,5686	0,5648	0,5631	0,5623
x_3	0,6389	0,6598	0,6673	0,6701	0,6711
λ	13,5000	4,5490	4,5543	4,5549	4,5550
y_1	4,0000	2,2361	2,2110	2,2031	2,2005
y_2	4,5000	2,5875	2,5725	2,5648	2,5615
y_3	5,0000	3,0027	3,0393	3,0522	3,0570
$\|y\|$	7,8262	4,5510	4,5545	4,5550	4,5550
$\max_i \|\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^{k}\|$	0,4889	0,0209	0,0075	0,0028	0,0010
$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|$		8,951	0,0053	0,0007	0,0001

Ответ: $\lambda_{max} = 4,555$, $\vec{x} = (0,4831; 0,5623; 0,6711)$.

2.2.2 Метод прямых итераций

Предположим, что матрица A имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n| > 0.$$

Метод прямых итераций предназначен для вычисления наибольшего по модулю собственного значения λ_1 и отвечающего ему собственного вектора $u^{(1)}$ и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор $x^{(0)}$ и построим последовательность векторов $x^{(k)}$ по правилу

$$x^{(k)} = A(x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где α_{k-1} - наибольшая по модулю компонента вектора $x^{(k-1)}$, т.е. $|\alpha_{k-1} = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k-1)}|$. Известно, что при $k\to\infty$

$$\alpha_k = \lambda_1, \quad x^{(k)} \to u^{(1)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычисления собственного значения λ_1. При этом α_k принимают за приближенное значение λ_1, а $x^{(k)}$ - за приближение к $u^{(1)}$. Если за M итераций (M - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Пример. Найти наибольшее собственное значение матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2,5 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

и соответствующий ему собственный вектор.

Решение. Выберем начальный вектор $y = (1, 1, 1)$ и составим таблицу:

k y	1 Ay	2 A^2y	3 A^3y	4 A^4y	5 A^5y	6 A^6y
1 1 1	4 4,5 5	17,5 20,25 23,5	78,75 91,625 108,25	357,375 416,062 495,125	1625,93 1892,65 2258,81	7403,34 8616,39 10295,03
$c_1^{(k)} = y_1^{(k+1)}/y_1^{(k)}$ $c_2^{(k)} = y_2^{(k+1)}/y_2^{(k)}$ $c_3^{(k)} = y_3^{(k+1)}/y_3^{(k)}$	4 4,5 5	4,375 4,5 4,7	4,5 4,5247 4,6064	4,5381 4,5409 4,5739	4,5500 4,5490 4,5621	4,5533 4,5525 4,5577
$\lambda^{(k)} = \frac{1}{3}(c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + c_3^{(k)})$	4,5	4,525	4,5437	4,5510	4,5536	4,5545
$\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}$		0,025	0,0187	0,0073	0,0026	0,0009

В качестве собственного вектора матрицы A можно взять

$$A^6y=\begin{bmatrix} 7403,34\\ 8616.39\\ 10295.03\end{bmatrix}$$

Нормируя его ($|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$), окончательно получаем

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0,4829\\ 0,5620\\ 0,6715\end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad \lambda_{max} = 4,5545.$$

2.2.3 Метод обратных итераций

Предположим, что матрица A имеет только вещественные различные по модулю собственные значения. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots |\lambda_n| > 0.$$

Метод обратных итераций предназначен для вычисления наименьшего по модулю собственного значения λ_n и отвечающего ему собственного вектора $u^{(n)}$ и состоит в следующем. Выберем произвольный вектор $x^{(0)}$ и построим последовательность векторов $x^{(k)}$, каждый из которых является решением системы уравнений

$$Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где α_{k-1} - наибольшая по модулю компонента вектора $x^{(k-1)}$, т.е. $|\alpha_{k-1} = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k-1)}|$. Известно, что при $k \to \infty$

$$1/\alpha_k = \lambda_n, \quad x^{(k)} \to u^{(n)}.$$

На практике вычисления продолжают до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$|1/\alpha_k - 1/\alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

где ε - заданная точность вычисления собственного значения λ_n. При этом $1/\alpha_k$ принимают за приближенное значение λ_n, а $x^{(k)}$ - за приближение к $u^{(n)}$. Если за K итераций (K - предельно допустимое число итераций, задаваемое программистом), заданная точность не достигается, вычисления прекращаются.

Для решения систем уравнений $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$ на каждом шаге можно воспользоваться методом Гаусса. Поскольку матрица у всех систем одна и та же, то ее треугольное разложение $U + MA$ следует выполнить только один раз. Решение каждой системы $Ax^{(k)} = x^{(k-1)}/\alpha_{k-1}$ сводится, следовательно, к получению преобразованной правой части $g^{(k)} = M(x^{(k-1)}/\alpha_{k-1})$ и последующему решению системы с треугольной матрицей

$$Ux^{(k)} = g^{(k)}.$$

2.3 Полная проблема собственных значений

2.3.1 Метод вращения с преградами

Метод вращения предназначен для решения полной проблемы собственных значений невырожденной симметричной матрицы , т. е. для нахождения собственных значений и собственных векторов исходной матрицы. Эта проблема решается с помощью сходящихся итерационных процессов. Для симметричных матриц эти процессы состоят в цепочке преобразований подобия, в результате которых в пределе получается диагональная матрица так, что ее собственные значения определяются непосредственно. Впервые этот процесс был предложен Якоби в 1976 г., однако практическое применение стало возможным лишь с развитием быстродействующих счетных устройств. В настоящее время имеется целый ряд модификаций метода Якоби. Одной из модификаций является метод вращений с преградами.

Элементарный шаг каждого эрмитова процесса заключается в преобразовании подобия посредством матрицы вращения

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \dots\dots & -s & & \\ & & & \ddots\, 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & s & \dots & c & & \\ & & & & & \ddots\, 1 & \end{bmatrix}$$

где $c^2+s^2=1$. Эти матрицы принадлежат к классу ортогональных матриц, т.е. $T_{ij}\cdot T^*_{ij}=E$.

Процесс состоит в построении последовательности матриц $A_o=A, A_1, ...$, каждая из которых получается из предыдущей с помощью элементарного шага. Эти элементарные шаги должны быть подобраны так, чтобы A^{n+1} безгранично приближалась к диагональной матрице при $m\to\infty$. Дадим расчетные формулы $(m+1)$ шага (при котором $A^{m+1}=T^*_{ij}A^mT_{ij}$).

Для удобства введем обозначения $C=A^{m+1}$, тогда

$$C_{kl}=a^{(m)}_{kl}\quad \text{при}\quad k\neq i, k\neq j, l\neq i, l\neq j$$

$$C_{ki}=C_{ik}=ca^{(m)}_{ki}+sa^{(m)}_{kj}\quad \text{при}\quad k\neq i, k\neq j,$$

$$C_{kj}=C_{jk}=-sa^{(m)}_{ki}+ca^{(m)}_{kj}\quad \text{при}\quad k\neq i, k\neq j,$$

$$C_{ii}=c^2a^{(m)}_{ii}+2csa^{(m)}_{ij}+s^2a^{(m)}_{jj},\quad C_{jj}=s^2a^{(m)}_{ii}-2csa^{(m)}_{ij}+c^2a^{(m)}_{jj}$$

$$C_{ij}=C_{ji}=0$$

Числа c, s определяются по формулам

$$c=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{|a^{(m)}_{ii}-a^{(m)}_{jj}|}{d})},$$

$$s=sgn[a^{(m)}_{ij}(a^{(m)}_{ii}-a^{(m)}_{jj})]\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{|a^{(m)}_{ii}-a^{(m)}_{jj}|}{d})},\quad d=\sqrt{(a^{(m)}_{ii}-a^{(m)}_{jj})^2+4a^{(m)2}_{ij}}$$

Матрица вращения выбирается на $(m+1)$ шаге так, чтобы элемент a_{ij} стал нулем. При этом пара индексов (ij) выбирается так, чтобы аннулировался наибольший по модулю внедиагональный элемент матрицы $A^{(m)}$, а именно $|a^{(m)}_{ij}|\geq\sigma_k$, где $\sigma_1, \sigma_2, ...$ монотонно убывающая к нулю последовательность чисел, называемых "преградами". Один из способов задания "преград"состоит в нахождении σ_k по формуле $\sigma_k=\sqrt{max|a^{(m)}_{ii}|}\cdot 10^{-k}$, где $k=1,2,...,p$. Число p зависит от разрядности машины и требуемой точности решения поставленной задачи. После того как все внедиагональные элементы станут по модулю не больше σ_k, то "преграда"σ_k заменяется на σ_{k+1} и т.д. $k=1,2,...p$. Процесс заканчивается, когда все внедиагональные элементы станут меньше по модулю σ_p. Известно, что процесс с "преградами"сходится.

Так как характеристические полиномы подобных матриц совпадают, следовательно,

$$det(A-\lambda E)=det(D-\lambda E)=(d_{11}-\lambda)(d_{22}-\lambda)...(d_{nn}-\lambda)=0,$$

где D - есть диагональная матрица, полученная в результате выполнения описанного выше итерационного процесса.

Скажем несколько слов о нахождении собственных векторов матрицы A. Пусть итерационный процесс, описанный выше, доведен до того, что матрица

$$D=\prod_m T'_{i_mi_m}\cdot A\cdot\prod_m T_{i_mj_m}$$

оказалась практически диагональной. Тогда столбцы матрицы $\prod\limits_m T_{i_mj_m}$ будут собственными векторами исходной матрицы A. Домножив матрицу слева на $W=\prod\limits_m T_{i_mj_m}$ и справа на

W', получим $A = WDW'$. Из этого равенства получаем, что $AW = WD$. Если расписать это равенство по столбцам, то окажется, что каждый i-ый столбец матрицы W является собственным вектором, соответствующим собственном значению λ_i.

В отличие от прямых методов, алгоритмы которых состоят из разнородных частей: преобразования исходной матрицы, вычисления корней многочлена, нахождения собственных векторов, метод вращения позволяет в результате выполнения итерационного процесса найти собственные значения и собственные вектора.

Хотя количество умножений в этом методе весьма значительно, ошибки округления накапливаются медленно, так как умножения происходит на коэффициенты c и s по модулю меньше единицы.

Пример. Решить полную проблему собственных значений методом вращения с преградами для матрицы A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma = (10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4})$$

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
0	2 1 1	1 2,5 1	1 1 3	0,788205	-0,615412	(1,2)

T_{ij}			σ
0,788205	0,615412	0	10^{-1}
-0,615112	0,788205	0	
0	0	1	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
1	1,219223 0 0,172793	0 3,280773 1,403617	0,172793 1,403617 3	0,741458	0,670999	(2,3)

T_{ij}			σ
1	0	0	10^{-1}
0	0,741458	-0,670999	
0	0,670999	0,741458	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
2	1,219223 0,115924 0,128119	0,115944 4,551005 0	0,128119 0 1,729769	0,973075	0,230488	(1,3)

T_{ij}			σ
0,973075	0	0,230488	10^{-1}
0	1	0	
-0,230488	0	0,973075	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
3	1,188876 0,112822 0	0,112822 4,551005 0,026724	0 0,026724 1,760114	0,999439	0,033501	(1,2)

T_{ij}			σ
0,999439	0,033501	0	
-0,033501	0,999439	0	10^{-1}
0	0	1	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185091	0	0,000895			
4	0	4,554774	0,026709	0,999954	0,009555	(2,3)
	-0,000895	0,026709	1,760114			

T_{ij}			σ
1	0	0	
0	0,999954	-0,009555	10^{-2}
0	0,009555	0,999954	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185091	-0,000009	0,000895			
5	0,000009	1,555030	0	0,999999	-0,001549	(1,3)
	0,000895	0	1,759858			

T_{ij}			σ
0,999995	0	0,001549	
0	1	0	10^{-3}
-0,001549	0	0,999999	

k	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	$a_{i1}^{(k)}$	c	s	(ij)
	1,185089	-0,000008	0			
6	-0,000008	4,555030	0			
	0	0	1,759858			

Ответ: $\lambda_1 = 1,185089 \quad \lambda_2 = 4,555030 \quad \lambda_3 = 1,759839$

$$W = T_{12}T_{23}T_{13}T_{12}T_{23}T_{13} = \begin{bmatrix} 0,846727 & 0,482795 & -0,223458 \\ -0,495220 & 0,561790 & -0,662646 \\ -0,194385 & 0,671789 & 0,714802 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = (0,846727; -0,495220; -0,194385)$$

$$\bar{x}_2 = (0,482795; 0,561790; 0,671789)$$

$$\bar{x}_3 = (-0,223458; -0,662646; 0,714802)$$

2.4 Задания

1. Раскрыть вековые определители методами Леверье и Фадеева, найти собственные значения следующих матриц.

2. Решить частную проблему нахождения собственных значений методом прямой или обратной итерации.

3. Найти методом вращения собственные значения и собственные вектора матриц с точностью 10^{-3}.

1. $\begin{bmatrix} -0,755 & 0,392 & 0,562 & 3,599 \\ 6,968 & -3,273 & 4,121 & 2,521 \\ -1,374 & 2,456 & -1,507 & 7,163 \\ -0,359 & 6,148 & 2,542 & 0,783 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -3,916 & -2,795 & -1,392 & 2,993 \\ -1,719 & -0,860 & 3,906 & 2,613 \\ -0,581 & -0,773 & -0,063 & -4,53 \\ 1,878 & 1,123 & -0,802 & 1,331 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1,204 & 3,147 & 6,296 & -4,55 \\ -4,206 & 0,885 & 2,589 & 2,095 \\ -1,497 & 0,679 & 2,993 & 0,353 \\ 3,8953,732 & 5,577 & 0,704 & \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1,814 & 1,843 & -2,626 & -6,011 \\ 1,922 & 0,199 & -4,987 & -2,687 \\ -1,254 & -1,423 & 4,205 & -0,785 \\ -1,469 & -8,239 & -1,221 & -0,276 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -7,519 & 1,042 & -4,896 & -0,873 \\ 6,831 & 2,969 & 6,192 & -5,857 \\ 0,137 & -1,21 & 1,881 & 4,47 \\ -0,689 & 13,012 & 0,622 & -2,331 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} -3,921 & 6,24 & -0,052 & 2,524 \\ 13,926 & -0,506 & 10,705 & -1,52 \\ 3,702 & -2,802 & -1,267 & 4,394 \\ -4,707 & -1,599 & -1,157 & 0,717 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3,76 & 2,631 & 5,601 & -6,291 \\ 1,149 & -2,53 & 0,497 & -0,05 \\ 2,981 & 5,613 & 0,345 & 0,281 \\ 6,624 & 2,021 & -4,508 & 4,243 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} -3,432 & -0,2 & 3,443 & -1,696 \\ -13,427 & -0,508 & 3,298 & 8,875 \\ -2,85 & 4,398 & 06,323 & -0,33 \\ -6,696 & 0,205 & -7,817 & -1,419 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -2,071 & -3,107 & 3,08 & -2,49 \\ 2,85 & 1,658 & 0,007 & 11,607 \\ 1,108 & 8,249 & 0,964 & -2,536 \\ 0,239 & 3,139 & -4,587 & 4,513 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} -6,834 & 0,61 & -2,941 & -11,302 \\ -1,292 & 2,357 & 3,539 & -4,173 \\ 3,241 & 10,977 & -1,337 & -1,444 \\ 3,882 & 1,769 & 2,233 & -0,797 \end{bmatrix}$

В следующих вариантах матрица $A = D + kC$, где C, D - матрицы, а k - параметр.

11. $D = \begin{bmatrix} 9,9 & 8,8 & 7,7 & 6,6 \\ 8,8 & 5,5 & 4,4 & 3,3 \\ 7,7 & 4,4 & 2,2 & 1,1 \\ 6,6 & 3,3 & 1,1 & 0,0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, k=0(1)10.

12. $D = \begin{bmatrix} 1,111 & 1,222 & 0,333 \\ 1,222 & 1,444 & 0,555 \\ 0,333 & 0,555 & 1,666 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, k=0(1)15.

13. $D = \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & -1,3 \\ 1,2 & 0.9 & 0,4 \\ -1,3 & 0,4 & 0,8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$, k=0(1)7.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С.Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука,1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том II. -М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
3. Волков Е.А. Численные методы.-М.: Наука, 1987. 248 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. -М.: Наука, 1966.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы.-М.: Наука, 1978. 512 с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х т. -М.: Наука, 1976-1977.
7. Митченко А.Д. Численные методы линейной алгебры. -Владивосток, ДВГУ, 1991. 142 с.
8. Митченко А.Д., Хайрутдинова Г.З. Алгоритмы линейной алгебры. Методические указания (для студентов математического факультета). Владивосток, ДВГУ, 1993. 32 с.
9. Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др. Математический практикум. -М.: ГИФМЛ, 1960. 512 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.-М.: Наука,1989. 432 с.
11. Фадеев Д.К., Фадеев В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. -М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. 735 с.

Учебное издание

Александр Георгиевич Колобов
Лилия Александровна Молчанова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать 16.05.2008
Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,1
Тираж 100 экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.