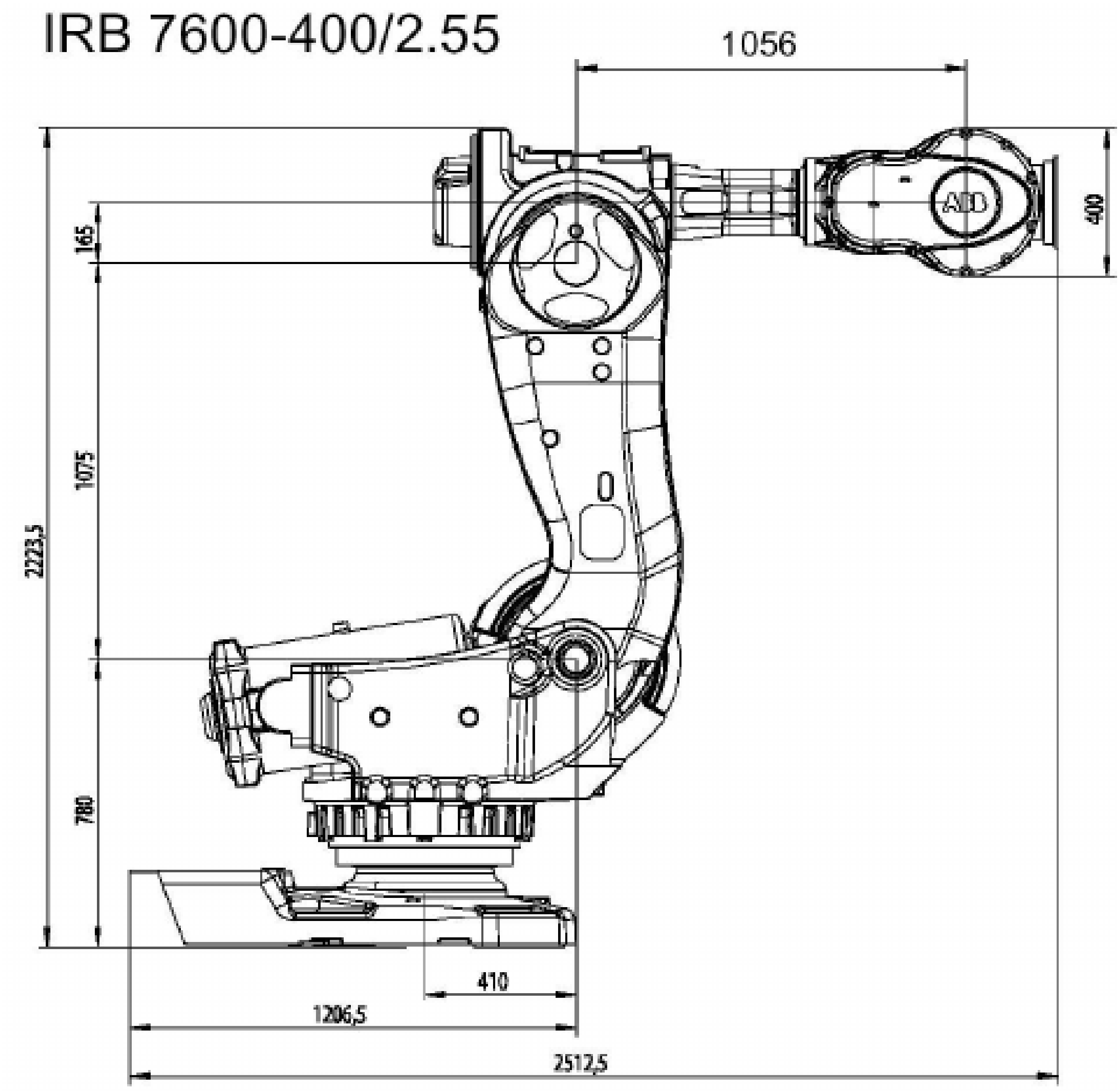
Projekt MORO

Jakub Postępski

3 stycznia 2019

1 Robot

Robot to ABB IRB 7600.



Rysunek 1: Robot ABB IRB 7600-400 z zaznaczonymi osiami

2 Parametry DH

L. p.	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	a_1	$\pi/2$	0	θ_2
3	a_2	0	0	θ_3
4	a_3	$\pi/2$	a_4	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6

Tabela 1: Parametry DH

Wartości parametrów:

$$a_1 = 410mm$$
$$a_2 = 1075mm$$
$$a_3 = 165mm$$
$$d_4 = 1056mm$$

3 Kinematyka prosta

Przejścia pomiędzy członami:

$$
{}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3_4T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^4_5T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^5_6T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Po wymnożeniu:

$$
{}^0_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

gdzie:

$$
\begin{gathered}
r_{11} = c_1(c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6) - s_1(c_4s_6 - s_4c_5c_6) \\
r_{12} = c_1(c_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) - s_{23}s_5s_6) - s_1(s_4c_5s_6 + c_4s_6) \\
r_{13} = c_1(c_{23}c_4s_5) + s_1s_4s_5 \\
r_{21} = s_1(c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6) + c_1(c_4s_6 - s_4c_5c_6) \\
r_{22} = s_1(c_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) - s_{23}s_5s_6) + c_1(s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
r_{23} = s_1(c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5) - c_1s_4s_5 \\
r_{31} = s_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\
r_{32} = s_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) + c_{23}s_5s_6 \\
r_{33} = s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 \\
p_x = c_1(c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2 + a_1)) \\
p_y = s_1(c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2 + a_1)) \\
p_z = s_{23}a_3 - c_{23}d_4 + s_2a_2
\end{gathered}
$$

4 Kinematyka odwrotna

Tworzymy dodatkową macierz pośrednią:

$$
{}^1_6\mathcal{T} = \begin{bmatrix} s_4s_6c_{23} + c_6(s_5s_{23} + c_4c_5c_{23}) & s_4c_6c_{23} - s_6(s_5s_{23} + c_4c_5c_{23}) & c_4s_5c_{23} - c_5s_{23} & a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23} \\ c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_4c_6 + c_5s_4s_6 & -s_4s_5 & 0 \\ s_4s_6s_{23} - c_6(s_5c_{23} - c_4c_5s_{23}) & c_6s_4s_{23} + s_6(s_5c_{23} - c_4c_5s_{23}) & c_4s_5s_{23} + c_5c_{23} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_4c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

możemy wyprowadzić:

$$
\begin{aligned}
&{}^0_1\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^0_6\mathcal{T}_d = \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ c_1r_{21} - s_1r_{11} & c_1r_{22} - s_1r_{12} & c_1r_{23} - s_1r_{13} & c_1p_y - s_1p_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= {}^1_6\mathcal{T}
\end{aligned}
$$

4.1 θ_1

Bierzemy równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{24}$:

$$\begin{aligned}
&c_1 p_y - s_1 p_x = 0\\
&\frac{s_1}{c_1} = \frac{p_y}{p_x}\\
&\theta_1 = \arctan\frac{p_y}{p_x}
\end{aligned}$$

4.2 θ_2

Bierzemy równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{14}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{34}$:

$$\begin{cases} a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23} = c_1p_x + s_1p_y \\ a_2s_2 + a_3s_{23} - d_4c_{23} = p_z \end{cases}$$

i wprowadzając stałe:

$$\begin{cases} E = c_1p_x + s_1p_y - a_1 \\ F = p_z \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = E - a_2c_2 \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = F - a_2s_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_3c_{23})^2 + 2a_3d_4c_{23}s_{23} + (d_4s_{23})^2 = E^2 - 2Ea_2c_2 + (a_2c_2)^2 \\ (a_3s_{23})^2 - 2a_3d_4s_{23}c_{23} + (d_4c_{23})^2 = F^2 - 2Fa_2s_2 + (a_2s_2)^2 \end{cases}$$

dodając stronami i przekształcając dalej:

$$a_3^2 + d_4^2 = E^2 + F^2 - 2Ea_2c_2 - 2Fa_2s_2 + a_2^2$$

podstawiając:

$$K = E^2 + F^2 + a_2^2 - a_3^2 - d_4^2$$

oraz stosując współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} 2Ea_2 = Rs_\omega \\ 2Fa_2 = Rc_\omega \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&R = \sqrt{4E^2a_2^2 + 4F^2a_2^2}\\
&K = 2Ea_2c_2 + 2Fa_2s_2 = Rs_\omega c_2 + Rc_\omega s_2
\end{aligned}$$

stosując wzór na sumę sinusów oraz jedynkę trygonometryczną:

$$\begin{aligned}
&K = R\sin(\theta_2 + \omega)\\
&\sin(\theta_2 + \omega) = \tfrac{K}{R}\\
&\cos(\theta_2 + \omega) = \pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2}
\end{aligned}$$

zatem:

$$\begin{aligned}
&\tan(\theta_2 + \omega) = \frac{\tfrac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2}}\\
&\theta_2 + \omega = \arctan\frac{\tfrac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2}}\\
&\theta_2 = \arctan\frac{\tfrac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2}} - \arctan\frac{2Ea_2}{2Fa_2}
\end{aligned}$$

4.3 θ_3

Wykorzystujemy równania z poprzedniej sekcji:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = E - a_2c_2 \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = F - a_2s_2 \end{cases}$$

należy podstawić:

$$\begin{cases} M = E - a_2c_2 \\ N = F - a_2s_2 \end{cases}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} a_3c_{23} + d_4s_{23} = M \\ a_3s_{23} - d_4c_{23} = N \end{cases}$$

przekształcając dalej:

$$\begin{aligned}
&c_{23} = \frac{M - d_4s_{23}}{a_3}\\
&a_3s_{23} - d_4\frac{M - d_4s_{23}}{a_3} = N\\
&a_3^2s_{23} - d_4(M - d_4s_{23}) = Na_3\\
&s_{23} = \frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2}\\
&c_{23} = \frac{M - d_4(\frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2})}{a_3}
\end{aligned}$$

dzieląc s_{23} i c_{23} przez siebie otrzymujemy

$$\tan(\theta_2+\theta_3) = \frac{s_{23}}{c_{23}} = \frac{\dfrac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2}}{\dfrac{M-d_4(\frac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2})}{a_3}}$$

$$\tan(\theta_2+\theta_3) = \frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)}$$

oraz finalnie:

$$\theta_3 = \arctan\frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)} - \theta_2$$

4.4 θ_4

Wykorzystując równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{23}$:

$$-s_4 s_5 = c_1 r_{23} - s_1 r_{13}$$

przy założeniu $s_5 \neq 0$ mamy z jedynki trygonometrycznej

$$s_4 = \frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}$$
$$c_4 = \pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2}$$
$$\tan(\theta_4) = \frac{\dfrac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2}}$$

stąd:

$$\theta_4 = \arctan\frac{\dfrac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1 r_{23} - s_1 r_{13}}{s_5})^2}}$$

4.5 θ_5

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{13}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{33}$:

$$\begin{cases} c_4 s_5 c_{23} - c_5 s_{23} = c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} = r_{33} \end{cases}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} P = c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ Q = r_{33} \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} c_4 s_5 c_{23} - c_5 s_{23} = P \\ c_4 s_5 s_{23} + c_5 c_{23} = Q \end{cases}$$

przekształcając dalej:

$$c_4 s_5 = \frac{Q - c_5 c_{23}}{s_{23}}$$
$$c_{23}\frac{Q - c_5 c_{23}}{s_{23}} - c_5 s_{23} = P$$
$$c_{23}(Q - c_5 c_{23}) - c_5 s_{23}^2 = P s_{23}$$
$$c_5(c_{23}^2 + s_{23}^2) = Q c_{23} - P s_{23}$$
$$c_5 = Q c_{23} - P s_{23}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$s_5 = \pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}$$
$$\tan(\theta_5) = \frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}}$$

i finalnie:

$$\theta_5 = \arctan\frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}}$$

(Wartości c_{23} oraz s_{23} wyznaczone zostały podczas wyznaczania θ_3).

4.6 θ_6

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - c_5 c_6 s_4 = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ c_4 c_6 + c_5 s_4 s_6 = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} S = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ T = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - c_5 c_6 s_4 = S \\ c_4 c_6 + c_5 s_4 s_6 = T \end{cases}$$

zakładając $s_5 \neq 0$ i przekształcając:

$$s_6 = \frac{S + c_5 c_6 s_4}{c_4}$$
$$c_4 c_6 + c_5 s_4 \frac{S + c_5 c_6 s_4}{c_4} = T$$
$$c_4^2 c_6 + c_5 s_4 (S + c_5 c_6 s_4) = T c_4$$
$$c_6 = \frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$s_6 = \pm \sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}$$
$$\tan(\theta_6) = \frac{\pm \sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}}{\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2}}$$

i finalnie:

$$\theta_6 = \arctan \frac{\pm \sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}}{\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2}}$$

4.7 Osobliwość $\theta_5 = 0$

Osobliwość która wynika z zależności: $s_5 = 0 \Rightarrow \theta_5 = 0$ pozwala uzyskać uproszczony układ równań:

$$s_5 = 0$$
$$c_5 = 1$$

więc mamy:

$${}^0_1\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^0_6\mathcal{T}_d = {}^1_6\mathcal{T}^* = \begin{bmatrix} s_4 s_6 c_{23} + c_4 c_6 c_{23} & s_4 c_6 c_{23} - c_4 s_6 c_{23} & -s_{23} & a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} \\ c_4 s_6 - s_4 c_6 & c_4 c_6 + s_4 s_6 & 0 & 0 \\ s_4 s_6 s_{23} + c_4 c_6 s_{23} & c_6 s_4 s_{23} - c_4 s_6 s_{23} & c_{23} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

można wtedy wykorzystać równania ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - s_4 c_6 = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ c_4 c_6 + s_4 s_6 = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy:

$$\begin{cases} \sin(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ \cos(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

stąd:

$$\theta_6 - \theta_4 = \arctan \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{c_1 r_{22} - s_1 r_{12}}$$