МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
По основной образовательной программе подготовки бакалавров
направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика
профиль «Системное программирование»

Студент группы Б9122-01.03.02сп4
Кириенко Денис Олегович_____
«_____» _____ 2024 г.

Преподаватель _____кфмн_____
(должность, ученое звание)

_____
_____Яковлев Анатолий Александрович
(подпись) (ФИО)
«_____» _____2024 г.

г. Владивосток
2024

Постановка задачи

Дана матричная игра, которая задана матрицей размерности 6 на 8. Необходимо найти верхнюю и нижнюю цену игры и равновесное решение в смешанных стратегия.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -16 & -41 & 48 & 19 & 84 & 69 & 33 \\ 82 & 98 & -50 & 84 & -52 & -47 & -95 & -20 \\ 65 & 12 & 61 & -88 & -18 & -85 & 34 & -10 \\ 72 & 37 & 9 & 28 & 33 & -31 & 85 & 18 \\ 32 & -24 & -70 & -70 & 53 & 60 & 22 & 60 \\ 12 & -37 & 53 & 81 & -34 & 21 & -29 & -67 \end{bmatrix}$$

Нижняя цена игры: $\underline{A} = \max_i \min_j A = -31$

Верхняя цена игры: $\overline{A} = \min_j \max_i A = 53$

Поиск равновесного решения будет проходить с помощью симплекс-метода. Для этого матрица A должна быть неотрицательна. Для того, чтобы привести данную матрицу к такому виду, добавим модуль минимального элемента β матрицы A к каждому элементу исходной матрицы и получим неотрицательную матрицу Â.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 95 & 79 & 54 & 143 & 114 & 179 & 164 & 128 \\ 177 & 193 & 45 & 179 & 43 & 48 & 0 & 75 \\ 160 & 107 & 156 & 7 & 77 & 10 & 129 & 85 \\ 167 & 132 & 104 & 123 & 128 & 64 & 180 & 113 \\ 127 & 71 & 25 & 25 & 148 & 155 & 117 & 155 \\ 107 & 58 & 148 & 176 & 61 & 116 & 66 & 28 \end{bmatrix}$$

Для решения необходимо решить следующие задачи:

$$\begin{cases} y \cdot e \to \max, \\ \hat{A}y \le e^T, \\ y \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} e \cdot x \to \min, \\ \hat{A}^T x \ge e, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

В этом случае оптимальная стратегия первого игрока будет найдена по формуле: $p^* = \frac{x}{||x||}$, второго: $q^* = \frac{y}{||y||}$, а цена игры будет равна: $\varphi = \frac{1}{\alpha} - |\beta|$, где α - значение целевой функции, полученной в результате решения задач линейной оптимизации.

Стоит отметить, что p^* и q^* находятся прямым и двойственным симплекс-методом соответственно.

Решение задачи прямым симплекс-методом

Все значения в матрицах округлены до трех знаков после запятой.

Индекс: (1, 1)
Разрешающий элемент: 177.000

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 95.0 & 79.0 & 54.0 & 143.0 & 114.0 & 179.0 & 164.0 & 128.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 177.0 & 193.0 & 45.0 & 179.0 & 43.0 & 48.0 & 0.0 & 75.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 160.0 & 107.0 & 156.0 & 7.0 & 77.0 & 10.0 & 129.0 & 85.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 167.0 & 132.0 & 104.0 & 123.0 & 128.0 & 64.0 & 180.0 & 113.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 127.0 & 71.0 & 25.0 & 25.0 & 148.0 & 155.0 & 117.0 & 155.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 107.0 & 58.0 & 148.0 & 176.0 & 61.0 & 116.0 & 66.0 & 28.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Индекс: (3, 7)
Разрешающий элемент: 180.000

$$\begin{bmatrix}
0.463 & 0.0 & -24.588 & 29.847 & 46.927 & 90.921 & 153.237 & 164.0 & 87.746 & 1.0 & -0.537 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.006 & 1.0 & 1.09 & 0.254 & 1.011 & 0.243 & 0.271 & 0.0 & 0.424 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.096 & 0.0 & -67.463 & 115.322 & -154.808 & 38.13 & -33.39 & 129.0 & 17.203 & 0.0 & -0.904 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.056 & 0.0 & -50.096 & 61.542 & -45.887 & 87.429 & 18.712 & 180.0 & 42.237 & 0.0 & -0.944 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.282 & 0.0 & -67.48 & -7.288 & -103.435 & 117.147 & 120.559 & 117.0 & 101.186 & 0.0 & -0.718 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
0.395 & 0.0 & -58.672 & 120.797 & 67.791 & 35.006 & 86.983 & 66.0 & -17.339 & 0.0 & -0.605 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\
0.006 & 0.0 & 0.09 & -0.746 & 0.011 & -0.757 & -0.729 & -1.0 & -0.576 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (4, 6)
Разрешающий элемент: 108.397

$$\begin{bmatrix}
0.412 & 0.0 & 21.055 & -26.224 & 88.735 & 11.263 & 136.189 & 0.0 & 49.263 & 1.0 & 0.323 & 0.0 & -0.911 & 0.0 & 0.0 \\
0.006 & 1.0 & 1.09 & 0.254 & 1.011 & 0.243 & 0.271 & 0.0 & 0.424 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.056 & 0.0 & -31.561 & 71.217 & -121.922 & -24.528 & -46.8 & 0.0 & -13.067 & 0.0 & -0.228 & 1.0 & -0.717 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -0.278 & 0.342 & -0.255 & 0.486 & 0.104 & 1.0 & 0.235 & 0.0 & -0.005 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.0 \\
0.246 & 0.0 & -34.918 & -47.291 & -73.608 & 60.318 & 108.397 & 0.0 & 73.732 & 0.0 & -0.104 & 0.0 & -0.65 & 1.0 & 0.0 \\
0.375 & 0.0 & -40.304 & 98.231 & 84.616 & 2.948 & 80.122 & 0.0 & -32.826 & 0.0 & -0.259 & 0.0 & -0.367 & 0.0 & 1.0 \\
0.006 & 0.0 & -0.188 & -0.404 & -0.244 & -0.271 & -0.625 & 0.0 & -0.342 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (3, 3)
Разрешающий элемент: 0.387

$$\begin{bmatrix}
0.103 & 0.0 & 64.926 & 33.191 & 181.216 & -64.52 & 0.0 & 0.0 & -43.374 & 1.0 & 0.454 & 0.0 & -0.094 & -1.256 & 0.0 \\
0.005 & 1.0 & 1.178 & 0.373 & 1.195 & 0.092 & 0.0 & 0.0 & 0.239 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.002 & -0.003 & 0.0 \\
0.162 & 0.0 & -46.637 & 50.799 & -153.703 & 1.514 & 0.0 & 0.0 & 18.767 & 0.0 & -0.273 & 1.0 & -0.997 & 0.432 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -0.245 & 0.387 & -0.184 & 0.428 & 0.0 & 1.0 & 0.164 & 0.0 & -0.005 & 0.0 & 0.006 & -0.001 & 0.0 \\
0.002 & 0.0 & -0.322 & -0.436 & -0.679 & 0.556 & 1.0 & 0.0 & 0.68 & 0.0 & -0.001 & 0.0 & -0.006 & 0.009 & 0.0 \\
0.193 & 0.0 & -14.494 & 133.186 & 139.024 & -41.636 & 0.0 & 0.0 & -87.326 & 0.0 & -0.182 & 0.0 & 0.114 & -0.739 & 1.0 \\
0.007 & 0.0 & -0.389 & -0.676 & -0.668 & 0.076 & 0.0 & 0.0 & 0.083 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.002 & 0.006 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (0, 4)
Разрешающий элемент: 197.015

$$\begin{bmatrix}
0.096 & 0.0 & 85.91 & 0.0 & 197.015 & -101.192 & 0.0 & -85.709 & -57.425 & 1.0 & 0.895 & 0.0 & -0.624 & -1.174 & 0.0 \\
0.005 & 1.0 & 1.413 & 0.0 & 1.373 & -0.32 & 0.0 & -0.962 & 0.082 & 0.0 & 0.011 & 0.0 & -0.004 & -0.002 & 0.0 \\
0.151 & 0.0 & -14.521 & 0.0 & -129.522 & -54.613 & 0.0 & -131.177 & -2.738 & 0.0 & 0.402 & 1.0 & -1.808 & 0.558 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -0.632 & 1.0 & -0.476 & 1.105 & 0.0 & 2.582 & 0.423 & 0.0 & -0.013 & 0.0 & 0.016 & -0.002 & 0.0 \\
0.002 & 0.0 & -0.598 & 0.0 & -0.887 & 1.038 & 1.0 & 1.127 & 0.865 & 0.0 & -0.007 & 0.0 & 0.001 & 0.008 & 0.0 \\
0.166 & 0.0 & 69.707 & 0.0 & 202.422 & -188.792 & 0.0 & -343.924 & -143.709 & 0.0 & 1.587 & 0.0 & -2.011 & -0.409 & 1.0 \\
0.008 & 0.0 & -0.817 & 0.0 & -0.99 & 0.824 & 0.0 & 1.747 & 0.37 & 0.0 & -0.009 & 0.0 & 0.013 & 0.004 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (0, 2)
Разрешающий элемент: 0.436

$$\begin{bmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.436 & 0.0 & 1.0 & -0.514 & 0.0 & -0.435 & -0.291 & 0.005 & 0.005 & 0.0 & -0.003 & -0.006 & 0.0 \\
0.004 & 1.0 & 0.815 & 0.0 & 0.0 & 0.386 & 0.0 & -0.365 & 0.482 & -0.007 & 0.005 & 0.0 & 0.0 & 0.007 & 0.0 \\
0.215 & 0.0 & 41.957 & 0.0 & 0.0 & -121.139 & 0.0 & -187.524 & -40.491 & 0.657 & 0.99 & 1.0 & -2.218 & -0.214 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & -0.425 & 1.0 & 0.0 & 0.86 & 0.0 & 2.375 & 0.285 & 0.002 & -0.011 & 0.0 & 0.014 & -0.005 & 0.0 \\
0.003 & 0.0 & -0.211 & 0.0 & 0.0 & 0.583 & 1.0 & 0.741 & 0.606 & 0.005 & -0.003 & 0.0 & -0.002 & 0.003 & 0.0 \\
0.067 & 0.0 & -18.56 & 0.0 & 0.0 & -84.822 & 0.0 & -255.863 & -84.708 & -1.027 & 0.668 & 0.0 & -1.37 & 0.797 & 1.0 \\
0.008 & 0.0 & -0.385 & 0.0 & 0.0 & 0.315 & 0.0 & 1.316 & 0.081 & 0.005 & -0.005 & 0.0 & 0.009 & -0.002 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (1, 8)
Разрешающий элемент: 1.026

$$\begin{bmatrix}
0.001 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.293 & -1.178 & 0.0 & -0.998 & -0.668 & 0.012 & 0.01 & 0.0 & -0.007 & -0.014 & 0.0 \\
0.003 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.868 & 1.345 & 0.0 & 0.448 & 1.026 & -0.016 & -0.004 & 0.0 & 0.006 & 0.018 & 0.0 \\
0.168 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -96.22 & -71.718 & 0.0 & -145.665 & -12.445 & 0.169 & 0.553 & 1.0 & -1.913 & 0.359 & 0.0 \\
0.001 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.974 & 0.36 & 0.0 & 1.952 & 0.001 & 0.007 & -0.007 & 0.0 & 0.011 & -0.011 & 0.0 \\
0.003 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.485 & 0.334 & 1.0 & 0.53 & 0.465 & 0.007 & -0.001 & 0.0 & -0.003 & -0.0 & 0.0 \\
0.088 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 42.564 & -106.684 & 0.0 & -274.38 & -97.114 & -0.811 & 0.861 & 0.0 & -1.505 & 0.543 & 1.0 \\
0.008 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.883 & -0.138 & 0.0 & 0.932 & -0.176 & 0.01 & -0.001 & 0.0 & 0.007 & -0.007 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (5, 13)
Разрешающий элемент: 2.222

$$\begin{bmatrix}
0.003 & 0.651 & 1.0 & 0.0 & 1.076 & -0.302 & 0.0 & -0.706 & 0.0 & 0.001 & 0.008 & 0.0 & -0.003 & -0.002 & 0.0 \\
0.003 & 0.974 & 0.0 & 0.0 & -1.821 & 1.311 & 0.0 & 0.437 & 1.0 & -0.016 & -0.004 & 0.0 & 0.006 & 0.017 & 0.0 \\
0.209 & 12.127 & 0.0 & 0.0 & -118.876 & -55.406 & 0.0 & -140.233 & 0.0 & -0.03 & 0.506 & 1.0 & -1.841 & 0.574 & 0.0 \\
0.001 & -0.001 & 0.0 & 1.0 & 0.975 & 0.359 & 0.0 & 1.951 & 0.0 & 0.007 & -0.007 & 0.0 & 0.011 & -0.011 & 0.0 \\
0.001 & -0.453 & 0.0 & 0.0 & 1.331 & -0.276 & 1.0 & 0.327 & 0.0 & 0.014 & 0.001 & 0.0 & -0.006 & -0.008 & 0.0 \\
0.407 & 94.632 & 0.0 & 0.0 & -134.233 & 20.605 & 0.0 & -231.989 & 0.0 & -2.368 & 0.496 & 0.0 & -0.942 & 2.222 & 1.0 \\
0.009 & 0.172 & 0.0 & 0.0 & 0.563 & 0.093 & 0.0 & 1.009 & 0.0 & 0.007 & -0.001 & 0.0 & 0.008 & -0.004 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (2, 10)
Разрешающий элемент: 0.378

$$\begin{bmatrix}
0.004 & 0.741 & 1.0 & 0.0 & 0.949 & -0.282 & 0.0 & -0.927 & 0.0 & -0.001 & 0.008 & 0.0 & -0.004 & 0.0 & 0.001 \\
0.0 & 0.238 & 0.0 & 0.0 & -0.776 & 1.15 & 0.0 & 2.241 & 1.0 & 0.002 & -0.008 & 0.0 & 0.013 & 0.0 & -0.008 \\
0.103 & -12.327 & 0.0 & 0.0 & -84.189 & -60.73 & 0.0 & -80.284 & 0.0 & 0.581 & 0.378 & 1.0 & -1.598 & 0.0 & -0.258 \\
0.003 & 0.473 & 0.0 & 1.0 & 0.303 & 0.462 & 0.0 & 0.789 & 0.0 & -0.004 & -0.004 & 0.0 & 0.007 & 0.0 & 0.005 \\
0.003 & -0.11 & 0.0 & 0.0 & 0.844 & -0.201 & 1.0 & -0.515 & 0.0 & 0.006 & 0.003 & 0.0 & -0.009 & 0.0 & 0.004 \\
0.183 & 42.59 & 0.0 & 0.0 & -60.413 & 9.273 & 0.0 & -104.409 & 0.0 & -1.066 & 0.223 & 0.0 & -0.424 & 1.0 & 0.45 \\
0.01 & 0.343 & 0.0 & 0.0 & 0.319 & 0.13 & 0.0 & 0.588 & 0.0 & 0.002 & -0.0 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & 0.002
\end{bmatrix}$$

Итог:

$$\begin{bmatrix}
0.001 & 1.014 & 1.0 & 0.0 & 2.813 & 1.063 & 0.0 & 0.851 & 0.0 & -0.014 & 0.0 & -0.022 & 0.031 & 0.0 & 0.007 \\
0.002 & -0.01 & 0.0 & 0.0 & -2.473 & -0.073 & 0.0 & 0.623 & 1.0 & 0.014 & 0.0 & 0.02 & -0.019 & 0.0 & -0.013 \\
0.273 & -32.612 & 0.0 & 0.0 & -222.728 & -160.667 & 0.0 & -212.397 & 0.0 & 1.538 & 1.0 & 2.646 & -4.227 & 0.0 & -0.684 \\
0.004 & 0.336 & 0.0 & 1.0 & -0.634 & -0.214 & 0.0 & -0.105 & 0.0 & 0.002 & 0.0 & 0.011 & -0.011 & 0.0 & 0.002 \\
0.002 & -0.011 & 0.0 & 0.0 & 1.517 & 0.285 & 1.0 & 0.126 & 0.0 & 0.001 & 0.0 & -0.008 & 0.003 & 0.0 & 0.006 \\
0.122 & 49.867 & 0.0 & 0.0 & -10.716 & 45.123 & 0.0 & -57.018 & 0.0 & -1.409 & 0.0 & -0.59 & 0.519 & 1.0 & 0.603 \\
0.01 & 0.329 & 0.0 & 0.0 & 0.223 & 0.061 & 0.0 & 0.496 & 0.0 & 0.003 & 0.0 & 0.001 & 0.004 & 0.0 & 0.002
\end{bmatrix}$$

Оптимальная стратегия первого игрока:

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.267 & 0.771 & 0.0 & 0.0 & 0.404 & 0.0 & 0.414 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции, округленное до пяти знаков:

$\alpha = 0.00987$

Решение задачи двойственным симплекс-методом

Все значения в матрицах округлены до трех знаков после запятой.

Индекс: (0, 2)
Разрешающий элемент: -177.000

$$\begin{bmatrix}
-1.0 & -95.0 & -177.0 & -160.0 & -167.0 & -127.0 & -107.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -79.0 & -193.0 & -107.0 & -132.0 & -71.0 & -58.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -54.0 & -45.0 & -156.0 & -104.0 & -25.0 & -148.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -143.0 & -179.0 & -7.0 & -123.0 & -25.0 & -176.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -114.0 & -43.0 & -77.0 & -128.0 & -148.0 & -61.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -179.0 & -48.0 & -10.0 & -64.0 & -155.0 & -116.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -164.0 & 0.0 & -129.0 & -180.0 & -117.0 & -66.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
-1.0 & -128.0 & -75.0 & -85.0 & -113.0 & -155.0 & -28.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\
0.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (6, 4)
Разрешающий элемент: -180.000

$$\begin{bmatrix}
0.006 & 0.537 & 1.0 & 0.904 & 0.944 & 0.718 & 0.605 & -0.006 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 \\
0.09 & 24.588 & 0.0 & 67.463 & 50.096 & 67.48 & 58.672 & -1.09 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.746 & -29.847 & 0.0 & -115.322 & -61.542 & 7.288 & -120.797 & -0.254 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.011 & -46.927 & 0.0 & 154.808 & 45.887 & 103.435 & -67.791 & -1.011 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.757 & -90.921 & 0.0 & -38.13 & -87.429 & -117.147 & -35.006 & -0.243 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.729 & -153.237 & 0.0 & 33.39 & -18.712 & -120.559 & -86.983 & -0.271 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
-1.0 & -164.0 & 0.0 & -129.0 & -180.0 & -117.0 & -66.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
-0.576 & -87.746 & 0.0 & -17.203 & -42.237 & -101.186 & 17.339 & -0.424 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\
0.006 & -0.463 & 0.0 & -0.096 & -0.056 & -0.282 & -0.395 & -0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (5, 5)
Разрешающий элемент: -108.397

$$\begin{bmatrix}
0.0 & -0.323 & 1.0 & 0.228 & 0.0 & 0.104 & 0.259 & -0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.005 & 0.0 \\
-0.188 & -21.055 & 0.0 & 31.561 & 0.0 & 34.918 & 40.304 & -1.09 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.278 & 0.0 \\
-0.404 & 26.224 & 0.0 & -71.217 & 0.0 & 47.291 & -98.231 & -0.254 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.342 & 0.0 \\
-0.244 & -88.735 & 0.0 & 121.922 & 0.0 & 73.608 & -84.616 & -1.011 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.255 & 0.0 \\
-0.271 & -11.263 & 0.0 & 24.528 & 0.0 & -60.318 & -2.948 & -0.243 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & -0.486 & 0.0 \\
-0.625 & -136.189 & 0.0 & 46.8 & 0.0 & -108.397 & -80.122 & -0.271 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.104 & 0.0 \\
0.006 & 0.911 & -0.0 & 0.717 & 1.0 & 0.65 & 0.367 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.006 & -0.0 \\
-0.342 & -49.263 & 0.0 & 13.067 & 0.0 & -73.732 & 32.826 & -0.424 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.235 & 1.0 \\
0.006 & -0.412 & 0.0 & -0.056 & 0.0 & -0.246 & -0.375 & -0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

Индекс: (2, 13)

Разрешающий элемент: -0.387

$$\begin{bmatrix} -0.0 & -0.454 & 1.0 & 0.273 & 0.0 & 0.0 & 0.182 & -0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.001 & 0.005 & 0.0 \\ -0.389 & -64.926 & 0.0 & 46.637 & 0.0 & 0.0 & 14.494 & -1.178 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.322 & 0.245 & 0.0 \\ -0.676 & -33.191 & 0.0 & -50.799 & 0.0 & 0.0 & -133.186 & -0.373 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.436 & -0.387 & 0.0 \\ -0.668 & -181.216 & 0.0 & 153.703 & 0.0 & 0.0 & -139.024 & -1.195 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.679 & 0.184 & 0.0 \\ 0.076 & 64.52 & 0.0 & -1.514 & 0.0 & 0.0 & 41.636 & -0.092 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.556 & -0.428 & 0.0 \\ 0.006 & 1.256 & -0.0 & -0.432 & -0.0 & 1.0 & 0.739 & 0.003 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.009 & 0.001 & -0.0 \\ 0.002 & 0.094 & 0.0 & 0.997 & 1.0 & 0.0 & -0.114 & -0.002 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.006 & -0.006 & 0.0 \\ 0.083 & 43.374 & 0.0 & -18.767 & 0.0 & 0.0 & 87.326 & -0.239 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.68 & -0.164 & 1.0 \\ 0.007 & -0.103 & 0.0 & -0.162 & 0.0 & 0.0 & -0.193 & -0.005 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.002 & -0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Индекс: (3, 1)

Разрешающий элемент: -197.015

$$\begin{bmatrix} -0.009 & -0.895 & 1.0 & -0.402 & 0.0 & 0.0 & -1.587 & -0.011 & 0.0 & 0.013 & 0.0 & 0.0 & 0.007 & 0.0 & 0.0 \\ -0.817 & -85.91 & 0.0 & 14.521 & 0.0 & 0.0 & -69.707 & -1.413 & 1.0 & 0.632 & 0.0 & 0.0 & 0.598 & 0.0 & 0.0 \\ 1.747 & 85.709 & -0.0 & 131.177 & -0.0 & -0.0 & 343.924 & 0.962 & -0.0 & -2.582 & -0.0 & -0.0 & -1.127 & 1.0 & -0.0 \\ -0.99 & -197.015 & 0.0 & 129.522 & 0.0 & 0.0 & -202.422 & -1.373 & 0.0 & 0.476 & 1.0 & 0.0 & 0.887 & 0.0 & 0.0 \\ 0.824 & 101.192 & 0.0 & 54.613 & 0.0 & 0.0 & 188.792 & 0.32 & 0.0 & -1.105 & 0.0 & 1.0 & -1.038 & 0.0 & 0.0 \\ 0.004 & 1.174 & 0.0 & -0.558 & 0.0 & 1.0 & 0.409 & 0.002 & 0.0 & 0.002 & 0.0 & 0.0 & -0.008 & 0.0 & 0.0 \\ 0.013 & 0.624 & 0.0 & 1.808 & 1.0 & 0.0 & 2.011 & 0.004 & 0.0 & -0.016 & 0.0 & 0.0 & -0.001 & 0.0 & 0.0 \\ 0.37 & 57.425 & 0.0 & 2.738 & 0.0 & 0.0 & 143.709 & -0.082 & 0.0 & -0.423 & 0.0 & 0.0 & -0.865 & 0.0 & 1.0 \\ 0.008 & -0.096 & 0.0 & -0.151 & 0.0 & 0.0 & -0.166 & -0.005 & 0.0 & -0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.002 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Индекс: (1, 10)

Разрешающий элемент: -0.436

$$\begin{bmatrix} -0.005 & 0.0 & 1.0 & -0.99 & 0.0 & 0.0 & -0.668 & -0.005 & 0.0 & 0.011 & -0.005 & 0.0 & 0.003 & 0.0 & 0.0 \\ -0.385 & 0.0 & 0.0 & -41.957 & 0.0 & 0.0 & 18.56 & -0.815 & 1.0 & 0.425 & -0.436 & 0.0 & 0.211 & 0.0 & 0.0 \\ 1.316 & 0.0 & 0.0 & 187.524 & 0.0 & 0.0 & 255.863 & 0.365 & 0.0 & -2.375 & 0.435 & 0.0 & -0.741 & 1.0 & 0.0 \\ 0.005 & 1.0 & -0.0 & -0.657 & -0.0 & -0.0 & 1.027 & 0.007 & -0.0 & -0.002 & -0.005 & -0.0 & -0.005 & -0.0 & -0.0 \\ 0.315 & 0.0 & 0.0 & 121.139 & 0.0 & 0.0 & 84.822 & -0.386 & 0.0 & -0.86 & 0.514 & 1.0 & -0.583 & 0.0 & 0.0 \\ -0.002 & 0.0 & 0.0 & 0.214 & 0.0 & 1.0 & -0.797 & -0.007 & 0.0 & 0.005 & 0.006 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & 0.0 \\ 0.009 & 0.0 & 0.0 & 2.218 & 1.0 & 0.0 & 1.37 & -0.0 & 0.0 & -0.014 & 0.003 & 0.0 & 0.002 & 0.0 & 0.0 \\ 0.081 & 0.0 & 0.0 & 40.491 & 0.0 & 0.0 & 84.708 & -0.482 & 0.0 & -0.285 & 0.291 & 0.0 & -0.606 & 0.0 & 1.0 \\ 0.008 & 0.0 & 0.0 & -0.215 & 0.0 & 0.0 & -0.067 & -0.004 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Индекс: (7, 7)

Разрешающий элемент: -1.026

$$\begin{bmatrix} -0.001 & 0.0 & 1.0 & -0.553 & 0.0 & 0.0 & -0.861 & 0.004 & -0.01 & 0.007 & 0.0 & 0.0 & 0.001 & 0.0 & 0.0 \\ 0.883 & -0.0 & -0.0 & 96.22 & -0.0 & -0.0 & -42.564 & 1.868 & -2.293 & -0.974 & 1.0 & -0.0 & -0.485 & -0.0 & -0.0 \\ 0.932 & 0.0 & 0.0 & 145.665 & 0.0 & 0.0 & 274.38 & -0.448 & 0.998 & -1.952 & 0.0 & 0.0 & -0.53 & 1.0 & 0.0 \\ 0.01 & 1.0 & -0.0 & -0.169 & -0.0 & -0.0 & 0.811 & 0.016 & -0.012 & -0.007 & 0.0 & -0.0 & -0.007 & -0.0 & -0.0 \\ -0.138 & 0.0 & 0.0 & 71.718 & 0.0 & 0.0 & 106.684 & -1.345 & 1.178 & -0.36 & 0.0 & 1.0 & -0.334 & 0.0 & 0.0 \\ -0.007 & 0.0 & 0.0 & -0.359 & 0.0 & 1.0 & -0.543 & -0.018 & 0.014 & 0.011 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.007 & 0.0 & 0.0 & 1.913 & 1.0 & 0.0 & 1.505 & -0.006 & 0.007 & -0.011 & 0.0 & 0.0 & 0.003 & 0.0 & 0.0 \\ -0.176 & 0.0 & 0.0 & 12.445 & 0.0 & 0.0 & 97.114 & -1.026 & 0.668 & -0.001 & 0.0 & 0.0 & -0.465 & 0.0 & 1.0 \\ 0.008 & 0.0 & 0.0 & -0.168 & 0.0 & 0.0 & -0.088 & -0.003 & -0.001 & -0.001 & 0.0 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Индекс: (5, 6)

Разрешающий элемент: -2.222

$$\begin{bmatrix} -0.001 & 0.0 & 1.0 & -0.506 & 0.0 & 0.0 & -0.496 & 0.0 & -0.008 & 0.007 & 0.0 & 0.0 & -0.001 & 0.0 & 0.004 \\ 0.563 & 0.0 & 0.0 & 118.876 & 0.0 & 0.0 & 134.233 & 0.0 & -1.076 & -0.975 & 1.0 & 0.0 & -1.331 & 0.0 & 1.821 \\ 1.009 & 0.0 & 0.0 & 140.233 & 0.0 & 0.0 & 231.989 & 0.0 & 0.706 & -1.951 & 0.0 & 0.0 & -0.327 & 1.0 & -0.437 \\ 0.007 & 1.0 & 0.0 & 0.03 & 0.0 & 0.0 & 2.368 & 0.0 & -0.001 & -0.007 & 0.0 & 0.0 & -0.014 & 0.0 & 0.016 \\ 0.093 & 0.0 & 0.0 & 55.406 & 0.0 & 0.0 & -20.605 & 0.0 & 0.302 & -0.359 & 0.0 & 1.0 & 0.276 & 0.0 & -1.311 \\ -0.004 & 0.0 & 0.0 & -0.574 & 0.0 & 1.0 & -2.222 & 0.0 & 0.002 & 0.011 & 0.0 & 0.0 & 0.008 & 0.0 & -0.017 \\ 0.008 & 0.0 & 0.0 & 1.841 & 1.0 & 0.0 & 0.942 & 0.0 & 0.003 & -0.011 & 0.0 & 0.0 & 0.006 & 0.0 & -0.006 \\ 0.172 & -0.0 & -0.0 & -12.127 & -0.0 & -0.0 & -94.632 & 1.0 & -0.651 & 0.001 & -0.0 & -0.0 & 0.453 & -0.0 & -0.974 \\ 0.009 & 0.0 & 0.0 & -0.209 & 0.0 & 0.0 & -0.407 & 0.0 & -0.003 & -0.001 & 0.0 & 0.0 & -0.001 & 0.0 & -0.003 \end{bmatrix}$$

Индекс: (0, 3)

Разрешающий элемент: -0.378

$$\begin{bmatrix} -0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.378 & 0.0 & -0.223 & 0.0 & 0.0 & -0.008 & 0.004 & 0.0 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & 0.008 \\ 0.319 & 0.0 & 0.0 & 84.189 & 0.0 & 60.413 & 0.0 & 0.0 & -0.949 & -0.303 & 1.0 & 0.0 & -0.844 & 0.0 & 0.776 \\ 0.588 & 0.0 & 0.0 & 80.284 & 0.0 & 104.409 & 0.0 & 0.0 & 0.927 & -0.789 & 0.0 & 0.0 & 0.515 & 1.0 & -2.241 \\ 0.002 & 1.0 & 0.0 & -0.581 & 0.0 & 1.066 & 0.0 & 0.0 & 0.001 & 0.004 & 0.0 & 0.0 & -0.006 & 0.0 & -0.002 \\ 0.13 & 0.0 & 0.0 & 60.73 & 0.0 & -9.273 & 0.0 & 0.0 & 0.282 & -0.462 & 0.0 & 1.0 & 0.201 & 0.0 & -1.15 \\ 0.002 & -0.0 & -0.0 & 0.258 & -0.0 & -0.45 & 1.0 & -0.0 & -0.001 & -0.005 & -0.0 & -0.0 & -0.004 & -0.0 & 0.008 \\ 0.006 & 0.0 & 0.0 & 1.598 & 1.0 & 0.424 & 0.0 & 0.0 & 0.004 & -0.007 & 0.0 & 0.0 & 0.009 & 0.0 & -0.013 \\ 0.343 & -0.0 & -0.0 & 12.327 & -0.0 & -42.59 & 0.0 & 1.0 & -0.741 & -0.473 & -0.0 & -0.0 & 0.11 & -0.0 & -0.238 \\ 0.01 & 0.0 & 0.0 & -0.103 & 0.0 & -0.183 & 0.0 & 0.0 & -0.004 & -0.003 & 0.0 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & -0.0 \end{bmatrix}$$

Итог:

$$\begin{bmatrix}
0.001 & -0.0 & -2.646 & 1.0 & -0.0 & 0.59 & -0.0 & -0.0 & 0.022 & -0.011 & -0.0 & -0.0 & 0.008 & -0.0 & -0.02 \\
0.223 & 0.0 & 222.728 & 0.0 & 0.0 & 10.716 & 0.0 & 0.0 & -2.813 & 0.634 & 1.0 & 0.0 & -1.517 & 0.0 & 2.473 \\
0.496 & 0.0 & 212.397 & 0.0 & 0.0 & 57.018 & 0.0 & 0.0 & -0.851 & 0.105 & 0.0 & 0.0 & -0.126 & 1.0 & -0.623 \\
0.003 & 1.0 & -1.538 & 0.0 & 0.0 & 1.409 & 0.0 & 0.0 & 0.014 & -0.002 & 0.0 & 0.0 & -0.001 & 0.0 & -0.014 \\
0.061 & 0.0 & 160.667 & 0.0 & 0.0 & -45.123 & 0.0 & 0.0 & -1.063 & 0.214 & 0.0 & 1.0 & -0.285 & 0.0 & 0.073 \\
0.002 & 0.0 & 0.684 & 0.0 & 0.0 & -0.603 & 1.0 & 0.0 & -0.007 & -0.002 & 0.0 & 0.0 & -0.006 & 0.0 & 0.013 \\
0.004 & 0.0 & 4.227 & 0.0 & 1.0 & -0.519 & 0.0 & 0.0 & -0.031 & 0.011 & 0.0 & 0.0 & -0.003 & 0.0 & 0.019 \\
0.329 & 0.0 & 32.612 & 0.0 & 0.0 & -49.867 & 0.0 & 1.0 & -1.014 & -0.336 & 0.0 & 0.0 & 0.011 & 0.0 & 0.01 \\
0.01 & 0.0 & -0.273 & 0.0 & 0.0 & -0.122 & 0.0 & 0.0 & -0.001 & -0.004 & 0.0 & 0.0 & -0.002 & 0.0 & -0.002
\end{bmatrix}$$

Оптимальная стратегия второго игрока:

$$\begin{bmatrix} 0.556 & 0.0 & 0.208 & 0.756 & 0.0 & 0.276 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции, округленное до пяти знаков:

$\alpha = 0.00987$

Результат

Значения целевой функции совпали, так что методы отработали корректно. Вычисленная цена игры:
$\varphi = 6.32273$

Приложение

```
import sys

import numpy as np
from funcs import print_matrix, print_matrix_latex

sys.stdout = open("./labs/output.txt", "w", encoding="utf-8")


def make_matrix(A: np.ndarray, b: np.ndarray, c: np.ndarray):
    return np.vstack(
        (
            np.hstack((np.reshape(b, (A.shape[0], 1)), A, np.eye(A.shape[0]))),
            np.hstack(((np.array([0])), c, np.zeros((A.shape[0])))),
        )
    )


def make_dual_matrix(A: np.ndarray, b: np.ndarray, c: np.ndarray):
    return np.vstack(
        (
            np.hstack((np.reshape(c, (A.T.shape[0], 1)), -A.T, np.eye(A.T.shape[0]))),
            np.hstack(((np.array([0])), -b, np.zeros((A.T.shape[0])))),
        )
    )


def simplex(simplex_matrix: np.ndarray, n: int, m: int):
    while True:
        index_of_element = simplex_matrix[-1, 1:].argmin()

        if simplex_matrix[-1, 1:][index_of_element] >= 0:
            break

        else:
            min_element = np.inf
            min_line = 0
            index_of_element += 1

            for line in range(simplex_matrix.shape[0] - 1):
                if (
                    simplex_matrix[line, index_of_element] > 0
                    and simplex_matrix[line, 0]
                    / simplex_matrix[
                        line,
                        index_of_element,
                    ]
                    < min_element
                ):
                    min_line = line
                    min_element = (
                        simplex_matrix[line, 0]
                        / simplex_matrix[
                            line,
                            index_of_element,
                        ]
                    )

            print(
                f"Индекс: {(min_line, int(index_of_element))}\n"
                # + f"focus func val: {simplex_matrix[-1, int(index_of_element)]:.3f}\n"
                + f"Разрешающий элемент: {simplex_matrix[min_line, int(index_of_element)]:.3f}",
            )
            print_matrix(simplex_matrix)

            simplex_matrix[min_line, :] = (
                simplex_matrix[min_line, :]
                / simplex_matrix[
                    min_line,
                    index_of_element,
                ]
            )

            for line in range(simplex_matrix.shape[0]):
                if line == min_line:
                    continue

                simplex_matrix[line, :] = (
                    simplex_matrix[line, :]
                    - simplex_matrix[min_line, :]
                    * simplex_matrix[line, index_of_element]
                )

    ans = np.zeros(m)
```

```
    for i in range(n - 1):
        for j in range(1, m + 1):
            if simplex_matrix[i, j] == 1:
                ans[j - 1] = simplex_matrix[i, 0]
                break

    print("result: ")
    print_matrix(simplex_matrix)

    return simplex_matrix[-1, 0], simplex_matrix, ans


def dual_simplex(simplex_matrix: np.ndarray, n: int, m: int):
    while True:
        index_of_element = simplex_matrix[:-1, 0].argmin()

        if simplex_matrix[:-1, 0][index_of_element] >= 0:
            break

        else:
            min_element = np.inf
            min_column = 0

            for column in range(1, simplex_matrix.shape[1]):
                if simplex_matrix[-1, column] == 0:
                    continue

                if (
                    simplex_matrix[index_of_element, column] < 0
                    and abs(
                        simplex_matrix[-1, column]
                        / simplex_matrix[index_of_element, column]
                    )
                    < min_element
                ):
                    min_column = column
                    min_element = abs(
                        simplex_matrix[-1, column]
                        / simplex_matrix[index_of_element, column]
                    )

            print(
                f"Индекс: {(int(index_of_element), min_column)}\n"
                # + f"focus func val: {simplex_matrix[:-1, 0][index_of_element]:.3f}\n"
                + f"Разрешающий элемент: {simplex_matrix[int(index_of_element), min_column]:.3f}",
            )
            print_matrix(simplex_matrix)

            simplex_matrix[index_of_element, :] /= simplex_matrix[
                index_of_element, min_column
            ]

            for line in range(simplex_matrix.shape[0]):
                if line == index_of_element:
                    continue

                simplex_matrix[line, :] -= (
                    simplex_matrix[index_of_element, :]
                    * simplex_matrix[line, min_column]
                )

    ans = np.zeros(m)

    for i in range(n - 1):
        for j in range(1, m + 1):
            if simplex_matrix[i, j] == 1:
                ans[j - 1] = simplex_matrix[i, 0]
                break

    print("result: ")
    print_matrix(simplex_matrix)

    return simplex_matrix[-1, 0], simplex_matrix, ans


A = np.array(
    [
        [0, -16, -41, 48, 19, 84, 69, 33],
        [82, 98, -50, 84, -52, -47, -95, -20],
        [65, 12, 61, -88, -18, -85, 34, -10],
        [72, 37, 9, 28, 33, -31, 85, 18],
        [32, -24, -70, -70, 53, 60, 22, 60],
        [12, -37, 53, 81, -34, 21, -29, -67],
    ]
)
```

```python
print_matrix(A)

tmp = []

for i in range(A.shape[0]):
    tmp.append(min(A[i, :]))

print("Нижняя цена игры:", max(tmp))

tmp.clear()

for i in range(A.shape[1]):
    tmp.append(max(A[:, i]))

print("Верхняя цена игры:", min(tmp), "\n")

beta = A.min()

A_cap: np.ndarray = A + np.abs(beta)

print_matrix(A_cap, header="A_cap")

print("beta: ", beta, "\n")

b = np.ones(A_cap.shape[0])
c = np.ones(A_cap.shape[1])

print("simplex", end="\n\n")

x1 = simplex(
    make_matrix(A_cap, b, -c),
    n=A_cap.shape[0],
    m=A_cap.shape[1],
)

print("dual simplex", end="\n\n")

x2 = dual_simplex(
    make_dual_matrix(A_cap, b, -c),
    n=A_cap.shape[1],
    m=A_cap.shape[0],
)

print_matrix(x1[2] / np.linalg.norm(x1[2]), "Оптимальная стратегия первого игрока")
print_matrix(x2[2] / np.linalg.norm(x2[2]), "Оптимальная стратегия второго игрока")

if np.abs(x1[0] - x2[0]) > 1e-15:
    raise ValueError("straight != dual")

print(f"alpha: {x1[0]:.5f}")
print(f"Цена игры: {1 / x1[0] - np.abs(beta):.5f}")
```