Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Дальневосточный государственный университет

А.Г. КОЛОБОВ, Л.А. МОЛЧАНОВА

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2007

ББК 22.311
К 61

Рецензент:
Т.В. Пак, к.ф.-м.н. (ИМКН ДВГУ);

Колобов А.Г., Молчанова Л.А.

К 61 **Лабораторные работы по Численным методам.** Учебно-методическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2007. - 36 с.

Лабораторные работы предназначены для студентов четвертого курса Института математики и компьютерных наук. Они поддерживают курс "Дополнительные главы математической физики"по следующим темам: методы коллокации, Ритца, Галеркина, конечных элементов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методы расщепления, приближенные методы решения интегральных уравнений. Пособие содержит варианты заданий и необходимый для их выполнения теоретический материал.

Для студентов математических специальностей.

К $\frac{1704020000}{180(03)-2007}$ ББК 22.311

Содержание

Известны различные подходы к конструированию разностных уравнений для задач математической физики. Особенно полно этот вопрос изучен для уравнений с коэффициентами, обладающими (вместе с решениями) достаточной гладкостью. В этом случае можно строить разностные схемы с высокой степенью аппроксимации. В ряде случаев представляется целесообразным получать приближенное решение с заданной точностью не за счет формального увеличения размерности подпространств (например, уменьшения шага сетки), а путем построения более точных аппроксимаций исходной задачи на основе априорной информации о гладкости решения. Такая точка зрения привела к удобным и достаточным универсальным методам построения разностных уравнений на основе вариационных методов Ритца, Галеркина, метода наименьших квадратов, метода конечных элементов, методов сплайн-коллокации. В этих методах приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения находится в виде аналитического выражения.

1 Приближенные методы решения задач математической физики

1.1 Методы коллокации, Ритца, Галеркина, конечных элементов.

Дано дифференциальное уравнение и краевые условия в виде

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$l_a u \equiv \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \tag{2}$$

$$l_b u \equiv \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, \tag{3}$$

где $p(x), q(x), f(x)$ - известные непрерывные функции, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - заданные постоянные, причем $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$.

Решение краевой задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x), \tag{4}$$

где C_i - неизвестные коэффициенты.

Система *базисных функций*

$$\varphi_o, \varphi_1, ..., \varphi_n, ... \tag{5}$$

на отрезке [a,b] удовлетворяет следующим условиям:

1) является ортогональной;

2) является полной, т.е. не существует другой отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям φ_i, $i = 0, 1, ...$

3) Конечная система базисных функций $\{\varphi_i\}, i = 0, 1, ..., n$ выбирается так, чтобы функция φ_o удовлетворяла неоднородным краевым условиям

$$l_a\varphi_o = \gamma_1, \quad l_b\varphi_o = \gamma_2,$$

а функции $\varphi_i, i = 1, 2, ..., n$ удовлетворяли однородным краевым условиям

$$l_a\varphi_i = l_b\varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим кратко методы решения краевой задачи.

1.1.1 Метод коллокации

В этом методе требуют, чтобы невязка

$$R(x, C_1, C_2, ..., C_n) = Lu - f(x) = L\varphi_o(x) - f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i L\varphi_i(x), \qquad (6)$$

обращалась в нуль на некоторой системе точек $x_1, x_2, ..., x_n$ отрезка [a, b], называемых *точками коллокации*, причем число таких точек должно равняться числу коэффициентов C_i в выражении (4). Тогда для определения $C_1, C_2, ..., C_n$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} R(x_1, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \Rightarrow & \sum\limits_{i=1}^{n} C_i L\varphi_i(x_1) = f(x_1) - L\varphi_0(x_1), \\ R(x_2, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \Rightarrow & \sum\limits_{i=1}^{n} C_i L\varphi_i(x_2) = f(x_2) - L\varphi_0(x_2), \\ ... & ... \\ R(x_n, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \Rightarrow & \sum\limits_{i=1}^{n} C_i L\varphi_i(x_n) = f(x_n) - L\varphi_0(x_n). \end{cases} \qquad (7)$$

Решая эту систему относительно коэффициентов C_i, находят решение в виде аналитического выражения (4).

<u>Пример 1</u>. Методом коллокации решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

<u>Решение</u>. В качестве базисных функций выберем полиномы $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_k(x) = (1 - x^{2k}), (k = 1, 2, ...)$, которые удовлетворяют краевым условиям.

За точки коллокации возьмем $x_0 = 0, x_1 = 0,5$.

Ограничиваясь тремя базисными функциями, положим

$$u = C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$R(x, C_1, C_2) = -2C_1 - 12C_2x^2 + (1 + x^2)\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big] + 1 =$$
$$= 1 - C_1(1 + x^4) + C_2(1 - 11x^2 - x^4 - x^6).$$

В точках коллокации имеем $R(x_0) = 0, R(x_1) = 0$. Отсюда, получаем для определения коэффициентов C_1 и C_2 линейную систему уравнений

$$1 - C_1 + C_2 = 0,$$
$$1 - \frac{17}{16}C_1 - \frac{117}{64}C_2 = 0,$$

решая которую находим $C_1 = 0,978$, $C_2 = -0,022$. Приближенное решение имеет вид

$$u \approx 0,978(1 - x^2) - 0,0216x^2(1 - x^4) = 0,9564 - 0,978x^2 + 0,0216x^4.$$

1.1.2 Метод Ритца

В уравнении (1) предполагается, что оператор L является симметричным $L = L^*$ и положительно-определенным линейным оператором в гильбертовом пространстве H. Тогда краевая задача (1) равносильная задаче о минимизации функционала

$$J[u] = (Lu, u) - 2(f, u). \tag{8}$$

Для краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

этот функционал имеет вид

$$J[u] = \int_0^1 \Big[p(\frac{du}{dx})^2 - qu^2 + 2fu\Big]dx. \tag{10}$$

В общем случае линейное дифференциальное уравнение

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = F(x)$$

можно записать в самосопряженном виде (9), если ввести замену переменных

$$p(x) = e^{\int\limits_0^x P(x)dx} > 0, \quad q(x) = p(x)Q(x), \quad f(x) = p(x)F(x).$$

Решение задачи (1)-(3) ищем в виде (4). Подставляя выражение (4) в формулу (10), получаем

$$J[u] = \int\limits_a^b \Big\{ p(x)\Big[\varphi_0'(x) + \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i'(x)\Big]^2 - q(x)\Big[\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(x)\Big]^2 +$$

$$+2f(x)\Big[\varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(x)\Big]\Big\}dx \equiv \Phi(C_1, C_2, ..., C_n),$$

где $\Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$ - квадратичная функция переменных $C_1, C_2, ..., C_n$. Для того, чтобы дифференцируемая функция $\Phi(C_1, C_2, ..., C_n)$ при некоторых значениях $C_1, ..., C_n$ имела экстремум, необходимо соблюдение для этих значений следующий условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_i} = \int\limits_a^b \Big\{ 2p(x)\Big[\varphi_0'(x) + \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j'(x)\Big]\varphi_i'(x) -$$

$$-2q(x)\Big[\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(x)\Big]\varphi_i(x) + 2f(x)\varphi_i(x)\Big\}.$$

Система (11) является линейной относительно коэффициентов C_1, C_2, $\cdots$, C_n, причем число уравнений равно числу неизвестных. Решив ее, найдем коэффициенты $C_i (i = 1, ..., n)$, что позволяет затем записать решение в виде (4).

Пример 2. Методом Ритца решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Решение. В качестве базисных функций выберем полиномы $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_k(x) = (1 - x^{2k})$ $(k = 1, 2, ...)$, которые удовлетворяют краевым условиям $\varphi_k(\pm 1) = 0$.

Ограничиваясь тремя базисными функциями, ищем решение в виде суммы

$$u = C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4).$$

Данное уравнение, где

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 1 + x^2, \quad f(x) = -1,$$

является самосопряженным. Составляем для него соответствующий функционал

$$J[u] = \int_{-1}^{1} [u'^2 - (1 + x^2)u^2 - 2u]dx.$$

Заменяя u его выражением $u = C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)$, получаем

$$J[u] = \int_{-1}^{1} \Big\{ \big(2C_1x + 4C_2x^3\big)^2 - (1 + x^2)\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big]^2 -$$

$$-2\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big]\Big\}dx.$$

Частные производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial C_1}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial C_2}$ можно найти дифференцированием интеграла $J[u]$ по параметрам C_1 и C_2:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = \int_{-1}^{1} \Big\{ 4x(2C_1x + 4C_2x^3) - (1 + x^2)2(1 - x^2)\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big] -$$

$$-2(1 - x^2)\Big\}dx = 8(\frac{38}{105}C_1 + \frac{4}{9}C_2 - \frac{1}{3});$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_2} = \int_{-1}^{1} \Big\{ 8x^2(2C_1x + 4C_2x^3) - 2(1 + x^2)(1 - x^4)\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big] -$$

$$-2(1 - x^4)\Big\}dx = 8(\frac{4}{9}C_1 + \frac{2488}{3645}C_2 - \frac{2}{5}).$$

Приравнивая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{38}{105}C_1 + \dfrac{4}{9}C_2 & = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{4}{9}C_1 + \dfrac{2488}{3645}C_2 & = \dfrac{2}{5}, \end{cases}$$

откуда находим, что $C_1 = 0,988, C_2 = -0,054$. Подставляя найденные значения в формулу (4), получаем приближенное выражение для искомого решения

$$u = 0,934 - 0,988x^2 + 0,054x^4.$$

1.1.3 Метод Галеркина

В методе Галеркина не требуется самосопряженность оператора L. Решение ищется в виде (4) и согласно этому методу невязка $R = Lu_n - f$ должна быть ортогональна ко всем базисным функциям.

Запишем условие ортогональности

$$(R, \varphi_i) = 0 \Rightarrow \int\limits_a^b \varphi_i R(x, C_1, ..., C_n)dx = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$R = L\Big(\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(x)\Big) - f.$$

Тогда для определения коэффициентов C_i имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j A_{ij} = d_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{12}$$

где

$$A_{ij} = \int\limits_a^b \varphi_i L\varphi_j dx, \quad d_i = \int\limits_a^b \varphi_i \Big[f(x) - L\varphi_0\Big]dx.$$

Пример 3. Методом Галеркина решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1 + x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Решение. В качестве базисных функций выберем полиномы $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_k(x) = (1 - x^{2k})$ $(k = 1, 2, ...)$, которые удовлетворяют краевым условиям $\varphi_i(\pm 1) = 0$.

Ограничиваясь тремя базисными функциями, ищем решение в виде суммы

$$u = C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4).$$

Подставляя u в левую часть дифференциального уравнения, получаем невязку

$$R(x, C_1, C_2) = C_1(-2) + C_2(-12x^2) + (1 + x^2)\Big[C_1(1 - x^2) + C_2(1 - x^4)\Big] + 1.$$

Условие ортогональности функции $R(x, C_1, C_2)$ к функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ приводят к системе

$$\int\limits_{-1}^{1}(1 - x^2)R(x, C_1, C_2)dx = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1}(1 - x^4)R(x, C_1, C_2)dx = 0.$$

Подставляя вместо $R(x, C_1, C_2)$ его значение, после соответствующего интегрирования получаем систему

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big[1 - x^2 + C_1(x^6 - x^4 + x^2 - 1) + C_2(x^8 + 10x^4 - 12x^2 + 1)\Big]dx =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{152}{105}C_1 - \frac{16}{9}C_2 = 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\Big[1 - x^4 + C_1(x^8 - 1) + C_2(x^{10} + x^8 + 10x^6 - 2x^4 - 11x^2 + 1)\Big]dx =$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{16}{9}C_1 - \frac{9952}{3465}C_2 = 0.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{152}{105}C_1 + \dfrac{16}{9}C_2 & = \dfrac{4}{3}, \\[2mm] \dfrac{16}{9}C_1 + \dfrac{9952}{3465}C_2 & = \dfrac{8}{5}, \end{cases}$$

находим $C_1 = 0,988$, $C_2 = -0,0543$ и следовательно,

$$u = 0,988(1 - x^2) - 0,0543(1 - x^4) = 0,9334 - 0,988x^2 + 0,0543x^4.$$

1.1.4 Метод конечных элементов

Основной идеей новых методов построения разностных схем на основе вариационных принципов является использование функций с конечными носителями, т.е. функций, которые в сравнительно небольшой (порядка шага сетки) окрестности отличны от нуля, а вне ее тождественно равны нулю. Решение искомой задачи (1) ищется в виде линейной комбинации функций с конечным носителем при неизвестных коэффициентах, которые выбираются на основе минимизации того или иного функционала, связанного с вариационной постановкой задачи.

Дано дифференциальное уравнение и краевые условия в виде

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{13}$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{14}$$

Введем на отрезке [a,b] равномерную сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, состоящую из n внутренних точек (узлов) $x_i = a + ih$ $(i = 1, 2, ..., n)$ и двух крайних узлов - $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$ [2].

Применим метод Галеркина для решения задачи (13) - (14), в котором функции $\varphi_i(x)$ задаются равенствами

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{h}, & \text{если } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{если } x \neq [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{15}$$

Данные функции линейно независимы, ортогональны и образуют полную систему в пространстве $L_2[a, b]$. Это дает основание для их законного применения в качестве базисных функций метода Галеркина.

Приближенное решение ищем в виде

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x). \tag{16}$$

Для подсчета коэффициентов C_i согласно методу Галеркина, нужно составить линейную алгебраическую систему (12). Ее правые части в таком случае суть

$$d_i = \int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi_i(x)dx =$$

$$= \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\frac{x - x_{i-1}}{h}dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(-\frac{x - x_{i+1}}{h})dx =$$

$$= \frac{1}{h}\Bigg[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x - x_{i+1})dx \Bigg]. \tag{17}$$

Так как при краевых условиях (14) используются n базисных функций с φ_1 по φ_n, и все они в точках a и b равны нулю, то формула для вычисления коэффициентов A_{ij} линейной алгебраической системы уравнений имеет вид

$$A_{ij} = (L\varphi_j, \varphi_i) =$$

$$= -\int\limits_a^b \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx + \int\limits_a^b p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)dx + \int\limits_a^b q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \Bigg[-\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x) \Bigg] dx. \tag{18}$$

В силу отмеченного выше неравенства нулю на элементарном промежутке лишь соседних по индексу финитных функций и их производных, можно считать отличными от нуля фигурирующие в выражении A_{ij} произведения $\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)$, $\varphi_j'(x)\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)\varphi_i(x)$ только в тех случаях, когда $i-1 \leq j \leq i+1$. Это означает, что

$$A_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1, \tag{19}$$

т.е. матрица $A = (A_{ij})$ системы (12) является треугольной матрицей. Это позволяет применять для ее решения метод прогонки.

Конкретизируем формулы для вычисления ненулевых элементов матрицы A. Полагая в (18) $j = i$, с помощью выражения (15) получаем формулы для вычисления диагональных элементов:

$$A_{ii} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-\frac{1}{h^2} + p(x)\frac{1}{h}\frac{x-x_{i-1}}{h} + q(x)(\frac{x-x_{i-1}}{h})^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x)}{h}\frac{x-x_{i+1}}{h} + q(x)(\frac{x-x_{i+1}}{h})^2\right]dx =$$

$$= -\frac{2}{h} + \frac{1}{h^2}\Big[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x-x_{i-1})dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1})^2dx+$$

$$+\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x-x_{i+1})dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x-x_{i+1})^2dx\Big]. \qquad (20)$$

При $j{=}i{+}1$ из (18) находим выражение элементов правой побочной диагонали матрицы A:

$$A_{i,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[\frac{1}{h^2} + p(x)\frac{1}{h}(-\frac{x-x_{i+1}}{h}) + q(x)(-\frac{x-x_{i+1}}{h})\frac{x-x_i}{h}\Big]dx =$$

$$= \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}\Big[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)(x-x_{i+1})dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x-x_i)(x-x_{i+1})dx\Big], \qquad (21)$$

а при $j{=}i{-}1$ — левой:

$$A_{i,i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[\frac{1}{h^2} + p(x)(-\frac{1}{h})\frac{x-x_{i-1}}{h} + q(x)(-\frac{x-x_i}{h})\frac{x-x_{i-1}}{h}\Big]dx =$$

$$= \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}\Big[\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)(x-x_{i-1})dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x-x_{i-1}))x-x_idx\Big]. \qquad (22)$$

Замечание. При неоднородных краевых условиях первого рода

$$u(a) = \gamma_1, \quad u(b) = \gamma_2 \qquad (23)$$

можно свести задачу (13), (23) к задаче

$$Lw = F(x),$$

где

$$F(x) = f(x) - p(x)v'(x) - q(x)v(x), \quad v(x) = \gamma_1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{b-a}(x-a),$$

с однородными условиями

$$w(a) = 0, \quad w(b) = 0.$$

Найдя методом конечных элементов приближенное решение

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x),$$

получаем

$$u(x) \approx u_n(x) = w_n(x) + v(x).$$

Пример 4. Методом конечных элементов решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1+x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Решение. Вводим на отрезке [-1,1] равномерную сетку $x_i = ih$ с шагом $h = 0,5$.

Ограничиваясь тремя базисными функциями, ищем решение в виде суммы

$$u_2(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x),$$

где φ_1 и φ_2 - соответствующие функции-"крышки"(15):

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2(x+1), & x \in [-1; -0,5]; \\ -2x, & x \in [-0,5; 0], \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 2(x+0,5), & x \in [-0,5; 0]; \\ 2(0,5-x), & x \in [0; 0,5], \end{cases} \qquad \varphi_3(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 0,5]; \\ 2(1-x), & x \in [0,5; 1]. \end{cases}$$

Для получения коэффициентов C_1, C_2, C_3 составляем линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned} A_{11}C_1 + A_{12}C_2 + A_{13}C_3 &= d_1, \\ A_{21}C_1 + A_{22}C_2 + A_{23}C_3 &= d_2, \\ A_{31}C_1 + A_{32}C_2 + A_{33}C_3 &= d_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Обращаясь к формулам (20) - (22), (17), имеем:

$$A_{11} = -4 + 4\Big[\int\limits_{-1}^{-0,5}(1+x^2)(1+x)^2dx + \int\limits_{-0,5}^{0}(1+x^2)x^2dx\Big] = -3,575;$$

$$A_{22} = -4 + 4\left[\int\limits_{-0,5}^{0}(1+x^2)(0,5+x)^2dx + \int\limits_{0}^{0,5}(1+x^2)(x-0,5)^2dx\right] = -3,658;$$

$$A_{33} = -4 + 4\left[\int\limits_{0}^{0,5}(1+x^2)x^2dx + \int\limits_{0,5}^{1}(1+x^2)(x-1)^2dx\right] = -3,575;$$

$$A_{12} = 2 - 4\left[\int\limits_{-0,5}^{0}(1+x^2)x(x+0,5)dx\right] = 2,09;$$

$$A_{23} = 2 - 4\left[\int\limits_{0}^{0,5}(1+x^2)x(x-0,5)dx\right] = 2,09;$$

$$A_{21} = 2 - 4\left[\int\limits_{-0,5}^{0}(1+x^2)x(x+0,5)dx\right] = 2,09;$$

$$A_{32} = 2 - 4\left[\int\limits^{0,5}(1+x^2)x(x-0,5)dx\right] = 2,09;$$

$$d_1 = -2\left[\int\limits_{-1}^{-0,5}(x+1)dx - \int\limits_{-0,5}^{0}xdx\right] = -0,5;$$

$$d_2 = -2\left[\int\limits_{-0,5}^{0}(x+0,5)dx - \int\limits_{0}^{0,5}(x-0,5)dx\right] = -0,5;$$

$$d_3 = -2\left[\int\limits_{0}^{0,5}xdx - \int\limits_{0,5}^{1}(x-1)dx\right] = -0,5;$$

Подставляем эти числа в систему (24):

$$\left[\begin{array}{ccc} -3,575 & 2,9 & 0 \\ 2,09 & -3,658 & 2,09 \\ 0 & 2,09 & -3,575 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{c} -0,5 \\ -0,5 \\ -0,5 \end{array}\right].$$

Решая эту систему, находим

$$C_1 = 0,662, \quad C_2 = 0,893, \quad C_3 = C_1.$$

Таким образом, приближенное решение $u_3(x)$ есть

$$u_3(x) = 0,662(\varphi_1(x) + \varphi_3(x)) + 0,893\varphi_2(x).$$

1.2 Методы сплайн-коллокации.

Пусть требуется найти решение краевой задачи

$$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$l_a u \equiv \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \ l_b u \equiv \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2, \tag{2}$$

1.2.1 I. Использование кубического сплайна

Введем на отрезке [a,b] неравномерную сетку Δ : $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ и будем искать приближенное решение в виде кубического сплайна $S(x)$ класса C^2 с узлами на сетке Δ.

Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял уравнению (1) в точках $x_k \in [a, b]$, $k = 0, ..., n$ (*условия коллокации*), и краевым условиям (2):

$$LS(x_k) = S''(x_k) + p(x_k)S'(x_k) + q(x_k)S(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, ..., n \tag{3}$$

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2. \tag{4}$$

Пусть $p(x) \equiv 0$. Обозначим $S(x_k) = v_k$, $S''(x_k) = M_k$. Сплайн $S(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ определяется при этом формулой

$$S(x) = v_k(1-t) + v_{k+1}t - \frac{h_k^2}{6} t(1-t)\Big[(2-t)M_k + (1+t)M_{k+1}\Big],$$

где $t = (x - x_k)/h_k, h_k = x_{k+1} - x_k$.

Отсюда

$$S'(x) = \frac{v_{k+1} - v_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}\Big[(2 - 6t + 3t^2)M_k + (1 - 3t^2)M_{k+1}\Big]. \tag{5}$$

Неизвестные моменты M_k во внутренних узлах сетки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\mu_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\mu_k)M_{k+1} = \\ = \frac{6}{h_k + h_{k-1}}\Big(\frac{v_{k+1} - v_k}{h_k} - \frac{v_k - v_{k-1}}{h_{k-1}}\Big), \quad k = \overline{1, n},\end{gathered} \tag{6}$$

где $\mu_k = h_{k-1}/(h_k + h_{k-1})$.

Из (3) имеем

$$M_k + q_k v_k = f_k, \quad k = 0...n.$$

Подставим $M_k = f_k - q_k v_k$ в соотношение (6) и получим:

$$\begin{gathered}(1-\mu_k)\Big(1 + \frac{h_{k-1}^2}{6} q_{k-1}\Big)v_{k-1} - \Big(1 - \frac{h_{k-1}h_k}{3} q_k\Big)v_k + \mu_k\Big(1 + \frac{h_k^2}{6} q_{i+1}\Big)v_{k+1} = \\ = \frac{h_{k-1}h_k}{6}\Big(\mu_k f_{k-1} + 2f_k + (1-\mu_k)f_{k+1}\Big), \quad k = \overline{1, n-1}.\end{gathered} \tag{7}$$

Так как

$$S_o = v_o, \quad S'_o = \frac{v_1 - v_o}{h_o} - \frac{h_o}{6}\Big[2(f_o - q_o v_o) + f_1 - q_1 v_1\Big],$$

$$S_n = v_n, \quad S'_n = \frac{v_n - v_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}\Big[2(f_{n-1} - q_{n-1}v_{n-1}) + f_n - q_n v_n\Big],$$

то подставив в краевые условия (4), будем иметь

$$v_o\Big[\alpha_1 h_o - \beta_1(1-\frac{1}{3}q_o h_o^2)\Big] + v_1\beta_1(1+\frac{1}{6}q_1 h_o^2) = \gamma_1 h_o + \frac{1}{6}\beta_1 h_o^2(2f_o + f_1), \tag{8}$$

$$v_{n-1}\beta_2(-1-\frac{1}{6}h_{n-1}^2 q_{n-1}) + v_n\Big[\alpha_2 h_{n-1} + \beta_2(1-\frac{1}{3}h_{n-1}^2 q_n\Big] =$$
$$= \gamma_2 h_{n-1} - \frac{1}{6}\beta_2 h_{n-1}^2(f_{n-1} + 2f_n). \tag{9}$$

Уравнения (7)-(9) образуют разностную схему для решения задачи.

Методом прогонки из системы (7)-(9) вычисляются $v_k, k=\overline{0,n}$. Определяют затем величины M_k и получают приближенное решение задачи (1)-(2) в виде кубического сплайна $S(x)$.

Пример 1. Методом конечных элементов решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1+x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Решение. Вводим на отрезке [-1,1] равномерную сетку $x_k = kh$ с шагом $h = 0,5$.

Тогда систему линейных алгебраических уравнений (7) - (9) можно записать в следующем виде:

$$v_0 = 0,$$
$$(1+\frac{h^2}{6}q_{k-1})v_{k-1} + (2\frac{h^2}{3} - q_k - 2)v_k + (1+\frac{h^2}{6}q_{k+1}) =$$
$$= \frac{h^2}{6}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}), \qquad k = 1,2,3,$$
$$v_4 = 0,$$

или во внутренних узлах имеем:

$$(\frac{2h^2}{3}\cdot 1,25 - 2)v_1 + (1+\frac{h^2}{6}\cdot 1)v_2 = -6\cdot\frac{h^2}{6},$$
$$(1+\frac{h^2}{6}\cdot 1,25)v_1 + (\frac{2h^2}{3}\cdot 1 - 2)v_2 + (1+\frac{h^2}{6}\cdot 1,25)v_3 = -6\cdot\frac{h^2}{6},$$
$$(1+\frac{h^2}{6}\cdot 1)v_2 + (\frac{2h^2}{3}\cdot 1,25 - 2)v_3 = -6\cdot\frac{h^2}{6}.$$

Решая данную систему методом прогонки, получаем: $v_1 = v_3 = 0,6577$, $v_2 = 0,8912$.

1.2.2 II. Использование B-сплайнов

Решение задачи (1)-(2) ищется в виде разложения по базису из нормализованных кубических B-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} b_i B_i(x). \tag{10}$$

Чтобы все базисные функции в (10) были определены, сетка Δ дополнятся тремя узлами в начале и в конце построенной сетки. Они выбираются так, чтобы выполнялись условия

$$h_{-j} = h_{j-1}, \quad h_{n-1+j} = h_{n-j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (3), получаем

$$b_{k-1} LB_{k-1}(x_k) + b_k LB_k(x_k) + b_{k+1} LB_{k+1}(x_k) = f_k, \quad k = 0, ..., n.$$

Если учесть выражения для узловых значений B-сплайна и его производных, то эти уравнения можно записать в виде

$$b_{k-1} A_k + b_k C_k + b_{k+1} D_k = F_k, \quad k = 0...n, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{x_{k+1} - x_{k-2}} \Big(1 - \frac{1}{2} p_k h_k + \frac{1}{6} q_k h_k^2 \Big), \\ D_k &= \frac{1}{x_{k+2} - x_{k-1}} \Big(1 + \frac{1}{2} p_k h_{k-1} + \frac{1}{6} q_k h_{k-1}^2 \Big), \\ C_k &= -A_k - D_k + \frac{1}{6} q_k (h_k + h_{k-1}); \quad F_k = \frac{1}{6} f_k (h_k + h_{k-1}). \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнений (4) с учетом условий (11) получаем

$$\begin{aligned} b_{-1} A_{-1} + b_0 C_{-1} + b_1 D_{-1} &= F_{-1}, \\ b_{n-1} A_{n+1} + b_n C_{n+1} + b_{n+1} D_{n+1} &= F_{n+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \alpha_1 h_o - 3\beta_1, & A_{n+1} &= \alpha_2 h_{n-1} - 3\beta_2, \\ C_{-1} &= 2\alpha_1 (h_o + h_1), & C_{n+1} &= 2\alpha_2 (h_{n-2} + h_{n+1}), \\ D_{-1} &= \alpha_1 h_o + 3\beta_1, & D_{n+1} &= \alpha_2 h_{n-1} + 3\beta_2, \\ F_{-1} &= 2\gamma_1 (2h_o + h_1), & F_{n+1} &= 2\gamma_2 (2h_{n-1} + h_{n-2}). \end{aligned}$$

Уравнения (12), (14) образуют систему $n+3$ уравнений относительно $n+3$ неизвестных b_k. Исключив с помощью уравнений (14) неизвестные b_1 и b_{n+1} из (12), приходим к системе с трехдиагональной матрицей

$$\begin{gathered} b_o\tilde{C}_o + b_1\tilde{D}_o = \tilde{F}_o \\ b_{k-1}A_k + b_kC_k + b_{k+1}D_k = F_k, \quad k=\overline{1,n-1}, \\ b_{n-1}\tilde{A}_n + b_n\tilde{C}_n = \tilde{F}_n, \end{gathered} \tag{15}$$

где

$\tilde{C}_o = C_o - C_{-1}A_o/A_{-1}, \quad \tilde{A}_n = A_n - A_{n+1}D_n/D_{n+1},$

$\tilde{D}_o = D_o - D_{-1}A_o/A_{-1}, \quad \tilde{C}_n = C_n - C_{n+1}D_n/D_{n+1},$

$\tilde{F}_o = F_o - F_{-1}A_o/A_{-1}, \quad \tilde{F}_n = F_n - F_{n+1}D_n/D_{n+1}.$

В итоге реализация метода сплайн-коллокации сводится к вычислению коэффициентов $b_0, ..., b_n$ из системы (15) (с помощью метода прогонки) и определению b_{-1}, b_{n+1} из уравнений (14).

Пример 2. С использованием B-сплайнов решить краевую задачу [1].

$$u'' + (1+x^2)u + 1 = 0; \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Решение. Вводим на отрезке [-1,1] равномерную сетку $x_k = -1 + (k-1)h$ с шагом $h = 0,5$ и дополняем ее двумя узлами в начале и конце построенной сетки.

Ищем решение в виде разложения по базису из нормализованных кубических B-сплайнов:

$$S(x) = b_{-1}B_{-1}(x) + b_0B_0(x) + b_1B_1(x) + b_2B_2(x) + b_3B_3(x) + b_4B_4(x) + b_5B_5(x).$$

Находим по формулам (13) и (16) коэффициенты системы уравнений (15):

$A_k = D_k = \dfrac{1-h^2(1+x_k^2/6)}{3h}; \quad C_k = -2A_k + h(1+x_k^2)/3; \quad F_k = \dfrac{-2h}{6}, \quad k=\overline{0,4};$

$A_{-1} = D_{-1} = h,\ C_{-1} = 4h,\ F_{-1} = 0;$

$A_5 = D_5 = h,\ C_5 = 4h,\ F_5 = 0;$

$\tilde{C}_0 = C_0 - 4hA_0/h,\ \tilde{D}_0 = D_0 - hA_0/h,\ \tilde{F}_0 = F_0 - 0\cdot A_0/h,$

$\tilde{A}_4 = A_4 - hD_4/h,\ \tilde{C}_4 = C_4 - 4hD_4/h,\ \tilde{F}_4 = F_4 - 0\cdot D_4/h.$

Система имеет вид:

$-4b_0 = -1/6,$

$0,7014b_0 - 1,1945b_1 + 0,7014b_2 = -1/6,$

$0,6944b_1 - 1,2222b_2 + 0,69444b_3 = -1/6,$

$0,7014b_2 - 1,1945b_3 + 0,7014b_4 = -1/6,$

$-4b_4 = -1/6.$

Решив эту систему, получаем $b_0{=}b_4{=}0,0417; b_1{=}b_3{=}0,7336; b_2 = 0,9700$. Из уравнений (14) находим $b_{-1} = b_5 = -0,9002$.

Тогда
$S(0) = b_1B_1(-0,5) + b_2B(0) + b_3(0,5) = 2 * 0,7336/6 + 0,9700 * 2/3 = 0,892;$
$S(0,5){=}b_2B(0){+}b_3B(0,5){+}b_4B(1){=}(0,97{+}0,0417)/6{+}0,7336 * 2/3{=}0,6577;$
$S(1) = b_3B(0,5){+}b_4B(1){+}b_5B(1,5) = 0,7336/6{+}0,0417{*}2/3{-}0,9002/6 = 0.$

2 Методы расщепления. Начально-краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности.

На плоскости $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим область G с границей Γ [11, 12]. Будем искать решение задачи теплопроводности в области $\bar{G} = G + \Gamma$ для всех $0 \le t \le T$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, определенную в цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T] = \{(x,t) : x \in \bar{G},\ 0 \le t \le T\}$, удовлетворяющую в $Q_T = G \times (0,T] = \{(x,t) : x \in G, 0 < t \le T\}$ уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad Lu = (L_1 + L_2)u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},\ \alpha = 1,2, \tag{1}$$

краевым условиям первого рода на границе Γ области G

$$u = \mu(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

и начальному условию при $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}. \tag{3}$$

Предположим, что $\bar{G}$ - прямоугольник со сторонами l_1 и l_2:

$$\bar{G} = \{(x_1,x_2) :\ 0 \le x_1 \le l_1,\ 0 \le x_2 \le l_2\}.$$

Введем в $\bar{G}$ прямоугольную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i_1h_1, i_2h_2),\ i_\alpha = 0,1,...,N_\alpha, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha, \alpha = 1,2\}$$

с границей

$$\gamma_h = \{x_i = (i_1h_1, i_2h_2),\ i_1 = 0, N_1, 0 < i_2 < N_2; i_2 = 0, N_2, 0 < i_1 < N_1).$$

Оператора L_α заменим разностным оператором Λ_α:

$$\Lambda_\alpha = v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Используя заданное точное решение, построить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности и затем решить одним из указанных ниже методов. Пространственные переменные меняются на отрезке [0,1]. Шаги по пространству берутся равным 0,1.

Варианты точных решений:
1. $u = te^{x+y}$;
2. $u = t \sin \pi x \sin \pi y$;
3. $u = t + x^2 + y^2$;
4. $u = t + 0,25(x^2 + y^2)$.

3 Решение интегрального уравнения Фредгольма 2 рода

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int K(x,s)u(s)ds = f(x). \tag{1}$$

Для нахождения приближенного решения этого уравнения будем использовать три метода: метод замены ядра на вырожденное, метод Галеркина и метод Ритца.

3.1 Метод замены ядра на вырожденное

Ядро $K(x,s)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s), \tag{2}$$

где функции $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(s)$ $(i = \overline{1,n})$ линейно независимы на отрезке [a,b].

Предлагаемый метод основан на том, что для интегрального уравнения (1) с вырожденным ядром может быть получено точное решение. Заменим приближенно ядро $K(x,s)$ вырожденным

$$K(x,s) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s) \tag{3}$$

и будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i\alpha_i(x), \tag{4}$$

где

$$C_i = \int\limits_a^b \beta_i(s) y(s) ds. \quad (5)$$

Подставляя выражение (4) в (5), получим

$$C_i = \int\limits_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int\limits_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} C_j \alpha_j(s) ds \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Вводя обозначения

$$f_i = \int\limits_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad A_{ij} = \int\limits_a^b \alpha_j(s) \beta_i(s) ds, \quad (6)$$

будем иметь

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j A_{ij} = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно C_i. Решив эту систему, записываем приближенное решение уравнения (1) в виде (4). В качестве вырожденного ядра можно взять отрезок ряда Тейлора или ряда Фурье для функции $K(x, s)$.

Пример 1. Методом замены ядра на вырожденное найти решение уравнения

$$u(x) + \int\limits_0^1 x(e^{xs} - 1) u(x) ds = e^x - x.$$

Решение. Ядро уравнения $K(x, s) = x(e^{xs} - 1)$ аппроксимируем суммой трех членов разложения $K(x, s)$ в ряд Тейлора, т.е. положим

$$x(e^{xs} - 1) \approx x^2 s + \frac{x^3 s^2}{2} + \frac{x^4 s^3}{6}. \quad (8)$$

Тогда решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x) = e^x - x + C_1 x^2 + C_2 x^3 + C_3 x^4.$$

Обозначая $\alpha_1 = x^2$, $\alpha_2 = x^3$, $\alpha_3 = x^4$, $\beta_1(s) = -s$, $\beta_2(s) = -s^2/2$, $\beta_3(s) = -s^3/6$, $f(x) = e^x - x$, находим по формулам (6) коэффициенты системы

(7):

$f_1 = -\int\limits_0^1 s(e^s-1)ds = -\frac{2}{3}, \qquad f_2 = -\int\limits_0^1 s^2(e^s-1)/2ds = \frac{9}{8} - e/2,$

$f_3 = -\int\limits_0^1 s^3(e^s-1)/6ds = e/3 - \frac{29}{30},$

$A_{11} = -\int\limits_0^1 s^3 ds = \frac{-1}{4},\ A_{12} = -\int\limits_0^1 s^4 ds = \frac{-1}{5},\ A_{13} = -\int\limits_0^1 s^5 ds = \frac{-1}{6},$

$A_{21} = \int\limits_0^1 \frac{-s^4}{2} ds = \frac{-1}{10},\ A_{22} = \int\limits_0^1 \frac{-s^5}{2} ds = \frac{-1}{12},\ A_{23} = \int\limits_0^1 \frac{-s^6}{2} ds = \frac{-1}{14},$

$A_{31} = \int\limits_0^1 \frac{-s^5}{6} ds = \frac{-1}{36},\ A_{32} = \int\limits_0^1 \frac{-s^6}{6} ds = \frac{-1}{42},\ A_{33} = \int\limits_0^1 \frac{-s^7}{6} ds = \frac{-1}{48}.$

Таким образом, имеем систему

$$C_1 = \frac{-1}{4} - \frac{1}{5}C_2 - \frac{1}{6}C_3 - \frac{2}{3},$$

$$C_2 = \frac{-1}{10} - \frac{1}{12}C_2 - \frac{1}{14}C_3 + \frac{9}{8} - \frac{e}{2},$$

$$C_3 = \frac{-1}{36} - \frac{1}{42}C_2 - \frac{1}{48}C_3 + \frac{e}{3} - \frac{29}{302}.$$

Ее можно преобразовать к виду:

$$\frac{5}{4}C_1 + \frac{1}{5}C_2 + \frac{1}{6}C_3 = -\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{5}C_1 + \frac{13}{6}C_2 + \frac{1}{7}C_3 = \frac{9}{4} - e,$$

$$\frac{1}{6}C_1 + \frac{1}{7}C_2 + \frac{48}{8}C_3 = 2e - \frac{29}{5}.$$

Решая ее, получим следующий результат: $C_1 = -0,5010$, $C_2 = -0,1671$, $C_3 = -0,0422$. Следовательно, приближенное решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y_3(x) = e^x - x - 0,5010x^2 - 0,1671x^3 - 0,0422x^4.$$

Точное решение интегрального уравнения: $y(x) \equiv 1$. Из найденного приближенного решения при $x = 0; 0,5; 1$ имеем

$$z(0) = 1,0000, \quad z(0,5) = 1,0000, \quad z(1) = 1,0080,$$

т.е. расхождение с точным решением всего 0,008.

3.2 Метод Бубнова - Галеркина

Приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,s)u(s)ds$$

по методу Бубнова - Галеркина ищется так. Выбираем систему линейно-независимых функций $\{\varphi_n(x)\}$, полную в $L_2(a,b)$ и ищем приближенное решение $u_n(x)$ в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x).$$

Подставляя $u_n(x)$ в интегральное уравнение, получаем невязку в следующем виде

$$R(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(s) ds.$$

Коэффициенты C_k находятся из условия ортогональности невязки R ко всем базисным функциям:

$$(R, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(\varphi_k(x), \varphi_i(x)) - (f(x), \varphi_i(x)) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{j=1}^{n} C_j(\varphi_j(s), \varphi_i(x)) ds = 0.$$

Коэффициенты C_k $(k = 1, 2, ..., n)$ определяются из следующей линейной системы

$$C_k = \Big(f(x), \varphi_k(x)\Big) + \lambda \Big(\int\limits_a^b K(x,s) (\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(s), \varphi_k(x)) \Big) = 0,$$

$$(k = 1, 2, ..., n).$$

Пример 2. Методом Бубнова-Галеркина найти решение уравнения

$$u(x) - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} u(s) ds = 1 - x^2. \qquad (9)$$

Решение. В качестве полной системы функций на отрезке [0,1] выберем систему $\varphi_i(x) = x^{2i}$. Приближенное решение $u_2(x)$ уравнения (1) будем искать в виде

$$y_2(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

Подставляя $u_2(x)$ вместо $u(x)$ в уравнение (9), будем иметь невязку

$$R(x; C_1, C_2, C_3) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 - (1 - x^2) + \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}\Big[C_1 + C_2 s + C_3 s^2\Big] ds.$$

Умножая ее последовательно на 1, x, x^2 и интегрируя по x в пределах от 0 до 1 и приравнивая к нулю, найдем:

$$\int\limits_0^1 1 \cdot R(x; C_1, C_2, C_3) dx = 0 = -\int\limits_0^1 (1 - x^2) dx + C_1\left[1 + \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} ds\Big) dx\right] +$$
$$+C_2\left[\frac{1}{2} + \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s ds\Big) dx\right] + C_3\left[\frac{1}{3} + \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s^2 ds\Big) dx\right],$$
$$\int\limits_0^1 x R(x; C_1, C_2, C_3) dx = 0 = -\int\limits_0^1 (1 - x^2) x dx + C_1\left[\frac{1}{2} + \int\limits_0^1 x\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} ds\Big) dx\right] +$$
$$+C_2\left[\frac{1}{3} + \int\limits_0^1 x\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s ds\Big) dx\right] + C_3\left[\frac{1}{4} + \int\limits_0^1 x\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s^2 ds\Big) dx\right],$$
$$\int\limits_0^1 x^2 R(x; C_1, C_2, C_3) dx = 0 = \int\limits_0^1 (x^2 - 1) x^2 dx + C_1\left[\frac{1}{3} + \int\limits_0^1 x^2\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} ds\Big) dx\right] +$$
$$+C_2\left[\frac{1}{4} + \int\limits_0^1 x^2\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s ds\Big) dx\right] + C_3\left[\frac{1}{5} + \int\limits_0^1 x^2\Big(\int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs} s^2 ds\Big) dx\right].$$

Подсчитав интегралы, получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$0,1188C_1 + 0,0386C_2 + 0,0190C_3 = 2/3,$$

$$0,0386C_1 + 0,0957C_2 + 0,0894C_3 = 1/4,$$

$$0,0190C_1 + 0,0894C_2 + 0,0918C_3 = 2/15.$$

Решая данную систему, получим $C_1 = 5,2785$, $C_2 = 1,6292$, $C_3 = -1,2267$ или

$$y_2(x) = 5,2785 + 1,6292x - 1,2267x^2.$$

3.3 Метод Ритца.

С помощью метода Ритца реализуется вариационный подход к построению приближенно-аналитического решения интегрального уравнения

$$Lu \equiv u(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)u(s)ds = f. \tag{10}$$

Данному уравнению сопоставляется функционал

$$J[u] = (Lu, u) - 2(f, u), \tag{11}$$

для которого ищется решение экстремальной задачи

$$J[u] \to min. \tag{12}$$

Взаимно однозначное соответствие между решениями задачи (12) с $J[u]$ вида (11) и задачи (10) имеет место при условии симметричности и положительной определенности оператора L [3].

По методу Ритца приближенное решение вариационной задачи (12) ищется в виде

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i, \tag{13}$$

где C_i $(i = 1, 2, ..., n)$ - неизвестные коэффициенты, а $\{\varphi_i(x)\}$ - система линейно независимых и полных базисных функций.

Задача минимизации функционала (12) сводится к задаче минимизации функции n переменных

$$\Phi(C_1, ..., C_n) = J[\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i] = \Big(L\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i, f\Big), \tag{14}$$

которая заменяется равносильной задачей решения СЛАУ

$$\begin{gathered} C_1(L\varphi_1, \varphi_1) + C_2(L\varphi_1, \varphi_2) + ... + C_n(L\varphi_1, \varphi_n) = (\varphi_1, f), \\ C_1(L\varphi_2, \varphi_1) + C_2(L\varphi_2, \varphi_2) + ... + C_n(L\varphi_2, \varphi_n) = (\varphi_2, f), \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_1(L\varphi_n, \varphi_1) + C_2(L\varphi_n, \varphi_2) + ... + C_n(L\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n). \end{gathered} \tag{15}$$

Эта система получается приравниванием к нулю производных $\dfrac{\partial\Phi(C_1, ..., C_n)}{\partial C_k}$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

В случае интегрального уравнения (10) эта система имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \int_a^b \Big[\varphi_i(x)\varphi_j(x) - \lambda\varphi_i\Big(\int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds\Big)\varphi_i(x)\Big]dx = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$i = 1, 2, ..., n. \tag{16}$$

Пример 3. Методом Ритца найти решение уравнения

$$u(x) - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}u(s)ds = 1 - x^2. \tag{17}$$

Решение. В качестве полной системы функций на отрезке [0,1] выберем систему $\varphi_i(x) = x^{2i}$. Приближенное решение $u_2(x)$ уравнения (17) будем искать в виде

$$y_2(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2.$$

Построим систему линейных алгебраических уравнений (16).

$$C_1 \int\limits_0^1 \Big[1 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}ds\Big]dx + C_2 \int\limits_0^1 \Big[1 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}ds\Big]xdx +$$

$$+C_3 \int\limits_0^1 \Big[1 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}ds\Big]x^2dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)dx,$$

$$C_1 \int\limits_0^1 \Big[x - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}sds\Big]dx + C_2 \int\limits_0^1 \Big[x - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}sds\Big]xdx +$$

$$+C_3 \int\limits_0^1 \Big[x - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}sds\Big]x^2dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)xdx,$$

$$C_1 \int\limits_0^1 \Big[x^2 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}s^2ds\Big]dx + C_2 \int\limits_0^1 \Big[x^2 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}s^2ds\Big]xdx +$$

$$+C_3 \int\limits_0^1 \Big[x^2 - \int\limits_0^1 \frac{1+x+s}{2+xs}s^2ds\Big]x^2dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)x^2dx.$$

Подсчитав интегралы, получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$0,1188C_1 + 0,0386C_2 + 0,0190C_3 = 2/3,$$

$$0,0386C_1 + 0,0957C_2 + 0,0894C_3 = 1/4,$$

$$0,0190C_1 + 0,0894C_2 + 0,0918C_3 = 2/15.$$

Решая данную систему, получим $C_1 = 5,2785$, $C_2 = 1,6292$, $C_3 = -1,2267$ или

$$y_2(x) = 5,2785 + 1,6292x - 1,2267x^2.$$

4 Варианты заданий

Таблица 1. Варианты задач к темам 1 и 2.

1. $u'' - (1+x)u' - u = \dfrac{2}{(x+1)^3}$; $u(0) = 1,\ u(1) = 0,5$; $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$.	2. $u'' + \dfrac{2u'}{x-2} + u(x-2) = 1$; $u(0) = -0,5;\ u(1) = -1$; $u(x) = \dfrac{1}{x-2}$.
3. $u'' + \dfrac{4xu' - u}{x^2+1} = \dfrac{-3}{(x^2+1)^2}$; $u'(0) = 0,\ u(1) = 0,5$; $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.	4. $u'' + (x+1)u' - u = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; $u(0) = 0;\ u(1) = 2ln2$; $u(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
5. $u'' - u' - 2u = -3e^{-x}$; $u'(0) = 0,\ u(1) + 2u'(1) = 0$; $u(x) = (x+1)e^{-x}$.	6. $u'' - 2u' - u == -2xe^x$; $u(0) = 0;\ u(1) = e$; $u(x) = xe^x$.
7. $u'' - (x^2+1)u' - 2xu = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$; $u(0) - 2u'(0) = 1,\ u(1) = 0,5$; $u(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.	8. $u'' - \dfrac{2u}{(x+1)^2} = \dfrac{4,5}{(x+1)^{3/2}}$; $u(0) - 2u'(0) = 0;\ u'(1) = -\sqrt{2}/2$; $u(x) = -2\sqrt{x+1}$.
9. $u'' + \dfrac{1,5u'}{1+x} = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$; $3u(0) - u'(0) = 1,\ u'(1) = \sqrt{2}$; $u(x) = \dfrac{2}{3(x+1)^{3/2}}$.	10. $u'' + \dfrac{0,5u'}{x+1} - u = -\sqrt{x+1}$; $u'(0) = 0,5;\ u(1) = \sqrt{2}$; $u(x) = \sqrt{x+1}$.
11.$u'' - \dfrac{3}{(x+1)^2}u = \dfrac{-1,5}{\sqrt{x+1}}$ $3u(0) - u'(0) = 1,\ u'(1) = \sqrt{2}$; $u(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}$.	12. $u''+\dfrac{0,5u'}{x+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$; $3u(0) - 2u'(0) = 1;\ u'(1) = \sqrt{2}$; $u(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \dfrac{1}{3}$.
13.$u'' - u = -x$; $u(0) = 1,\ u(1) = e + 1$; $u(x) = x + e^x$.	14. $u''-(x+1)^2u' - \dfrac{2u}{(x+1)^2} = 1$; $u(0) - u'(0) = 2;\ u(1) = 0,5$; $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
15.$u'' - u' - u = 3\sin x - \cos x$; $u'(0){=}{-1}$, $u(1){+}2u'(1){=}{-}(\cos 1{+}3\sin 1)$; $u(x) = \cos x - \sin x$.	16. $u'' + \dfrac{1,5u'}{x+1} - (x+1)u =$ $=-\sqrt{x+1} + x + 1$; $u(0) - u'(0) = 2;\ u'(1) = -2^{-3/2}$; $u(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} - 1$.
17. $u'' + u = -x$; $u(0) = 0,\ u(1) = 0$; $u(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x$.	18. $u'' - 2u' + u = x^2 - 4x + 2$; $u(0) = 1;\ u(1) = e + 1$; $u(x) = e^x + x^2$.

19. $u''+(x+1)u'+u=\dfrac{-2}{(x+1)^3}+1;$ $u'(0)=1,\ u(1)=0,5;$ $u(x)=\dfrac{x}{x+1}.$	20.$u''-\dfrac{u'}{\cos x}+u=\dfrac{2-\sin x}{\cos^3 x}-1;$ $u'(0)=0,\ u(1)=\dfrac{1}{\cos 1}-1;$ $u(x)=\dfrac{1}{\cos x}-1.$
21. $u''(x+1)+2\sqrt{x+1}u'-\dfrac{u}{\sqrt{x+1}}=$ $=2-\dfrac{\ln(x+1)}{4\sqrt{x+1}};$ $u(0)=0,\ u(1)=\sqrt{2}\ln 2;$ $u(x)=\sqrt{x+1}\ln(x+1).$	22. $u''-u'-u=$ $=(x^2-6x+3)e^{-x};$ $u(0)=1;\ u(1)2/e;$ $u(x)=(x^2+1)e^{-x}.$
23. $u''+\dfrac{u}{(x+1)^2}=\dfrac{-\sqrt{x+2}}{8(x+2)^3};$ $u(0)/\sqrt{2}-\sqrt{2}u'(0)=3/8,\ u(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{6};$ $u(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{2(x+2)}.$	24. $u''-2u'+u=\dfrac{2e^x}{(x+1)^3};$ $u(0)=1;\ u'(1)=\dfrac{e}{4};$ $u(x)=\dfrac{e^x}{x+1}.$
25. $u''+\dfrac{u'}{x^2+x+1}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+x+1)^2};$ $u(0)=0,\ u'(1)=1;$ $u(x)=\ln(x^2+x+1).$	26. $u''-u'+u=-(\sin x+\cos x);$ $u(0)=-1;\ u(1)+u'(1)=2\sin 1;$ $u(x)=\sin x-\cos x.$
26. $u''-u'=\dfrac{2\sin x-\cos x}{\cos^3 x};$ $u'(0)=1;\ u'(1)=1/\cos^2 1;$ $u(x)=tgx-1.$	27. $u''-\sin xu'=-0,5\sin 2x;$ $u(0)=0;\ u'(1)-u(1)=\cos 1-\sin 1;$ $u(x)=\sin x-x.$
29. $u''-(x+1)u'+u=\dfrac{2(1-x-2x^2-x^3)}{(x+1)^3}$ $u(0)=0;\ u'(1)=3/4;$ $u(x)=\dfrac{x^2}{x+1}.$	

Варианты методов расщепления

1. Неявная схема переменных направлений (продольно - поперечная схема, предложенная Писменом, Рекфордом и Дугласом в 1955 г).

$$\frac{v^{n+1/2}-v^n}{0,5\tau}=\Lambda_1 v^{n+1/2}+\Lambda_2 v^n+\varphi^n,\ v^{n+1/2}=\bar{\mu} \text{ при } x_1=0,l_1,$$

$$\frac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{0,5\tau}=\Lambda_1 v^{n+1/2}+\Lambda_2 v^{n+1}+\varphi^n,\ v^{n+1}=\mu^{n+1} \text{ при } x_2=0,l_2,$$

$$\bar{\mu}=(\mu^{n+1}+\mu^n)/2-\tau\Lambda_2(\mu^{n+1}-\mu^n)/4.$$

2. $$\frac{v^{n+1/2}-v^n}{0,5\tau}=\Lambda_1 v^{n+1/2}+\Lambda_1 v^n+2\Lambda_2 v^n+\varphi^n,\ v^{n+1/2}=\bar{\mu} \text{ при } x_1=0,l_1,$$

$$\frac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{0,5\tau}=\Lambda_2(v^{n+1}-v^n),\ v^{n+1}=\mu^{n+1} \text{ при } x_2=0,l_2,$$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - 0,5\tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n).$

---

3. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - 0,5\tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n).$

---

4. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_1 v^n + 2\Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n).$

---

5. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n).$

---

6. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \sigma_2\tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n),\ \sigma_2 = 0,5 - \dfrac{h_2^2}{8\tau} > 0.$

---

7. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^n + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,$

$v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n),\ \sigma_1 = 0,5 - \dfrac{h_1^2}{8\tau} > 0.$

---

8. $\dfrac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^n + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,$

$v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$

$\dfrac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2(v^{n+1} - v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$

$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\sigma_2\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n),\ \sigma_\alpha = 0,5 - \dfrac{h_\alpha^2}{8\tau} > 0,\ \alpha = 1,2.$

---

9. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_1 v^n + 2\Lambda_2 v^n + \varphi^n,$
$v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2(v^{n+1}-v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$
$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\sigma_2\Lambda_2(\mu^{n+1}-\mu^n),\ \sigma_2 = 0,5 - \dfrac{h_2^2}{8\tau} > 0.$

---

10. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^n + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,$
$v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2(v^{n+1}-v^n),\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2,$
$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - 0,5\tau\Lambda_2(\mu^{n+1}-\mu^n),\ \sigma_1 = 0,5 - \dfrac{h_1}{8\tau} > 0.$

---

11. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2 v^{n+1} + \Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = (\mu^{n+1}+\mu)/2 - \dfrac{\tau^2}{4}\Lambda_2\mu^n.$

---

12. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + 0,5\Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1;$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2 v^{n+1} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - 0,5\tau\Lambda_2\mu^n.$

---

13. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n, v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 v^{n+1} + 0,5\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = 0,5(\mu^{n+1}+\mu^n) - 0,5\tau\Lambda_2\mu^{n+1}.$

---

14. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n, v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 v^{n+1} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \tau\Lambda_2\mu^{n+1}.$

---

15. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_2)\Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2 v^{n+1} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,$
$v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \sigma_1\mu^{n+1} - \sigma_1\sigma_2\tau\Lambda_2\mu^{n+1} + (1-\sigma_1)\mu^n + (1-\sigma_1)(1-\sigma_2)\tau\Lambda_2\mu^n,$
$\sigma_\alpha = 0,5 - \dfrac{h_\alpha^2}{12\tau}, \alpha = 1,2.$

---

16. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 v^{n+1} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \sigma_1\mu^{n+1} - \sigma_1\tau\Lambda_2\mu^{n+1} + (1-\sigma_1)\mu^n,\ \sigma_1 = 0,5 - \dfrac{h_1^2}{12\tau}.$

---

17. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \sigma_1\Lambda_1 v^{n+1/2} + 0,5\Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = 0,5\Lambda_2 v^{n+1} + (1-\sigma_1)\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,$
$v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \sigma_1\mu^{n+1} - 0,5\sigma_1\tau\Lambda_2\mu^{n+1} + (1-\sigma_1)\mu^n + 0,5(1-\sigma_1)\tau\Lambda_2\mu^n,\ \sigma_1 = 0,5 - \dfrac{h_1^2}{12\tau}.$

---

18. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_2)\Lambda_2 v^n + \varphi^n,\ v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2 v^{n+1} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = \mu^{n+1} - \sigma_2\tau\Lambda_2\mu^{n+1},\ \sigma_2 = 0,5 - \dfrac{h_2^2}{12\tau}.$

---

19. $\dfrac{v^{n+1/2}-v^n}{\tau} = 0,5\Lambda_1 v^{n+1/2} + (1-\sigma_2)\Lambda_2 v^n + \varphi^n,$
$v^{n+1/2} = \bar{\mu}$ при $x_1 = 0, l_1,$
$\dfrac{v^{n+1}-v^{n+1/2}}{\tau} = \sigma_2\Lambda_2 v^{n+1} + 0,5\Lambda_1 v^{n+1/2} + \varphi^n,\ v^{n+1} = \mu^{n+1}$ при $x_2 = 0, l_2;$
$\bar{\mu} = 0,5\mu^{n+1} - \sigma_1\sigma_2\tau\Lambda_2\mu^{n+1} + 0,5\mu^n + 0,5(1-\sigma_2)\tau\Lambda_2\mu^n, \sigma_2 = 0,5 - \dfrac{h_2^2}{12\tau}.$

---

20. Схема Бейкера - Олифанта.

$$(E-\frac{2}{3}\tau\Lambda_1)v^{n+1/2}=\frac{4}{3}v^n-\tfrac{1}{3}v^{n-1},\ \ v^{n+1/2}=\bar{\mu} \text{ при } x_1=0,l_1,$$

$$(E-\frac{2}{3}\tau\Lambda_2)v^{n+1}=v^{n+1/2},\ \ v^{n+1}=\mu^{n+1} \text{ при } x_2=0,l_2;$$

$$\bar{\mu}=\mu^{n+1}-\frac{2\tau}{3}\Lambda_2\mu^{n+1}.$$

Таблица 2. Варианты задач к теме 4.

№	Вид уравнения	Метод
1	$u(x)-\int\limits_0^1\frac{\sin(0,6xs)}{s}u(s)ds=x$	Ядро
2	$u(x)-\int\limits_0^1\frac{\sin(0,6xs)}{s}u(s)ds=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Ядро
3	$u(x)-\int\limits_0^1(1+s)(e^{0,2xs}-1)u(s)ds=\frac{1}{x}$	Ядро
4	$u(x)-\int\limits_0^1(1+s)(e^{0,2xs}-1)u(s)ds=1-x$	Ядро
5	$u(x)-\int\limits_0^1(1+s)(e^{0,2xs}-1)u(s)ds=e^{-x}$	Ядро
6	$u(x)-\int\limits_0^1\frac{xs}{\sqrt{1+0,1xs}}u(s)ds=1+x$	Ядро
7	$u(x)-\int\limits_0^1\frac{xs}{\sqrt{1+0,1xs}}u(s)ds=e^{-x}$	Ядро
8	$u(x)-\int\limits_0^1\frac{xs}{\sqrt{1+0,1xs}}u(s)ds=\sqrt{x}$	Ядро
9	$u(x)=e^x-x-\int\limits_0^1 x(e^{xs}-1)u(s)ds$	Ядро
10	$u(x)=x+\cos x+\int\limits_0^1 x(\sin xs-1)u(s)ds$	Ядро
11	$u(x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+3x-1)+\int\limits_0^1(e^{-xs^2}-1)xu(s)ds$	Ядро
12	$u(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+\int\limits_0^1(1-\cos xs^2)xu(s)ds$	Ядро
13	$u(x)=1+\int\limits_{-1}^1(xs+x^2)u(s)ds$	Галеркин
14	$u(x)=1+\frac{4}{3}x+\int\limits_{-1}^1(xs^2-x)u(s)ds$	Галеркин

15	$u(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{sx} u(s)ds$	Галеркин
16	$u(x) - \int\limits_{0}^{0,96} \frac{1+x+s}{2+x^2+s^2} u(s)ds = e^{-x}$	Ритц
17	$u(x) - \int\limits_{0}^{1} \frac{u(s)}{1+x^2+s^2} ds = 1,5 - x^2$	Ритц
18	$u(x) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} e^{xs} u(s)ds = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1)$	Ритц
19	$u(x) = 1 + \int\limits_{0}^{1} xs^2 u(s)ds$	Галеркин
20	$u(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} xsu(s)ds$	Галеркин
21	$u(x) = x + \int\limits_{-1}^{1} xsu(s)ds$	Галеркин
22	$u(x) + \int\limits_{0}^{1} ln(1 - 2x\cos\pi s + x^2)u(s)ds = 0$	Галеркин
23	$u(x) - \int\limits_{0}^{\pi} \cos(x+s)u(s)ds = 1$	Ритц
24	$u(x) - \int\limits_{0}^{2\pi} \sin(x+s)u(s)ds = 1$	Ритц
25	$u(x) - \int\limits_{0}^{1} (2x - s)u(s)ds = \frac{x}{6}$	Галеркин
26	$u(x) - \int\limits_{0}^{2\pi} \sin x \cos s u(s)ds = \cos 2x$	Галеркин
27	$u(x) - \int\limits_{0}^{1} e^{x-s} u(s)ds = e^x$	Галеркин
28	$u(x) - \int\limits_{0}^{1} (4xs - x^2)u(s)ds = x$	Галеркин
29	$u(x) - \int\limits_{0}^{\pi} \sin(x-s)u(s)ds = \cos x$	Галеркин
30	$u(x) - \int\limits_{0}^{2\pi} \lvert\pi - s\rvert \sin x u(s)ds = x$	Галеркин

5 Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: ФМ, 1962.

2. Вержбицкий. Основы численных методов. -М.: Высшая школа, 2002.

3. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения. -Киев: Наукова думка, 1986.

4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980.

5. Колобов А.Г. Метод сплайн-коллокации. Методические указания. - Владивосток, ДВГУ, 1998.

6. Колобов А.Г. Сплайн-функции. Методическое пособие. - Владивосток, ДВГУ, 1999.

7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. -М.: Наука, 1972.

8. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. -М.: Наука, 1973.

9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. -М.: Наука, 1968.

10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1980.

11. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. -М: Наука,1971.

12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.: Наука, 1989.

Учебное издание

Александр Георгиевич Колобов
Лилия Александровна Молчанова

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Методические указания и задания для студентов
математических специальностей

В авторской редакции
Технический редактор Л.М. Гурова
Компьютерный набор и верстка Л. А. Молчановой

Подписано в печать ..07
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. ,. Уч.-изд. л. 0,.
Тираж экз.

Издательство Дальневосточного университета
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27.
Отпечатано в лаборатории
кафедры компьютерных наук ИМКН ДВГУ
690950, Владивосток, ул. Октябрьская, 27, к. 132.