

AMO - Projekt 1, zestaw 25

Jakub Postępski

28 listopada 2018

1 Układ równań współrzędnych kartezjańskich

Dla każdego punktu w układzie współrzędnych "geograficznych" mamy:

$$x = r \cos \theta \cos \phi$$

$$y = r \cos \theta \sin \phi$$

$$z = r \sin \theta$$

gdzie θ to długość geograficzna i ϕ to szerokość geograficzna.

Dla każdego punktu w układzie współrzędnych kartezjańskich mamy:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\phi = \arcsin \frac{z}{r}$$

2 Zadanie optymalizacji

Należy zminimalizować sumę kwadratów funkcji $f(x)$ wyrażających błąd pomiędzy zmierzonym a rzeczywistym czasem dotarcia sygnału z satelit do odbiornika.

$$\min \|f(x)\|_2^2 = \min(f(x_1)^2 + \dots + f(x_5)^2)$$

dla funkcji:

$$f(x_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - t_i C$$

gdzie:

- x, y, z to wsp. szukanego punktu
- x_i, y_i, z_i to wsp. odpowiedniego satelity
- t_i to zmierzony czas dotarcia sygnału z satelity
- C to stała określająca prędkość światła

3 Jakobian

Ponieważ współrzędne satelitów zdefiniowane są w układzie "geograficznym" a zadanie optymalizacji jest zdefiniowane w układzie współrzędnych kartezjańskich zastosowano jacobian z wierszami postaci:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{x - x_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}} & \frac{y - y_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}} & \frac{z - z_i}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}} \end{bmatrix}$$

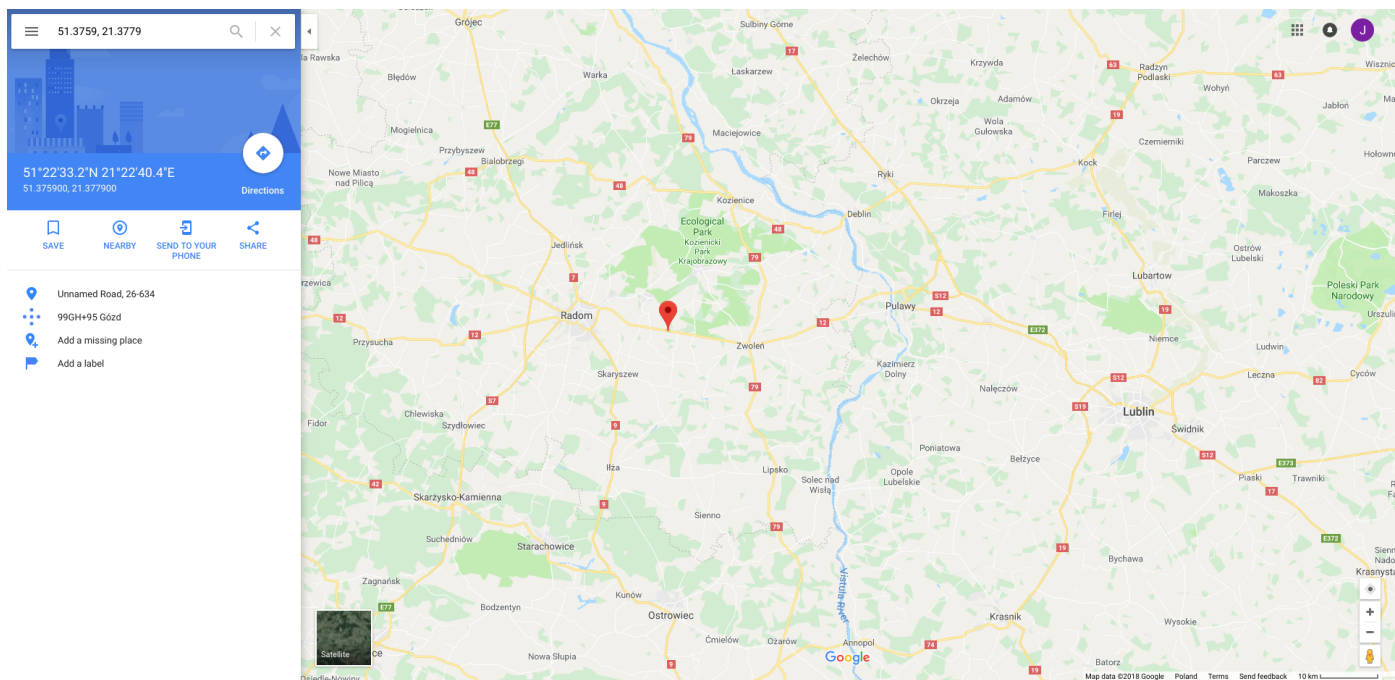
4 Rozwiązanie zadania

Oba programy (Matlab oraz AMPL) wyznaczyły to samo położenie

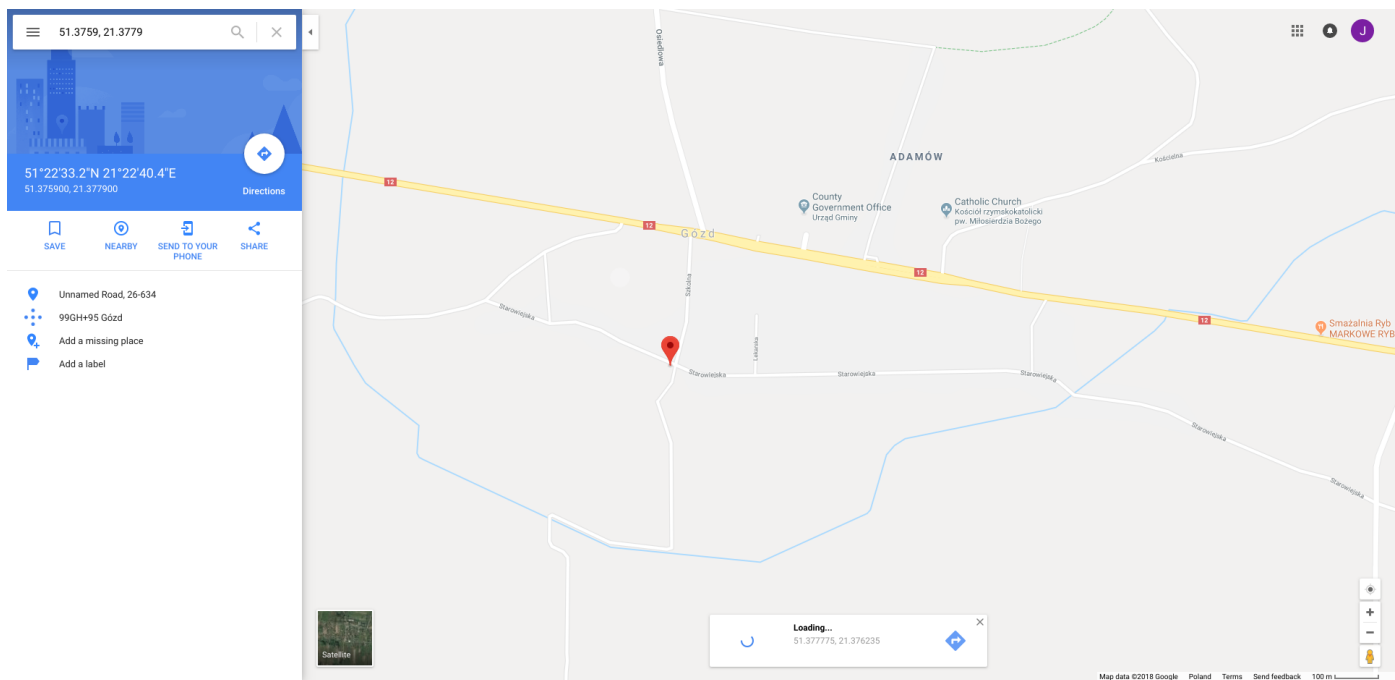
$$\theta = 51.3759, \phi = 21.3779$$

i tą samą wysokość nad poziomem morza (172 m).

5 Google Maps



Rysunek 1: Widok daleki znalezionego punktu



Rysunek 2: Widok miejscowości znalezionego punktu

6 Zmiana parametrów optymalizacji

Na początku zastosowano domyślny algorytm Trust Region Reflective, który zatrzymywał się po 22 iteracjach.

Algorytm Levenberga-Marquardta (stosowany do dalszych badań) zatrzymał się po 4 iteracjach, co świadczy o jego znacznej przewadze. Po podaniu jacobianu algorytm zatrzymał się także po 4 iteracjach. Algorytm generuje większy błąd względny.

Wyniki błędów algorytmu dla różnych parametrów przedstawia tabela 1. Co oczywiste przy zaburzaniu danych wejściowych algorytmów wynik optymalizacji też się zmieniał.

6.1 Zmiana punktu startowego

Po zadaniu punktu startowego, którego współrzędne były bardzo dużymi liczbami liczba iteracji algorytmu zwiększyła się do 5. Uzyskany wynik zawsze był taki sam.

6.2 Zmiana warunku stopu

Domyślna tolerancja pozwala na uzyskanie dość dokładnych wyników. Wykonywane jest wtedy 4 iteracji algorytmu. Od 3 iteracji możemy uznać, że uzyskane wyniki są dość dokładne.

Zmniejszanie domyślnej tolerancji algorytmu nie spowodowało wykonania dodatkowych iteracji algorytmu. Oznacza to, że błędy numeryczne nie pozwalają uzyskać większej dokładności niż domyślna.

Zwiększanie tolerancji do 10^{-5} nie spowodowało znaczącej zmiany wyniku optymalizacji. Dalsze zmniejszanie tolerancji spowodowało zmniejszenie dokładności przez fakt wykonania mniejszej liczby iteracji algorytmu. Ustawienie tolerancji większej od 1 powoduje, że wykonanie algorytmu nie ma sensu.

6.3 Zaburzanie danych wejściowych

Do eksperymentów zaburzano parametry piątego satelity. Zmiana szerokości i długości geograficznej do 10 % nie powoduje dużej zmiany wyniku. Większe zmiany powodują znaczne zmiany. Algorytm jest dużo bardziej czuły na zmiany czasu przesyłu. Zmiana o 5 % powoduje znaczny błąd optymalizacji. Wynika to z definicji problemu optymalizacji. Promień sfery definiowany czasem ma duży wpływ na całe obliczenia.

L. p.	Zmiana θ	Zmiana ϕ	Zmiana t	Inne zmiany	Liczba iteracji	Błąd względny
1	b. z.	b. z.	b. z.	Algorytm True Reflective Region	22	4.1633e-17
2	$\times -1.2$	b. z.	b. z.	Algorytm True Reflective Region	22	6.9544e+10
3	b. z.	b. z.	b. z.	b. z.	4	4.0503e-09
4	$\times -1.2$	b. z.	b. z.	b. z.	4	2.1051e+13
5	$\times -1.5$	b. z.	b. z.	b. z.	4	5.8005e+13
6	$\times 1.2$	b. z.	b. z.	b. z.	4	2.9344e+09
7	$\times 1.5$	b. z.	b. z.	b. z.	4	1.9436e+10
8	b. z.	$\times -1.2$	b. z.	b. z.	4	3.8917e+08
9	b. z.	$\times 1.5$	b. z.	b. z.	4	2.9201e+09
10	b. z.	b. z.	$\times 1.05$	b. z.	4	1.9876e+11
11	b. z.	b. z.	$\times 1.2$	b. z.	4	3.3333e+12
12	$\times 1.2$	$\times 1.2$	$\times 1.2$	b. z.	4	5.9120e+11
13	b. z.	b. z.	b. z.	Zmiana punktu startowego	5	4.0503e-09
14	b. z.	b. z.	b. z.	Zwiększenie tolerancji	3	2.0317e+09

Tabela 1: Eksperymenty zaburzające parametry wejściowe funkcji lsqnonlin() dla piątego satelity.