Метод Симпсона предполагает приближенное вычисление определенных интегралов. Чаще всего имеются два типа задач, для которых применим данный метод:

* при приближенном вычислении определенного интеграла;
* при нахождении приближенного значения с точностью δn.

На точность вычисления влияет значение n, чем выше n, тем точнее промежуточные значения.

Пример 1

Вычислить определенный интеграл ∫50xdxx4+4 при помощи метода Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 5 частей.

***Решение***

По условию известно, что a = 0; b = 5; n = 5, f(x)=xx4+4.

Тогда запишем формулу Симпсона в виде

∫baf(x)dx≈h3(f(x0)+4∑ni=1f(x2i−1)+2∑n−1i=1f(x2i)+f(x2n))

Чтобы применить ее в полной мере, необходимо рассчитать  шаг по формуле h=b−a2n, определить точки xi=a+i⋅h, i=0, 1,..., 2n и найти значения подынтегральной функции f(xi), i=0, 1,..., 2n.

Промежуточные вычисления необходимо округлять до 5 знаков. Подставим значения и получим

h=b−a2n=5−02⋅5=0.5

Найдем значение функции в точках

i=0: xi=x0=a+i⋅h=0+0⋅0.5=0⇒f(x0)=f(0)=004+4=0i=1: xi=x1=a+i⋅h=0+1⋅0.5=0.5⇒f(x1)=f(0.5)=0.50.54+4≈0.12308...i=10: xi=x10=a+i⋅h=0+10⋅0.5=5⇒f(x10)=f(5)=554+4≈0.00795

Наглядность и удобство оформляется в таблице, приведенной ниже

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| xi | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
| f(xi) | 0 | 0.12308 | 0.2 | 0.16552 | 0.1 | 0.05806 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| xi | 3 | 3.5 | 4 | 4.5 | 5 |
| f(xi) | 0.03529 | 0.02272 | 0.01538 | 0.01087 | 0.00795 |

Необходимо подставить результаты в формулу метода парабол:

∫50xdxx4+4≈h3(f(x0)+4∑ni=1f(x2i−1)+2∑n−1i=1f(x2i)+f(x2n))==0.53(0+4⋅(0.12308+0.16552+0.05806++0.02272+0.01087)+2⋅(0.2+0.1++0.03529+0.01538)+0.00795)≈≈0.37171

Для вычисления мы выбрали определенный интеграл, который можно вычислить по Ньютону-Лейбницу. Получим:

∫50xdxx4+4=12∫50d(x2)(x2)2+4=(14arctgx22)50=14arctg252≈0.37274

**Ответ:**Результаты совпадают до сотых.

Пример 2

Вычислить неопределенный интеграл∫π0(sin3x2+12)dx при помощи метода Симпсона с точностью до 0,001.

***Решение***

По условию имеем, что *а*=0, b=π, f(x)=sin3x2+12, openδn|≤0.001. Необходимо определить значение n. Для этого используется формула оценки абсолютной погрешности метода Симпсона вида openδn|≤max[a;b]openf(4)(x)∣∣⋅(b−a)52880n4≤0.001

Когда найдем значение n, то неравенство max[a;b]openf(4)(x)∣∣⋅(b−a)52880n4≤0.001 будет выполняться. Тогда, применив метод парабол, погрешность при вычислении не превысит 0.001. Последнее неравенство примет вид

n4≥max[a;b]openf(4)(x)∣∣⋅(b−a)52.88

Теперь необходимо выяснить, какое наибольшее значение может принимать модуль четвертой производной.

f'(x)=(sin3x2+12)′=32cos3x2⇒f''(x)=(32cos3x2)′=−94sin3x2⇒f'''(x)=(−94sin3x2)′=−278cos3x2⇒f(4)(x)=(−278cos3x2)′=8116sin3x2

Область определения f(4)(x)=8116sin3x2 принадлежит интервалу open−8116;8116], а сам отрезок интегрирования [0;π) имеет точку экстремума, из этого следует, что max[0;π]openf(4)(x)∣∣=8116.

Производим подстановку:

n4≥max[a;b]openf(4)(x)∣∣⋅(b−a)52.88⇔n4≥8116⋅(π−0)52.88⇔⇔n4>537.9252⇔openn|>4.8159

Получили, что n – натуральное число, тогда его значение может быть равным n=5, 6, 7… для начала необходимо взять значение n=5.

Действия производить аналогично предыдущему примеру. Необходимо вычислить шаг. Для этого

h=b−a2n=π−02⋅5=π10

Найдем узлы xi=a+i⋅h, i=0, 1,..., 2n, тогда значение подынтегральной функции будет иметь вид

i=0: xi=x0=a+i⋅h=0+0⋅π10=0⇒f(x0)=f(0)=sin3⋅02+12=0.5i=1: xi=x1=a+i⋅h=0+1⋅π10=π10⇒f(x1)=f(π10)=sin3⋅π102+12≈0.953990...i=10: xi=x10=a+i⋅h=0+10⋅π10=π⇒f(x10)=f(π)=sin3⋅π2+12≈−0.5

Для объединения результатов запишем данные в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| xi | 0 | π10 | π5 | 3π10 | 2π5 |
| f(xi) | 0.5 | 0.953990 | 1.309017 | 1.487688 | 1.451056 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| xi | π2 | 3π5 | 7π10 | 4π5 | 9π10 | π |
| f(xi) | 1.207107 | 0.809017 | 0.343566 | −0.087785 | −0.391007 | −0.5 |

Осталось подставить значения в формулу решения методом парабол и получим

∫π0(sin3x2+12)≈h3(f(x0)+4∑ni=1f(x2i−1)+2∑n−1i=1f(x2i)+f(x2n))==π30⋅(0,5+4⋅(0.953990+1.487688+1.207107++0.343566−0.391007)+2⋅(1.309017+1.451056++0.809017−0.87785)−0.5)==2.237650

Метод Симпсона позволяет нам получать приближенное значение определенного интеграла ∫π0(sin3x2+12)dx≈2.237 с точностью до 0,001.

При вычислении формулой Ньютона-Лейбница получим в результате

∫π0(sin3x2+12)dx=(−23cos3x2+12x)π0==−32cos3π2+π2−(−23cos0+12⋅0)=π2+23≈2.237463

**Ответ:**∫π0(sin3x2+12)dx≈2.237

**Замечание**

В большинстве случаях нахождение max[a;b]openf(4)(x)∣∣ проблематично. Поэтому применяется альтернатива – метод парабол. Его принцип подробно разъясняется в разделе метода трапеций. Метод парабол считается предпочтительным способом для разрешения интеграла. Вычислительная погрешность влияет на результат n. Чем меньше его значение, тем точнее приближенное искомое число.

Подробнее: https://zaochnik.com/spravochnik/matematika/integraly-integrirovanie/metod-simpsona-parabol/