**Суть метода прямоугольников**

Если функция y=f(x) имеет непрерывность на отрезке [a;b] и необходимо вычислить значение интеграла ∫baf(x)dx.

Необходимо воспользоваться понятием неопределенного интеграла. Тогда следует разбить отрезок [a;b] на количество n частей [xi−1;xi],i=1,2,....,n, где a=x0<x1<x2<...<xn−1<xn=b. В промежутке отрезка [xi−1;xi],i=1,2,...,n выберем точку со значением ζi. Из определения имеем, что существует определенный тип интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка, который уже разбили. Это выражается формулой λ=(xi−xi−1)→0, тогда получаем, что любая из таких интегральных сумм – приближенное значение интеграла ∫baf(x)dx≈f(ζi)⋅(xi−xi−1).

Суть метода прямоугольниковвыражается в том, что приближенное значение считается интегральной суммой.

**Метод средних прямоугольников**

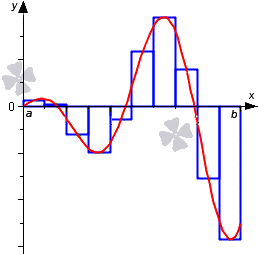
Если разбить интегрируемый отрезок [a;b] на одинаковые части точкой h, то получим a=x0,x1=x0+h,x2=x0+2h,...,x−1=x0+(n−1)h,xn=x0+nh=b, то есть h=xi−xi−1=b−an,i=1,2,...,n. Серединами точек ζi выбираются элементарные отрезки [xi−1;xi],i=1,2,...,n, значит ζi=xi−1+h2,i=1,2,...,n.

Определение 1

Тогда приближенное значение ∫baf(x)dx≈f(ζi)⋅(xi−xi−1) записывается таким образом ∫baf(x)dx≈h⋅f(ζi)(xi−1+h2). Данная формула называется формулой метода прямоугольников.

Такое название метод получает из-за характера выбора точек ζi, где шаг разбиения отрезка берется за h=b−an.

Рассмотрим на приведенном ниже рисунке данный метод.



Чертеж явно показывает, что приближение к кусочной ступенчатой функции

y=⎧⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪⎨⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

⎪

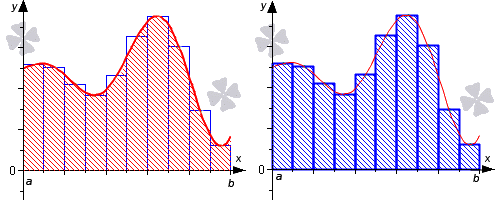
⎪

⎪

⎪

⎪⎩f(x0+h2),x∈[x0;x1)f(x1+h2),x∈[x1;x2)...f(xn−1+h2),x∈[xn−1;xn] происходит на всем пределе интегрирования.

С геометрической стороны мы имеем, что неотрицательная функция y=f(x) на имеющемся отрезке [a;b]  имеет точное значение определенного интеграла и выглядит как криволинейная трапеция, площадь которой необходимо найти.  Рассмотрим на рисунке, приведенном ниже.



**Оценка абсолютной погрешности метода средних прямоугольников**

Для оценки абсолютной погрешности необходимо выполнить ее оценку на заданном интервале. То есть следует найти сумму абсолютных погрешностей каждого интервала. Каждый отрезок [xi−1;xi],i=1,2,...,n имеет приближенное равенство ∫xixi−1f(x)dx≈f(xi−1+h2)⋅h=f(xi−1+h2)⋅(xi−xi−1).  Абсолютная погрешность данного метода треугольников δi, принадлежащей  отрезку i, вычисляется как разность точного и приближенного определения интеграла . Имеем, что δi=∫xixi−1f(x)dx−f(xi−1+h2)⋅(xi−xi−1). Получаем, что f(xi−1+h2) является некоторым числом, а xi−xi−1=∫xixi−1dx, тогда выражение f(xi−1+h2)⋅(xi−xi−1) по 4 свойству определения интегралов записывается в форме f(xi−1+h2)⋅(xi−xi−1)=∫xx−1f(xi−1+h2)dx.  Отсюда получаем, что отрезок i имеет абсолютную погрешность вида

δi=∫xixi−1f(x)dx−f(xi−1+h2)⋅(xi−xi−1)==∫xixi−1f(x)dx−∫xixi−1(xi−1+h2)dx=∫xixi−1(f(x)=−f(xi−1+h2))dx

Если взять, что функция y=f(x) имеет производные второго порядка в точке (xi−1+h2) и ее окрестностях, тогда y=f(x) раскладывается в ряд Тейлора по степеням (x−(xi−1+h2)) с остаточным членом в форме разложения по Лагранжу. Получаем, что

f(x)=f(xi−1+h2)+f′(xi−1+h2)⋅(x−(xi−1+h2))++f′′(εi)(x−(xi−1+h2))22⇔⇔f(x)=f(xi−1+h2)=f′(xi−1+h2)⋅(x−(xi−1+h2))++f′′(εi)(x−(xi−1+h2))22

Исходя из свойства определенного интеграла, равенство может интегрироваться почленно. Тогда получим, что

∫xixi−1(f(x)−f(xi−1+h2))dx=∫xixi−1f′(xi−1+h2)⋅(x−(xi−1+h2))dx++∫xixi−1f′′(εi)⋅(x−(xi−1+h2))22dx==f′(xi−1+h2)⋅(x−(xi−1+h2))22xixi−1+f′′(εi)⋅(x−(xi−1+h2))36xixi−1==f′(xi−1+h2)⋅((xi−(h2))22−(xi−1−(xi−1+h2))22)++f′′(εi)⋅((xi−(h2))36−(xi−1−(xi−1+h2))36)==f′(xi−1+h2)⋅(h28−h28)+f′′(εi)⋅(h348+h348)=f′′(εi)⋅h324

где имеем εi∈[xi−1;xi].

Отсюда получаем, что δi=∫xixi−1(f(x)−f(xi−1+h2))dx=f′′(εi)⋅h324.

Абсолютная погрешность формулы прямоугольников отрезка [a;b] равняется сумме погрешностей каждого элементарного интервала. Имеем, что

δn=∫xixi−1(f(x)−f(xi−1+h2))dx и |δn|≤|f′′(x)|⋅n⋅h324=|f′′(x)|=(b−a)324n2.

Неравенство является оценкой абсолютной погрешности метода прямоугольников.

**Метод левых прямоугольников и метод правых прямоугольников**

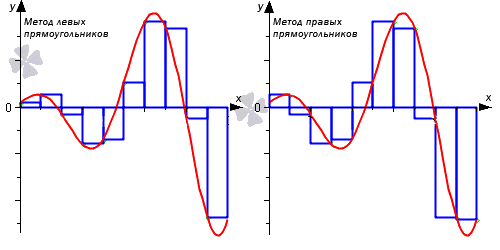
Для модификации метода рассмотрим формулы.

Определение 2

∫baf(x)dx≈h⋅f(xi) является формулой левых треугольников.

∫baf(x)dx≈h⋅f(xi) является формулой правых треугольников.

Рассмотрим на примере рисунка, приведенного ниже.



Отличием метода средних прямоугольников считается выбор точек  не по центру, а на левой и правой границах данных элементарных отрезков.

Такая абсолютная погрешность методов левых и правых треугольников можно записать в виде

|δn|≤|f′(x)|⋅h2⋅n2=|f′(x)|⋅(b−a)22n

**Примеры применения метода прямоугольников при приближенном вычислении определенных интегралов**

Необходимо рассмотреть решение примеров, где нужно вычислять примерное значение имеющегося определенного интеграла при помощи метода прямоугольников. Рассматривают два типа решения заданий. Суть первого случая – задание количества интервалов для разбивания отрезка интегрирования. Суть второго заключается в наличии допустимой абсолютной погрешности.

Формулировки задач выглядят следующим образом:

* произвести приближенное вычисление определенного интеграла при помощи метода прямоугольников, разбивая на nколичество отрезков интегрирования;
* найти приближенное значение определенного интеграла методом прямоугольников с точностью до одной сотой.

Рассмотрим решения в обоих случаях.

 В качестве примера выбрали задания, которые поддаются преобразованию для нахождения их первообразных. Тогда появляется возможность вычисления точного значения определенного интеграла и сравнения с приближенным значением при помощи метода прямоугольников.

Пример 1

Произвести вычисление определенного интеграла ∫94x2sinx10dx при помощи метода прямоугольников, разбивая  отрезок интегрирования на 10 частей.

***Решение***

Из условия имеем, что a=4,b=9,n=10,f(x)=x2sinx10.  Для применения ∫baf(x)dx≈h⋅f(xi−1+h2) необходимо вычислить размерность шага h и значение  функции  f(x)=x2sinx10 в точках (xi−1+h2),i=1,2,...,10.

Вычисляем значение шага и получаем, что

h=b−an=9−410=0.5.

Потому как xi−1=a+(i−1)⋅h,i=1,...,10, тогда (xi−1+h2)=a+(i−1)⋅h+h2=a+(i−0.5)⋅h,i=1,...,10.

Так как i=1, то получаем xi−1+h2=x0+h2=a+(i−0.5)⋅h=4+(1−0.5)⋅0.5=4.25.

После чего необходимо найти значение функции

f(xi−1+h2)=f(x0+h2)=f(4.25)=(4.25)2sin(4.25)10≈−1.616574

При i=2 получаем xi−1+h2=x1+h2=a+(i−0.5)⋅h=4+(2−0.5)⋅0.5=4.75.

Нахождение соответствующего значения функции получает вид

f(xi−1+h2)=f(x1+h2)=f(4.75)=(4.75)2sin(4.75)10≈−2.254654

Вычисления производятся до i=10.

Представим эти данные  в таблице, приведенной ниже.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| xi−1+h2 | 4.25 | 4.75 | 5.25 | 5.75 | 6.25 |
| f(xi−1+h2) | −1.616574 | −2.254654 | −2.367438 | −1.680497 | −0.129606 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| xi−1+h2 | 6.75 | 7.25 | 7.75 | 8.25 | 8.75 |
| f(xi−1+h2) | 2.050513 | 4.326318 | 5.973808 | 6.279474 | 4.783042 |

Значения функции необходимо подставить в формулу прямоугольников. Тогда получаем, что

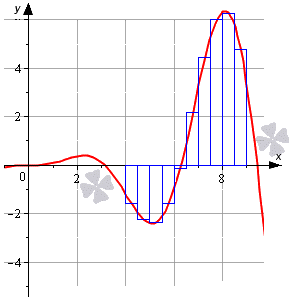
∫94x2sinx10dx≈h⋅f(xi−1+h2)==0.5⋅⎛⎜⎝−1.616574−2.25654−2.367438−1.680497−0.129606++2.050513+4.326318+5.973808+6.279474+4.783042⎞⎟⎠==7.682193

Исходный интеграл можно вычислить при помощи формулы Ньютона-Лейбница. Получаем, что

∫94x2⋅sinx10dx=(−110x2⋅cosx+15x⋅sinx+15cosx)94==75cos4−45sin4−7910cos9+95sin9≈7.630083

Находим первообразную выражения −110x2⋅cosx+15x⋅sinx+15cosx соответствующую функции f(x)=x2sinx10. Нахождение производится методом интегрирования по частям.

Ответ: определенный интеграл отличается от значения, полученном при решении методом прямоугольников, где n=10, на 6 долей единицы. Рассмотрим на рисунке, приведенном ниже.



Нужна помощь преподавателя?

**Опиши задание — и наши эксперты тебе помогут!**

Описать задание

Пример 2

Вычислить приближенного значение определенного интеграла ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx при помощи метода левых и правых прямоугольников с точностью до одной сотой.

***Решение***

Из условия мы имеем, что a=1,b=2 и f(x)=−0.03x3+0.26x−0.26.

Для применения формулы правых и левых прямоугольников нужно знать размерность шага h, а для его вычисления  разбиваем отрезок интегрирования на n отрезков. По условию имеем, что точность должна быть до 0,01, тогда нахождение n возможно при помощи оценки абсолютной погрешности методов левых и правых прямоугольников.

Известно, что |δn|≤|f′(x)|⋅(b−a)22n. Для достижения необходимой степени точности необходимо найти такое значение n, для которого неравенство |f′(x)|⋅(b−a)22n≤0.01 будет выполнено.

Найдем наибольшее значение модуля первой производной, то есть значение |f′(x)| подынтегральной функции f(x)=−0.03x3+0.26x−0.26, определенной на отрезке [1;2]. В нашем случае необходимо выполнить вычисления:

f′(x)=(−0.03x3+0.26x−0.26)′=−0.09x2+0.26

Парабола является графиком подынтегральной функции с ветвями, направленными вниз, определенная на отрезке [1;2], причем с монотонно убывающим графиком. Необходимо произвести вычисление модулей значений производных на концах отрезков, а из них выбрать наибольшее значение. Получаем, что

|f′(1)|=∣∣−0.09⋅12+0.26∣∣=0.17|f′(2)|=∣∣−0.09⋅22+0.26∣∣=0.1→|f′(x)|=0.17

Решение сложных подынтегральных функций подразумевает  обращение к разделу наибольше и наименьшее значение функции.

Тогда получаем, что наибольшее значение функции имеет вид:

|f′(x)|⋅(b−a)22n≤0.01⇔⇔0.17⋅(2−1)22n≤0.01⇔0.085n≤0.01⇔n≥8.5

Дробность числа n исключается, так как n является натуральным числом. Чтобы прийти к точности 0.01, используя метод правых и левых прямоугольников, не обходимо выбирать любое значение n. Для четкости расчетов возьмем n=10.

Тогда формула левых прямоугольников примет вид ∫baf(x)dx≈h⋅f(xi), а правых - ∫baf(x)dx≈h⋅f(xi).  Для применения их на практике необходимо найти значение размерности шага h и f(xi),i=0,1,...,n, где n=10.

Получим, что

h=b−an=2−110=0.1

Определение точек отрезка [a;b] производится с помощью xi=a+i⋅h,i=0,1,...,n.

При i=0, получаем xi=x0=a+i⋅h=1+0⋅0.1=1 и f(xi)=f(x0)=f(1)=−0.03⋅13+0.26⋅1−0.26=−0.03.

При i=1, получаем xi=x1=a+i⋅h=1+1⋅0.1=1.1 и f(xi)=f(x1)=f(1.1)=−0.03⋅(1.1)3+0.26⋅(1.1)−0.26=−0.01393.

Вычисления производятся до i=10.

Вычисления необходимо представить в таблице, приведенной ниже.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| xi | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
| f(xi) | −0.03 | −0.01393 | 0.00016 | 0.01209 | 0.02168 | 0.02875 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| xi | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2 |
| f(xi) | 0.03312 | 0.03461 | 0.03304 | 0.02823 | 0.02 |

Подставим формулу левых треугольников

∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈h⋅f(xi)==0.1⋅⎛⎜⎝−0.03−0.01393+0.00016+0.01209+0.02168++0.02875+0.03312+0.03461+0.03304+0.02823⎞⎟⎠==0.014775

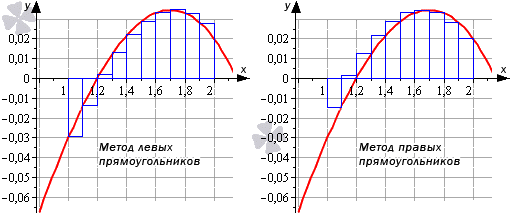
Подставляем в формулу правых треугольников

∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈h⋅f(xi)==0.1⋅⎛⎜⎝−0.01393+0.00016+0.01209+0.02168+0.02875++0.03312+0.03461+0.03304+0.02823+0.02⎞⎟⎠=0.019775

Произведем вычисление по формуле Ньютона-Лейбница:

∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx==(−0.03x44+0.13x2−0.26x)21=0.0175

Ответ: Рассмотрим рисунок, приведенный ниже.



**Замечание**

Нахождение наибольшего значения модуля первой производной является трудоемкой работой, поэтому можно исключить использование неравенства для оценивания абсолютной погрешности и методов численного интегрирования. Разрешено применять схему.

Берем значение n=5 для вычисления приближенного значения интеграла. Необходимо удвоить количество отрезков интегрирования, тогда n=10, после чего производится вычисление примерного значения. необходимо найти разность этих значений приn=5 и n=10. Когда разность не соответствует требуемой точности, то приближенным значением считается n=10 с округлением до десятка.

Когда погрешность превышает необходимую точность, то производится удваивание  n и сравнивание приближенных значений. Вычисления производятся до тех пор, пока необходимая точность не будет достигнута.

Для средних прямоугольников выполняются аналогичные действия, но вычисления на каждом шаге требуют разности полученных приближенных значений интеграла для n и 2n. Такой способ вычисления называется правилом Рунге.

Произведем вычисление интегралов с точностью до одной тысячной при помощи метода левых прямоугольников.

При n=5 получаем, что ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈0.0116,  а при n=10 - ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈0.014775. Так как имеем, что |0.0116−0.014775|=0.003175>0.001, возьмем n=20. Получаем, что ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈0.01619375. Имеем |0.014775−0.01619375|=0.00141875>0.001, возьмем значение n=40, тогда  получим ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx≈0.01686093. Имеем, что |0.1619375−0.01686093|=0.00066718<0.001, тогда после округления значения проверим, что ∫21(−0.03x3+0.26x−0.26)dx равняется значению 0,017 с погрешностью 0,001.   Из оценок абсолютных погрешностей видно, что  данный метод дает максимальную точность в отличие от метода левых и правых координат для заданного n. Отдается предпочтение методу средних прямоугольников.

Непрерывные подынтегральные функции при бесконечном разделении на отрезки данное приближенно число стремится к точному.  Чаще всего такой метод выполняется при помощи специальных программ на компьютере. Поэтому чем больше значение n, тем больше вычислительная погрешность.

Для наиболее точного вычисления необходимо выполнять точные промежуточные действия, желательно  с точностью до 0,0001.

**Итоги**

Для вычисления неопределенного интеграла методом прямоугольников следует применять формулу такого вида ∫baf(x)dx≈h⋅f(ζi)(xi−1+h2) и оценивается абсолютная погрешность с помощью |δn|≤|f′′(x)|⋅n⋅h324=|f′′(x)|⋅(b−a)324n2.

Для решения с помощью методов правых и левых прямоугольников применяют формулы, имеющие вид, ∫baf(x)dx≈h⋅f(xi) и ∫baf(x)dx≈h⋅f(xi). Абсолютная погрешность оценивается при помощи формулы вида |δn|≤|f′(x)|⋅h2⋅n2=|f′(x)|⋅(b−a)22n.

Подробнее: https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/integraly-integrirovanie/metod-prjamougolnikov/