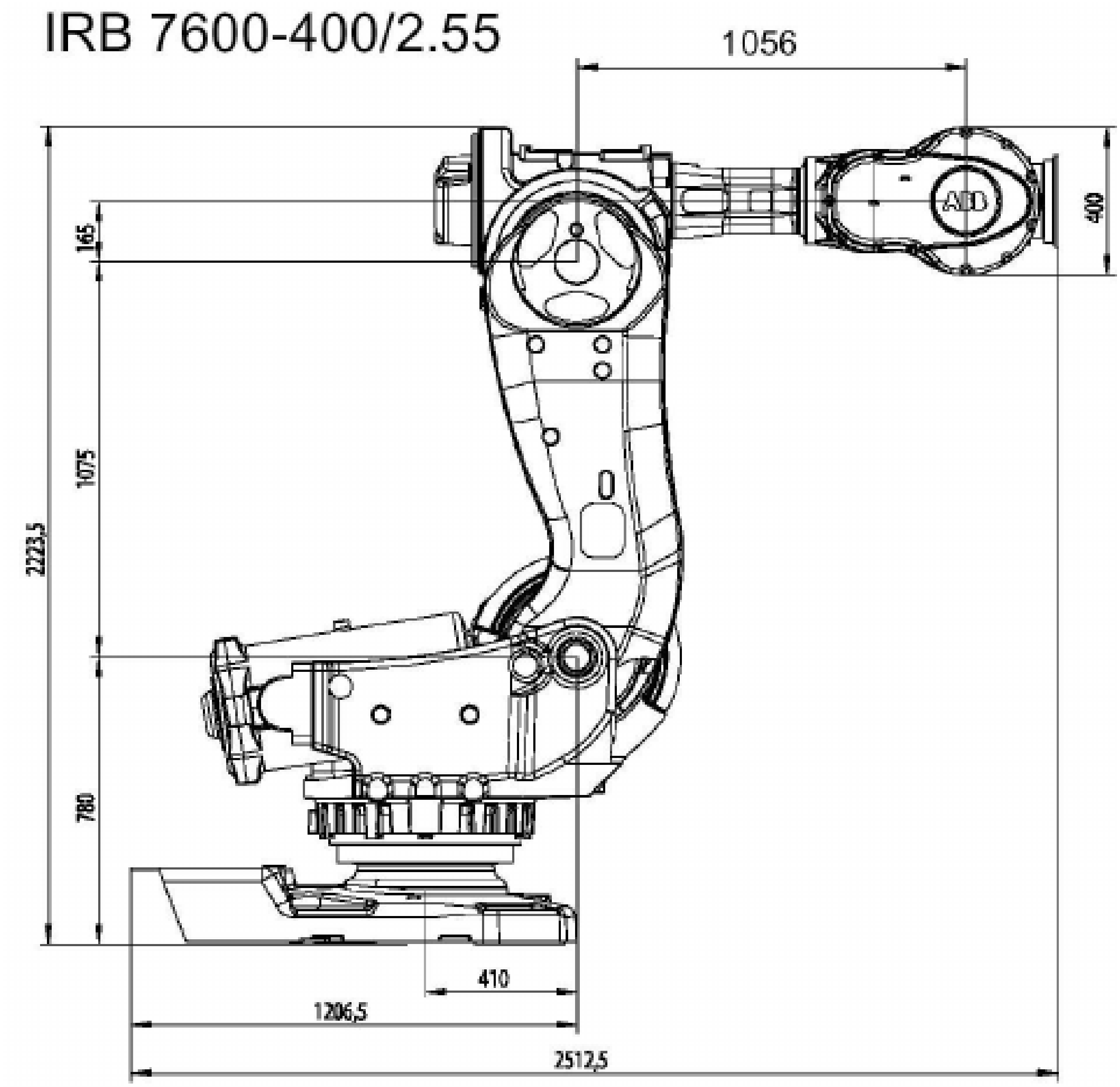
Projekt MORO

Jakub Postępski

3 stycznia 2019

1 Robot

Robot to ABB IRB 7600.



Rysunek 1: Robot ABB IRB 7600-400 z zaznaczonymi osiami

2 Parametry DH

L. p.	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	a_1	$\pi/2$	0	θ_2
3	a_2	0	0	θ_3
4	a_3	$\pi/2$	a_4	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6

Tabela 1: Parametry DH

Wartości parametrów:

$$a_1 = 410mm$$
$$a_2 = 1075mm$$
$$a_3 = 165mm$$
$$d_4 = 1056mm$$

3 Kinematyka prosta

Przejścia pomiędzy członami:

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3_4T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4_5T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Po wymnożeniu:

$$ {}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= -s_6(c_4 s_1 - s_4 c_1 c_{23}) + c_6(s_5 c_1 s_{23} + c_5(s_1 s_4 + c_4 c_1 c_{23})) \\
r_{12} &= -c_6(c_4 s_1 - s_4 c_1 c_{23}) - s_6(s_5 c_1 s_{23} + c_5(s_1 s_4 + c_4 c_1 c_{23})) \\
r_{13} &= -c_5 c_1 s_{23} + s_5(s_1 s_4 + c_4 c_1 c_{23}) \\
p_x &= a_1 c_1 + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_{23} + d_4 c_1 s_{23} \\
\\
r_{21} &= s_6(c_1 c_4 + s_4 s_1 c_{23}) + c_6(s_5 s_1 s_{23} - c_5(c_1 s_4 - c_4 s_1 c_{23})) \\
r_{22} &= c_6(c_1 c_4 + s_4 s_1 c_{23}) - s_6(s_5 s_1 s_{23} - c_5(c_1 s_4 - c_4 s_1 c_{23})) \\
r_{23} &= -c_5 s_1 s_{23} - s_5(c_1 s_4 - c_4 s_1 c_{23}) \\
p_y &= a_1 s_1 + a_2 s_1 c_2 + a_3 s_1 c_{23} + d_4 s_1 s_{23} \\
\\
r_{31} &= s_4 s_6 s_{23} - c_6(s_5 c_{23} - c_4 c_5 s_{23}) \\
r_{32} &= c_6 s_4 s_{23} + s_6(s_5 c_{23} - c_4 c_5 s_{23}) \\
r_{33} &= c_5 c_{23} + c_4 s_5 s_{23} \\
p_z &= a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

4 Kinematyka odwrotna

Tworzymy dodatkową macierz pośrednią:

$$
{}^1_6\mathcal{T} = \begin{bmatrix}
s_4 s_6 c_{23} + c_6(s_5 s_{23} + c_4 c_5 c_{23}) & s_4 c_6 c_{23} - s_6(s_5 s_{23} + c_4 c_5 c_{23}) & c_4 s_5 c_{23} - c_5 s_{23} & a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} \\
c_4 s_6 - c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 + c_5 s_4 s_6 & -s_4 s_5 & 0 \\
s_4 s_6 s_{23} - c_6(s_5 c_{23} - c_4 c_5 s_{23}) & c_6 s_4 s_{23} + s_6(s_5 c_{23} - c_4 c_5 s_{23}) & c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{2}
$$

możemy wyprowadzić:

$$
\begin{aligned}
&{}^0_1\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^0_6\mathcal{T}_d = \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1 r_{11} + s_1 r_{21} & c_1 r_{12} + s_1 r_{22} & c_1 r_{13} + s_1 r_{23} & c_1 p_x + s_1 p_y \\ c_1 r_{21} - s_1 r_{11} & c_1 r_{22} - s_1 r_{12} & c_1 r_{23} - s_1 r_{13} & c_1 p_y - s_1 p_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= {}^1_6\mathcal{T}
\end{aligned}
$$

W dalszej części pracy zakładamy, że tam gdzie jest wykonywane dzielenie, odpowiednie wyrażenia są nierówne zeru.

4.1 θ_1

Bierzemy równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{24}$:

$$
\begin{aligned}
&c_1 p_y - s_1 p_x = 0 \\
&\frac{s_1}{c_1} = \frac{p_y}{p_x} \\
&\theta_1 = \arctan \frac{p_y}{p_x}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

4.2 θ_2

Bierzemy równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{14}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{34}$:

$$
\begin{cases}
a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} = c_1 p_x + s_1 p_y \\
a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23} = p_z
\end{cases}
\tag{4}
$$

i wprowadzając stałe:

$$
\begin{cases}
E = c_1 p_x + s_1 p_y - a_1 \\
F = p_z
\end{cases}
\tag{5}
$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = E - a_2c_2 \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = F - a_2s_2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} (a_3c_{23})^2 + 2a_3d_4c_{23}s_{23} + (d_4s_{23})^2 = E^2 - 2Ea_2c_2 + (a_2c_2)^2 \\ (a_3s_{23})^2 - 2a_3d_4s_{23}c_{23} + (d_4c_{23})^2 = F^2 - 2Fa_2s_2 + (a_2s_2)^2 \end{cases} \tag{7}$$

dodając stronami i przekształcając dalej:

$$a_3^2 + d_4^2 = E^2 + F^2 - 2Ea_2c_2 - 2Fa_2s_2 + a_2^2 \tag{8}$$

podstawiając:

$$K = E^2 + F^2 + a_2^2 - a_3^2 - d_4^2 \tag{9}$$

oraz stosując współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} 2Ea_2 = Rs_\omega \\ 2Fa_2 = Rc_\omega \end{cases} \tag{10}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &R = \sqrt{4E^2a_2^2 + 4F^2a_2^2} \\ &K = 2Ea_2c_2 + 2Fa_2s_2 = Rs_\omega c_2 + Rc_\omega s_2 \end{aligned} \tag{11}$$

stosując wzór na sumę sinusów oraz jedynkę trygonometryczną:

$$\begin{aligned} &K = R\sin(\theta_2 + \omega) \\ &\sin(\theta_2 + \omega) = \tfrac{K}{R} \\ &\cos(\theta_2 + \omega) = \pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2} \end{aligned} \tag{12}$$

zatem:

$$\begin{aligned} &\tan(\theta_2 + \omega) = \frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}} \\ &\theta_2 + \omega = \arctan\frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}} \\ &\theta_2 = \arctan\frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}} - \arctan\frac{2Ea_2}{2Fa_2} \end{aligned} \tag{13}$$

4.3 θ_3

Wykorzystując równania nr 4:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = E - a_2c_2 \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = F - a_2s_2 \end{cases} \tag{14}$$

należy podstawić:

$$\begin{cases} M = E - a_2c_2 \\ N = F - a_2s_2 \end{cases} \tag{15}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = M \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = N \end{cases} \tag{16}$$

przekształcając dalej:

$$\begin{aligned} &c_{23} = \frac{M - d_4s_{23}}{a_3} \\ &a_3s_{23} - d_4\frac{M - d_4s_{23}}{a_3} = N \\ &a_3^2s_{23} - d_4(M - d_4s_{23}) = Na_3 \\ &s_{23} = \frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2} \\ &c_{23} = \frac{M - d_4(\frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2})}{a_3} \end{aligned} \tag{17}$$

dzieląc s_{23} i c_{23} przez siebie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tan(\theta_2+\theta_3) &= \frac{s_{23}}{c_{23}} = \frac{\dfrac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2}}{\dfrac{M-d_4(\frac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2})}{a_3}} \\
\tan(\theta_2+\theta_3) &= \frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)}
\end{aligned} \tag{18}$$

oraz finalnie:

$$\theta_3 = \arctan\frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)} - \theta_2 \tag{19}$$

4.4 θ_4

Wykorzystując równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{23}$:

$$-s_4 s_5 = c_1 r_{23} - s_1 r_{13} \tag{20}$$

przy założeniu $s_5 \neq 0$ mamy z jedynki trygonometrycznej

$$\begin{aligned}
s_4 &= \frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5} \\
c_4 &= \pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2} \\
\tan(\theta_4) &= \frac{\dfrac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2}}
\end{aligned} \tag{21}$$

stąd:

$$\theta_4 = \arctan\frac{\dfrac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2}} \tag{22}$$

4.5 θ_5

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{13}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{33}$:

$$\begin{cases} c_4 s_5 c_{23} - c_5 s_{23} = c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} = r_{33} \end{cases} \tag{23}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} P = c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ Q = r_{33} \end{cases} \tag{24}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} c_4 s_5 c_{23} - c_5 s_{23} = P \\ c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} = Q \end{cases} \tag{25}$$

przekształcając dalej:

$$\begin{aligned}
& c_4 s_5 = \frac{Q - c_5 c_{23}}{s_{23}} \\
& c_{23}\frac{Q - c_5 c_{23}}{s_{23}} - c_5 s_{23} = P \\
& c_{23}(Q - c_5 c_{23}) - c_5 s_{23}^2 = P s_{23} \\
& c_5(c_{23}^2 + s_{23}^2) = Q c_{23} - P s_{23} \\
& c_5 = Q c_{23} - P s_{23}
\end{aligned} \tag{26}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} s_5 &= \pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2} \\ \tan(\theta_5) &= \frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}} \end{aligned} \tag{27}$$

i finalnie:

$$\theta_5 = \arctan\frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}} \tag{28}$$

(Wartości c_{23} oraz s_{23} wyznaczone zostały podczas wyznaczania θ_3).

4.6 θ_6

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4s_6 - c_5c_6s_4 = c_1r_{21} - s_1r_{11} \\ c_4c_6 + c_5s_4s_6 = c_1r_{22} - s_1r_{12} \end{cases} \tag{29}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} S = c_1r_{21} - s_1r_{11} \\ T = c_1r_{22} - s_1r_{12} \end{cases} \tag{30}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} c_4s_6 - c_5c_6s_4 = S \\ c_4c_6 + c_5s_4s_6 = T \end{cases} \tag{31}$$

zakładając $s_5 \neq 0$ i przekształcając:

$$\begin{aligned} s_6 &= \frac{S + c_5c_6s_4}{c_4} \\ c_4c_6 + c_5s_4&\frac{S+c_5c_6s_4}{c_4} = T \\ c_4^2c_6 + c_5s_4&(S + c_5c_6s_4) = Tc_4 \\ c_6 &= \frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2} \end{aligned} \tag{32}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} s_6 &= \pm\sqrt{1-\left(\frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2}\right)^2} \\ \tan(\theta_6) &= \frac{\pm\sqrt{1-\left(\frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2}\right)^2}}{\frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2}} \end{aligned} \tag{33}$$

i finalnie:

$$\theta_6 = \arctan\frac{\pm\sqrt{1-\left(\frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2}\right)^2}}{\frac{Tc_4 - Sc_5s_4}{s_4^2c_5^2 + c_4^2}} \tag{34}$$

4.7 Osobliwość $\theta_5 = 0$

Osobliwość która wynika z zależności: $s_5 = 0 \Rightarrow \theta_5 = 0$ pozwala uzyskać uproszczony układ równań:

$$\begin{aligned} s_5 &= 0 \\ c_5 &= 1 \end{aligned} \tag{35}$$

więc mamy:

$${}^0_1\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^0_6\mathcal{T}_d = {}^1_6\mathcal{T}^* = \begin{bmatrix} s_4s_6c_{23} + c_4c_6c_{23} & s_4c_6c_{23} - c_4s_6c_{23} & -s_{23} & a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23} \\ c_4s_6 - s_4c_6 & c_4c_6 + s_4s_6 & 0 & 0 \\ s_4s_6s_{23} + c_4c_6s_{23} & c_6s_4s_{23} - c_4s_6s_{23} & c_{23} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_4c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

można wtedy wykorzystać równania ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - s_4 c_6 = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ c_4 c_6 + s_4 s_6 = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases} \tag{37}$$

korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy:

$$\begin{cases} \sin(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ \cos(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases} \tag{38}$$

stąd:

$$\theta_6 - \theta_4 = \arctan \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{c_1 r_{22} - s_1 r_{12}} \tag{39}$$

w takiej sytuacji powinniśmy przyjąć:

$$\theta_4 = \theta_4^{poprzednie} \tag{40}$$