

# MGR - Raport 1

Jakub Postępski

17 kwietnia 2019

## 1 Wprowadzenie

Należy skompensować siłę grawitacji w układzie stawu obrotowego sterowanego impedancyjnie. Rozwiązaniem jest określenie masy a następnie dodanie odpowiednich sił do układu w celu kompensacji siły grawitacji.

Obiektem jest układ wahadła sterowanego prawem sterowania impedancyjnego (rys. 1). Na końcu nieważkiego ramienia  $r$  zawieszona jest punktowa masa  $m$  której grawitację należy skompensować. Algorytm sterowania symuluje sprężynę oraz amortyzator w osi obrotu wahadła i można do niego dodać moment  $u$ . Przyjmujemy że dla użytkownika dostępne są pomiary położenia  $q$ , prędkości  $\dot{q}$ , przyspieszenia  $\ddot{q}$ . Dodatkowo przyjmujemy, że w osi obrotu znajduje się czujnik FTS odczytujący siłę  $F$  i moment siły  $\tau$ .

Układ z inercją  $I$  możemy opisać przy pomocy równania:

$$\tau = I\ddot{q} = mr^2\ddot{q} = kq + d\dot{q} + mgr \cos(q) + Iu \quad (1)$$

Model obiektu można opisać układem równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & \frac{d}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \frac{mg \cos(q)}{I} + u \right) \quad (2)$$

gdzie:

- $q$  - kąt obrotu  $[rad]$
- $k$  - sztywność
- $b$  - tłumienie
- $m$  - masa przedmiotu  $[kg]$
- $g$  - przyspieszenie ziemskie  $[\frac{m}{s^2}]$
- $u$  - moment który można zewnętrznie dodać do układu  $[Nm]$

Układ możemy więc zapisać w standardowej postaci

$$\dot{q} = \mathbf{A}q + \mathbf{B}u(t) \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{I} & \frac{d}{I} \end{bmatrix} \quad (4)$$

oraz:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Siła działająca na układ jest sumą siły grawitacji i siły odśrodkowej układu. Siłę grawitacji możemy opisać wzorem:

$$F_g = mg \quad (6)$$

a siłę odśrodkową odpowiednio w osi  $X$  oraz  $Y$  wzorami:

$$F_{ox} = \cos m(\dot{q}^2 r) \quad (7)$$

$$F_{oy} = \sin m(\dot{q}^2 r) \quad (8)$$

Dlatego odczyty czujnika w dwóch osiach możemy opisać wzorami:

$$F_x = F_{ox} = \cos(q)m\dot{q}^2 r \quad (9)$$

$$F_y = F_g + F_{oy} = mg + \sin(q)m\dot{q}^2 r \quad (10)$$

## 2 Dyskretyzacja układu

Po zdyskretyzowaniu metodami ZOH z okresem próbkowania  $T$  otrzymujemy układ:

$$q(t+1) = \mathbf{A_d}q(t) + \mathbf{B_d}u(t) \quad (11)$$

Dyskretyzację odczytów FTS oraz innych równań można przeprowadzić korzystając z dyskretyzacji metodą Eulera ( $\dot{q} \approx \frac{q(t)-q(t-1)}{T}$ ).

$$F_{dx}(t) = \cos(q)m\left(\frac{q(t)-q(t-1)}{T}\right)^2 r \quad (12)$$

$$F_{dy}(t) = mg + \sin(q)m\left(\frac{q(t)-q(t-1)}{T}\right)^2 r \quad (13)$$

oraz z równania 1

$$\tau(t) = kq(t) + d\frac{q(t)-q(t-1)}{T} + Iu + \cos(q)mg \quad (14)$$

Podobnie można dyskretyzować inne równania i w dalszej części raportu zastosowanie metody nie będzie pokazywane wprost. We wszystkich symulacjach przedstawionych dalej użyto dyskretnych wersji przedstawionych równań.

## 3 Estymacja nieznanych parametrów

W celu skompensowania grawitacji zawieszanej masy należy poznać parametry opisujące tę masę. Uznano że do opisu wystarczą typowe i powszechnie używane zmienne. W opisywanym układzie nie są znane takie wielkości jak inercja, masa oraz środek ciężkości.

Przy założeniu, że masa jest punktowa wiemy że inercję tej masy opisuje zależność

$$I = mr^2 \quad (15)$$

W trakcie opisu metod estymacji parametrów starano się w miarę możliwości nie korzystać z tej zależności. Dzięki takiemu podejściu w przyszłości będzie można wykorzystać znalezione metody w celu estymacji mas niepunktowych o nierównomiernym rozkładzie.

Posiadając estymację promienia  $r$  i wykorzystując pozycję  $q$  jesteśmy w stanie określić pozycję zawieszoną w układzie masy i jej środek ciężkości.

### 3.1 Estymacja masy przy wykorzystaniu FTS

Korzystając z równania 10 można opisać siły działające na czujnik w osi  $Y$  w chwili  $i$  jako:

$$F_{yi} = m(g + \dot{q}_i^2 r \sin(q_i)) \quad (16)$$

Zakładając błędy odczytu  $e$  dostajemy próbkę postaci:

$$\hat{F}_{yi} + e_i = F_{yi} \quad (17)$$

Posiadając  $n$  próbek możemy więc sformułować zadanie optymalizacji nieliniowej z parametrami  $m$  oraz  $r$  takie że:

$$\begin{aligned} \min_{m,r} \quad & \sum_{i=1}^n \|e_i\| = \sum_{i=1}^n \|\hat{F}_{yi} - F_{yi}\| \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & F_{yi} = m(g + \dot{q}_i^2 r \sin(q_i)), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

Analogicznie można rozwiązać problem estymacji inercji  $I$  wykorzystując równanie 1 i sformułować zadanie optymalizacji:

$$\begin{aligned} \min_I \quad & \sum_{i=1}^n \|e_i\| = \sum_{i=1}^n \|\hat{\tau}_i - \tau_i\| \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \tau_i = I\ddot{q}_i^2, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

### 3.2 Estymacja inercji z macierzy układu

Ponieważ macierz  $\mathbf{B}$  ma tylko jeden wyraz różny od zera  $\mathbf{B}_d$  jest uzyskiwana w prosty sposób i można przyjąć że:

$$\mathbf{B}_d \approx \mathbf{B}T \quad (20)$$

Przekształcając równanie 11 i stosując pseudoinwersję macierzy otrzymujemy równanie macierzowe:

$$\mathbf{A}_d = (X(t+1) - \mathbf{B}_d u(t))(X(t))^{pinv} \quad (21)$$

przy założeniu  $n$  ostatnich próbek zmiennych stanów układu

$$X(t) = [x(t) \quad x(t-1) \quad \dots \quad x(t-n)] \quad (22)$$

Po obliczeniu estymacji  $\mathbf{A}_d$  metodą ZOH wyliczamy estymację macierzy  $\mathbf{A}$  otrzymując macierz

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Po przyrównaniu jej do macierzy  $\mathbf{A}$  możemy wyliczyć inercję z równań:

$$\hat{I}_1 = \frac{-k}{a_{21}} \quad (24)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{-b}{a_{22}} \quad (25)$$

i ostatecznie przyjąć estymację:

$$\hat{I} = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2}{2} \quad (26)$$

Metoda nie pozwala na uzyskanie wszystkich parametrów lecz w przypadku braku czujnika FTS lub uzyskania z niego zaszumionych odczytów można uzyskać tą metodą zadowalające wyniki.

## 4 Kompensacja grawitacji

Kompensacja polega na dodaniu do układu momentu siły który przeciwdziała sile grawitacji masy. Z równania 1 wynika postać sterowania  $u$  kompensującego siłę grawitacji. Ponieważ zależy nam na tym aby pozbyć się członu związanego z macierzą  $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \frac{mgr \cos(q)}{I} + u \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

możemy przyjąć sterowanie:

$$u_s(t) = -\frac{mgr \cos(q(t))}{I} \quad (28)$$

Masę  $m$ , promień  $r$  oraz inercję  $I$  uzyskujemy z estymacji przedstawionych w sekcji 3.1.

Algorytm kompensacji nie powinien wprowadzać gwałtownych zmian w prezentowanym układzie więc sterowanie kompensujące wpływ grawitacji jest załączany stopniowo. W celu uzyskania takiego efektu sterowanie jest mnożone przez odpowiednią funkcję trapezową. Dla czasu  $t_p$  początku załączania algorytmu i  $t_k$  końca załączania mamy:

$$u(t) = \min \left( \frac{\max(t - t_p, 0)}{t_k - t_p}, 1 \right) u_s(t) \quad (29)$$

## 5 Realizacja praktyczna

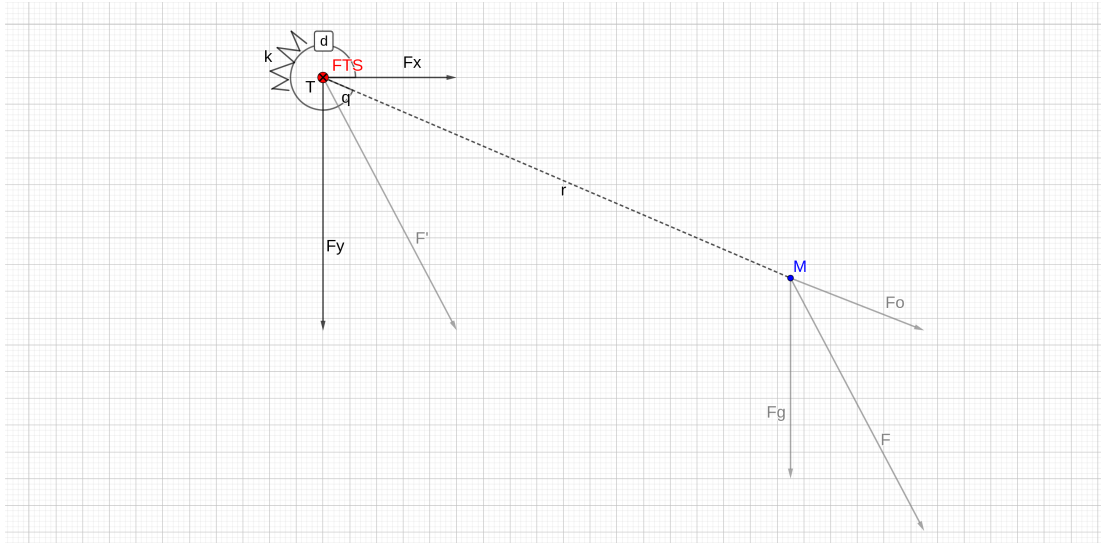
Wszystkie symulacje układu można wykonać wykorzystując równania dyskretne (np. rys. 2). W celu emulacji zakłóceń w każdym kroku symulacji zmiennych stanu układu dodawany jest szum biały. Zadane problemy optymalizacji nieliniowej rozwiązywano algorytmem Levenberga-Marquardta. Algorytm służącym do obliczania pseudoinwersji był algorytm Moora-Penrose'a.

Estymacja parametru promienia  $r$  z czujnika FTS zaczyna być obarczona błędem jeśli załączony zostaje algorytm kompensacji grawitacji. Z uwagi na ten fakt zdecydowano się na podział działania programu na dwie fazy. W pierwszej poznawane są parametry modelu. W drugiej zapamiętane wcześniej promień służy do wyliczania momentu potrzebnego do kompensacji grawitacji (rys. 5). Możemy przyjąć takie założenie, gdyż w rzeczywistości jeśli umieścimy masę w układzie nie będzie ona znacznie zmieniać swojego promienia. Estymacja masy i inercji w obu metodach jest nieczuła na opisany problem. Powoduje to oscylacje widoczne w układzie. O tym jak szybko układ z załączoną kompensacją grawitacji się ustabilizuje decydują wartości zmiennych stanu układu w momencie rozpoczęcia kompensacji.

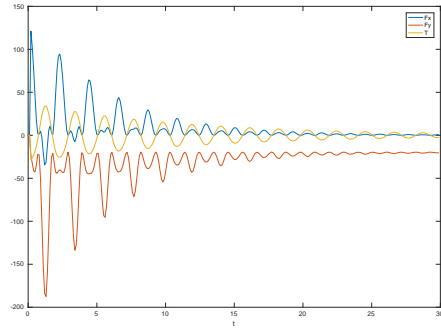
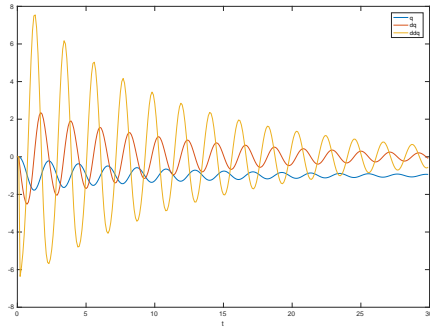
## 6 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm pozwala sprawnie kompensować grawitację masy układu.

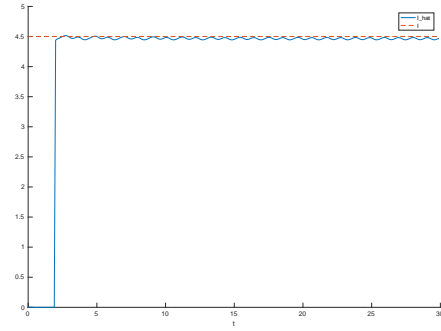
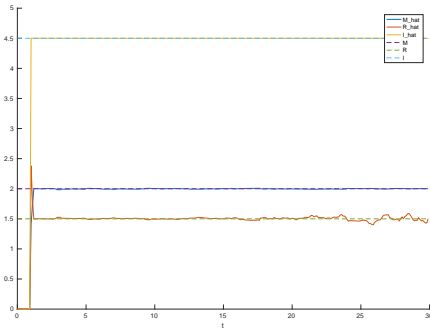
Od algorytmu kompensacji siły oczekujemy, że układ powinien się zachowywać tak jakby nie była na nim zawieszona żadna masa (rys. 3). Kompensacja (rys. 4) nie uwzględnia energii układu która powstała przed załączeniem kompensacji, lecz człon amortyzatora pozwala na szybkie wytracenie tej energii. Zmodyfikowany algorytm dwufazowy pozwala w szybki i skuteczny sposób radzić sobie z przedstawionym problemem jednak jego wadą pozostaje opóźnienie potrzebne na to aby zidentyfikować parametry masy umieszczonej w układzie.



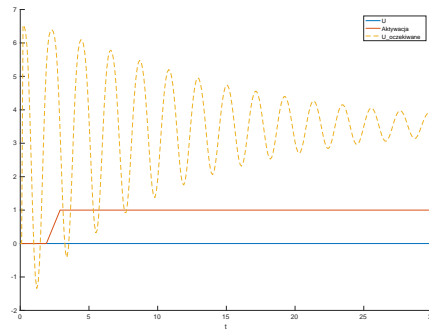
Rysunek 1: Schemat badanego układu. Kolorem niebieskim zaznaczono masę  $m$  zawieszoną na ramieniu  $r$ . Kolorem czerwonym zaznaczono punkt mocowania ramienia i umiejscowienia czujnika FTS. Kolorem czarnym pokazano siły odczytywane z czujnika sił, moment siły  $\tau$ , pozycję  $q$  sprężyny  $k$  oraz amortyzatora  $d$ . Kolorem szarym zaznaczono rzeczywiste siły układu.



(a) Stan układu. Pozycja ( $q$ ), prędkość ( $dq$ ) i przyśpieszenie ( $ddq$ ). (b) Odczyty czujnika FTS. Siła odczytana w osi  $OX$  ( $F_x$ ), w osi  $OY$  ( $F_y$ ) oraz moment siły ( $T$ ).

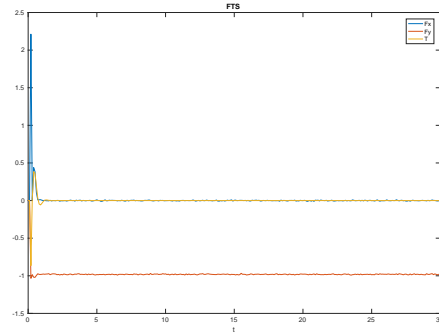
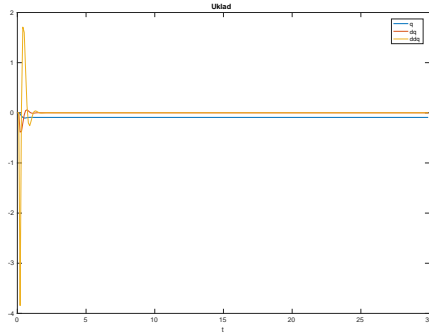


(c) Estymacja parametrów z czujnika sił. Masa ( $M_{\hat{}}$ ), promień ( $R_{\hat{}}$ ) i inercja ( $I_{\hat{}}$ ). (d) Estymacja inercji ( $I_{\hat{}}$ ) z równań stanu. Przerywane linie pokazują rzeczywiste wartości parametrów. Wąska linia pokazuje rzeczywiste wartości parametru.

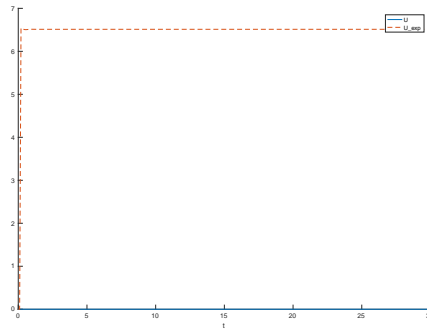


(e) Sterowanie ( $U$ ). Przerywana linia prezentuje sterowanie potrzebne w celu kompensacji grawitacji.

Rysunek 2: Symulacja układu z parametrami  $T = 0.01$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1.5$ ,  $k = 16$ ,  $b = 2$ . Brak kompensacji grawitacji.

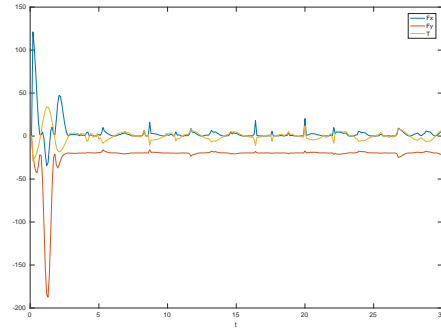
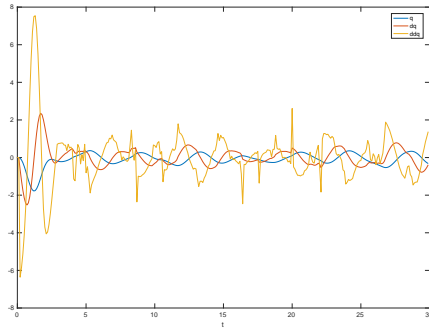


(a) Stan układu. Pozycja ( $q$ ), prędkość ( $dq$ ) i przyśpieszenie ( $ddq$ ). (b) Odczyty czujnika FTS. Siła odczytana w osi  $OX$  ( $F_x$ ), w osi  $OY$  ( $F_y$ ) oraz moment siły ( $T$ ).

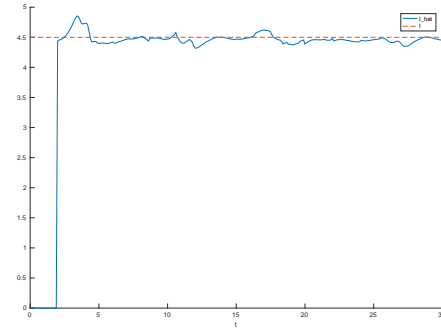
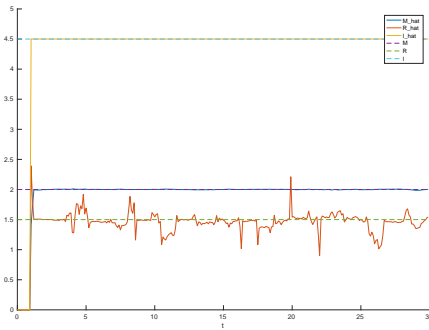


(c) Sterowanie ( $U$ ). Przerywana linia prezentuje sterowanie potrzebne w celu kompensacji grawitacji.

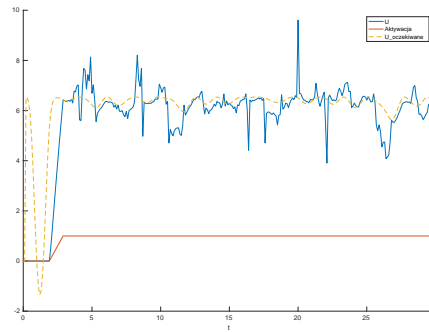
Rysunek 3: Symulacja układu z parametrami  $T = 0.01$ ,  $m = 0.1$ ,  $r = 1.5$ ,  $k = 16$ ,  $b = 2$ . Brak kompensacji grawitacji.



(a) Stan układu. Pozycja ( $q$ ), prędkość ( $\dot{q}$ ) i przyśpieszenie ( $\ddot{q}$ ). (b) Odczyty czujnika FTS. Siła odczytana w osi  $OX$  ( $F_x$ ), w osi  $OY$  ( $F_y$ ) oraz moment siły ( $T$ ).



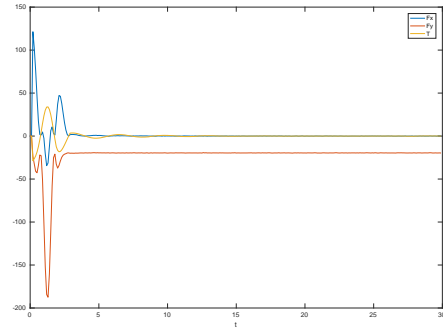
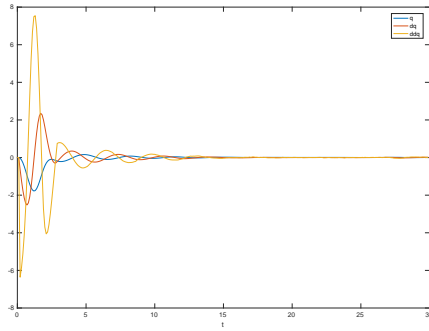
(c) Estymacja parametrów z czujnika sił. Masa ( $\hat{M}$ ), promień ( $\hat{R}$ ) i inercja ( $\hat{I}$ ). (d) Estymacja inercji ( $\hat{I}$ ) z równań stanu. Przerywane linie pokazują rzeczywiste wartości parametrów. (e) Estymacja inercji ( $\hat{I}$ ) z równań stanu. Przerywane linie pokazują rzeczywiste wartości parametrów.



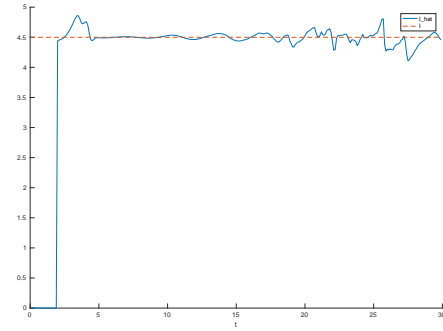
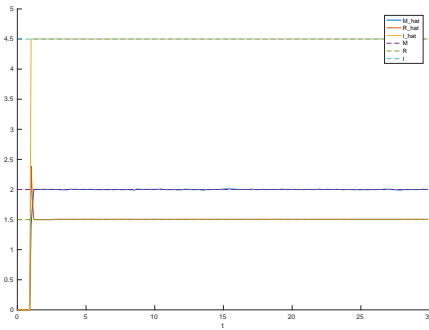
(e) Sterowanie ( $U$ ). Przerywana linia prezentuje sterowanie potrzebne w celu kompensacji grawitacji. Zaprezentowano funkcję aktywacji momentu kompensacji grawitacji.

Rysunek 4: Symulacja układu z parametrami  $T = 0.01$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1.5$ ,  $k = 16$ ,  $b = 2$ . Załączona kompensacja grawitacji. Parametry potrzebne do estymacji uzyskane z FTS.

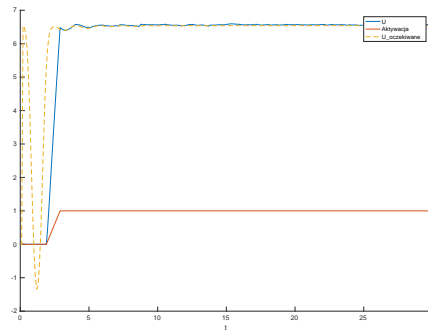




(a) Stan układu. Pozycja ( $q$ ), prędkość ( $dq$ ) i przyśpieszenie ( $ddq$ ). (b) Odczyty czujnika FTS. Siła odczytana w osi  $OX$  ( $F_x$ ), w osi  $OY$  ( $F_y$ ) oraz moment siły ( $T$ ).



(c) Estymacja parametrów z czujnika sił. Masa ( $M_{\hat{}}$ ), promień ( $R_{\hat{}}$ ) i inercja ( $I_{\hat{}}$ ). (d) Estymacja inercji ( $I_{\hat{}}$ ) z równań stanu. Przerywane linie pokazują rzeczywiste wartości parametrów.



(e) Sterowanie ( $U$ ). Przerywana linia prezentuje sterowanie potrzebne w celu kompensacji grawitacji. Zaprezentowano funkcję aktywacji momentu kompensacji grawitacji.

Rysunek 5: Symulacja układu z parametrami  $T = 0.01$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1.5$ ,  $k = 16$ ,  $b = 2$ . Załączona kompensacja grawitacji. Po pierwszych 2 sekundach symulacji zamrożono estymację parametru  $r$ . Parametry potrzebne do estymacji uzyskane z FTS.