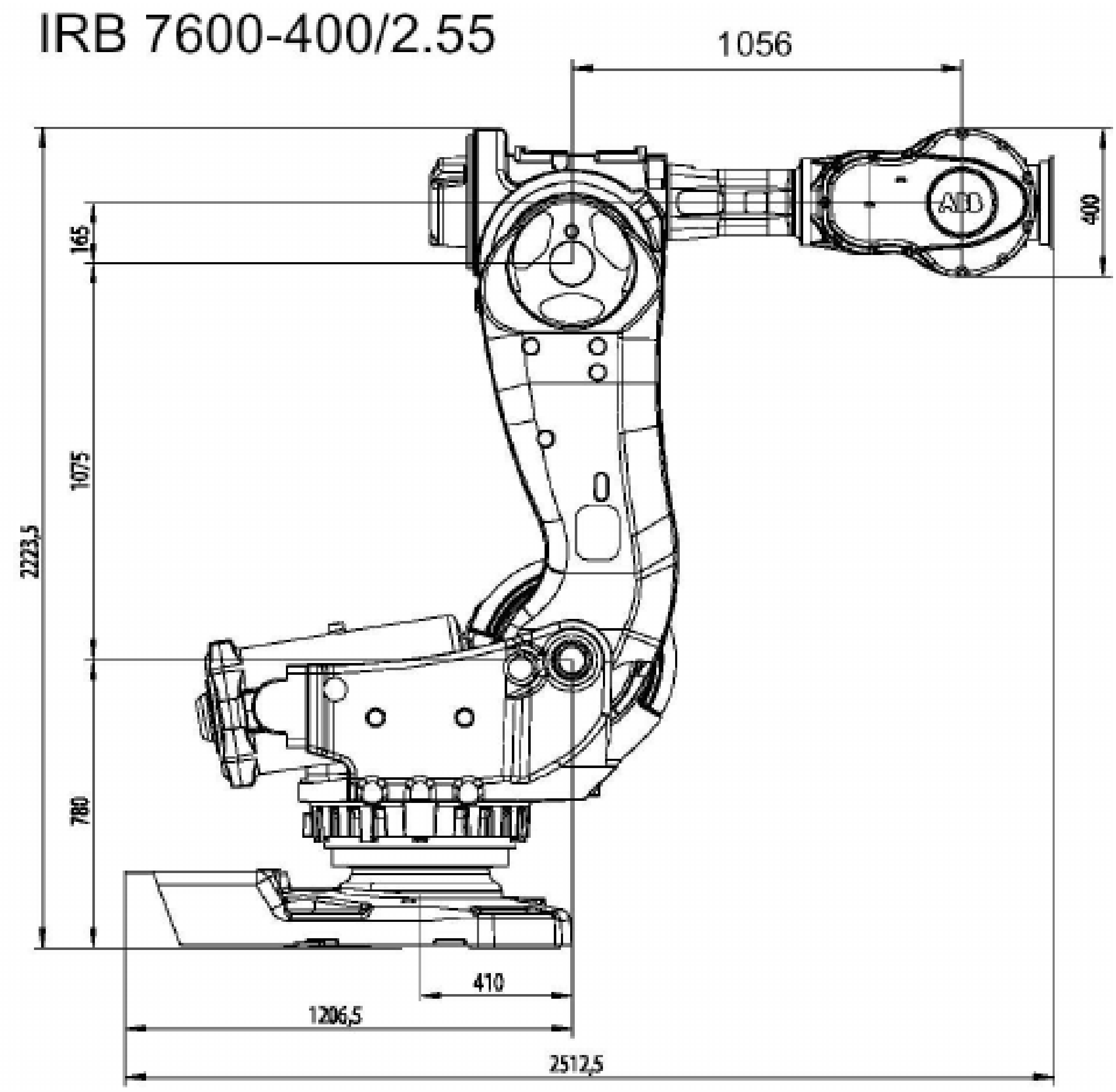
Projekt MORO

Jakub Postępski

3 stycznia 2019

1 Robot

Robot to ABB IRB 7600.



Rysunek 1: Robot ABB IRB 7600-400 z zaznaczonymi osiami

2 Parametry DH

L. p.	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	a_1	$\pi/2$	0	θ_2
3	a_2	0	0	θ_3
4	a_3	$\pi/2$	a_4	θ_4
5	0	$\pi/2$	0	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6

Tabela 1: Parametry DH

Wartości parametrów:

$$a_1 = 410mm$$
$$a_2 = 1075mm$$
$$a_3 = 165mm$$
$$d_4 = 1056mm$$

3 Kinematyka prosta

Przejścia pomiędzy członami:

$$
{}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -d_4 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Po wymnożeniu:

$$
{}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

gdzie:

$$
\begin{gathered}
r_{11} = c_1(c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6) - s_1(c_4s_6 - s_4c_5c_6) \\
r_{12} = c_1(c_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) - s_{23}s_5s_6) - s_1(s_4c_5s_6 + c_4s_6) \\
r_{13} = c_1(c_{23}c_4s_5) + s_1s_4s_5 \\
r_{21} = s_1(c_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5c_6) + c_1(c_4s_6 - s_4c_5c_6) \\
r_{22} = s_1(c_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) - s_{23}s_5s_6) + c_1(s_4c_5s_6 + c_4c_6) \\
r_{23} = s_1(c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5) - c_1s_4s_5 \\
r_{31} = s_{23}(c_4c_5c_6 + s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\
r_{32} = s_{23}(s_4c_6 - c_4c_5c_6) + c_{23}s_5s_6 \\
r_{33} = s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 \\
p_x = c_1(c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2 + a_1)) \\
p_y = s_1(c_{23}a_3 + s_{23}d_4 + c_2a_2 + a_1)) \\
p_z = s_{23}a_3 - c_{23}d_4 + s_2a_2
\end{gathered}
$$

4 Kinematyka odwrotna

Tworzymy dodatkową macierz pośrednią:

$$
{}^{1}_{6}\mathcal{T} = \begin{bmatrix} s_4s_6c_{23} + c_6(s_5s_{23} + c_4c_5c_{23}) & s_4c_6c_{23} - s_6(s_5s_{23} + c_4c_5c_{23}) & c_4s_5c_{23} - c_5s_{23} & a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23} \\ c_4s_6 - c_5c_6s_4 & c_4c_6 + c_5s_4s_6 & -s_4s_5 & 0 \\ s_4s_6s_{23} - c_6(s_5c_{23} - c_4c_5s_{23}) & c_6s_4s_{23} + s_6(s_5c_{23} - c_4c_5s_{23}) & c_4s_5s_{23} + c_5c_{23} & a_2s_2 + a_3s_{23} - d_4c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

możemy wyprowadzić:

$$
\begin{aligned}
&{}^{0}_{1}\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^{0}_{6}\mathcal{T}_d = \\
&= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ c_1r_{21} - s_1r_{11} & c_1r_{22} - s_1r_{12} & c_1r_{23} - s_1r_{13} & c_1p_y - s_1p_x \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= {}^{1}_{6}\mathcal{T}
\end{aligned}
$$

4.1 Stopień 1 (θ_1)

Bierzemy równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{24}$:

$$c_1 p_y - s_1 p_x = 0$$
$$\frac{s_1}{c_1} = \frac{p_y}{p_x}$$
$$\theta_1 = \arctan\frac{p_y}{p_x}$$

4.2 Stopień 2 (θ_2)

Bierzemy równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{14}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{34}$:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} = c_1 p_x + s_1 p_y \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23} = p_z \end{cases}$$

i wprowadzając stałe:

$$\begin{cases} E = c_1 p_x + s_1 p_y - a_1 \\ F = p_z \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_3 c_{23} + d_4 s_{23} = E - a_2 c_2 \\ a_3 s_{23} - d_4 c_{23} = F - a_2 s_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_3 c_{23})^2 + 2a_3 d_4 c_{23} s_{23} + (d_4 s_{23})^2 = E^2 - 2Ea_2 c_2 + (a_2 c_2)^2 \\ (a_3 s_{23})^2 - 2a_3 d_4 s_{23} c_{23} + (d_4 c_{23})^2 = F^2 - 2Fa_2 s_2 + (a_2 s_2)^2 \end{cases}$$

dodając stronami i przekształcając dalej:

$$a_3^2 + d_4^2 = E^2 + F^2 - 2Ea_2 c_2 - 2Fa_2 s_2 + a_2^2$$

podstawiając:

$$K = E^2 + F^2 + a_2^2 - a_3^2 - d_4^2$$

oraz stosując współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} 2Ea_2 = Rs_\omega \\ 2Fa_2 = Rc_\omega \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$R = \sqrt{4E^2 a_2^2 + 4F^2 a_2^2}$$
$$K = 2Ea_2 c_2 + 2Fa_2 s_2 = Rs_\omega c_2 + Rc_\omega s_2$$

stosując wzór na sumę sinusów oraz jedynkę trygonometryczną:

$$K = R\sin(\theta_2 + \omega)$$
$$\sin(\theta_2 + \omega) = \tfrac{K}{R}$$
$$\cos(\theta_2 + \omega) = \pm\sqrt{1 - \left(\tfrac{K}{R}\right)^2}$$

zatem:

$$\tan(\theta_2 + \omega) = \frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}}$$
$$\theta_2 + \omega = \arctan\frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}}$$
$$\theta_2 = \arctan\frac{\frac{K}{R}}{\pm\sqrt{1 - \left(\frac{K}{R}\right)^2}} - \arctan\frac{2Ea_2}{2Fa_2}$$

4.3 Stopień 3 (θ_3)

Wykorzystujemy równania z poprzedniej sekcji:

$$\begin{cases} a_3 c_{23} + d_4 s_{23} = E - a_2 c_2 \\ a_3 s_{23} - d_4 c_{23} = F - a_2 s_2 \end{cases}$$

należy podstawić:

$$\begin{cases} M = E - a_2 c_2 \\ N = F - a_2 s_2 \end{cases}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} a_3 c_{23} + d_4 s_{23} = M \\ a_3 s_{23} - d_4 c_{23} = N \end{cases}$$

przekształcając dalej:

$$c_{23} = \frac{M - d_4 s_{23}}{a_3}$$
$$a_3 s_{23} - d_4\frac{M - d_4 s_{23}}{a_3} = N$$
$$a_3^2 s_{23} - d_4(M - d_4 s_{23}) = Na_3$$
$$s_{23} = \frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2}$$
$$c_{23} = \frac{M - d_4\left(\frac{Na_3 + Md_4}{a_3^2 + d_4^2}\right)}{a_3}$$

dzieląc s_{23} i c_{23} przez siebie otrzymujemy

$$\tan(\theta_2+\theta_3)=\frac{s_{23}}{c_{23}}=\frac{\dfrac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2}}{\dfrac{M-d_4(\frac{Na_3+Md_4}{a_3^2+d_4^2})}{a_3}}$$
$$\tan(\theta_2+\theta_3)=\frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)}$$

oraz finalnie:

$$\theta_3=\arctan\frac{a_3(Na_3+Md_4)}{M(a_3^2+d_4^2)-d_4(Na_3+Md_4)}-\theta_2$$

4.4 Stopień 4 (θ_4)

Wykorzystując równanie z ${}^1_6\mathcal{T}_{23}$:

$$-s_4s_5=c_1r_{23}-s_1r_{13}$$

zakładając, że $s_5\neq 0$ z jedynki trygonometrycznej

$$s_4=\frac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5}$$
$$c_4=\pm\sqrt{1-(\frac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5})^2}$$
$$\tan(\theta_4)=\frac{\dfrac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5})^2}}$$

stąd:

$$\theta_4=\arctan\frac{\dfrac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5}}{\pm\sqrt{1-(\frac{c_1r_{23}-s_1r_{13}}{s_5})^2}}$$

4.5 Stopień 5 (θ_5)

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{13}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{33}$:

$$\begin{cases} c_4s_5c_{23}-c_5s_{23}=c_1r_{13}+s_1r_{23}\\ c_4s_5s_{23}+c_5c_{23}=r_{33}\end{cases}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} P=c_1r_{13}+s_1r_{23}\\ Q=r_{33}\end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} c_4s_5c_{23}-c_5s_{23}=P\\ c_4s_5s_{23}+c_5c_{23}=Q\end{cases}$$

przekształcając dalej:

$$c_4s_5=\frac{Q-c_5c_{23}}{s_{23}}$$
$$c_{23}\frac{Q-c_5c_{23}}{s_{23}}-c_5s_{23}=P$$
$$c_{23}(Q-c_5c_{23})-c_5s_{23}^2=Ps_{23}$$
$$c_5(c_{23}^2+s_{23}^2)=Qc_{23}-Ps_{23}$$
$$c_5=Qc_{23}-Ps_{23}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$s_5=\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}$$
$$\tan(\theta_5)=\frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}}$$

i finalnie:

$$\theta_5=\arctan\frac{\pm\sqrt{1-(Qc_{23}-Ps_{23})^2}}{Qc_{23}-Ps_{23}}$$

(Wartości c_{23} oraz s_{23} wyznaczone zostały podczas wyznaczania θ_3).

4.6 Stopień 6 (θ_6)

Biorąc równania z ${}^1_6\mathcal{T}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4s_6-c_5c_6s_4=c_1r_{21}-s_1r_{11}\\ c_4c_6+c_5s_4s_6=c_1r_{22}-s_1r_{12}\end{cases}$$

i wprowadzając stałe

$$\begin{cases} S=c_1r_{21}-s_1r_{11}\\ T=c_1r_{22}-s_1r_{12}\end{cases}$$

i uzyskujemy:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - c_5 c_6 s_4 = S \\ c_4 c_6 + c_5 s_4 s_6 = T \end{cases}$$

zakładając $s_5 \neq 0$ i przekształcając:

$$\begin{aligned} s_6 &= \frac{S + c_5 c_6 s_4}{c_4} \\ c_4 c_6 + c_5 s_4 &\frac{S + c_5 c_6 s_4}{c_4} = T \\ c_4^2 c_6 + c_5 s_4 &(S + c_5 c_6 s_4) = T c_4 \\ c_6 &= \frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2} \end{aligned}$$

z jedynki trygonometrycznej:

$$s_6 = \pm\sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}$$

$$\tan(\theta_6) = \frac{\pm\sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}}{\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2}}$$

i finalnie:

$$\theta_6 = \arctan \frac{\pm\sqrt{1 - (\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2})^2}}{\frac{T c_4 - S c_5 s_4}{s_4^2 c_5^2 + c_4^2}}$$

4.7 Osobliwość $s_5 = 0 \Rightarrow \theta_5 = 0$

Upraszcza się układ równań dzięki podstawieniom:

$$\begin{aligned} s_5 &= 0 \\ c_5 &= 1 \end{aligned}$$

więc mamy:

$$ {}^0_1\mathcal{T}^{-1} \cdot {}^0_6\mathcal{T}_d = {}^1_6\mathcal{T}^* = \begin{bmatrix} s_4 s_6 c_{23} + c_4 c_6 c_{23} & s_4 c_6 c_{23} - c_4 s_6 c_{23} & -s_{23} & a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + d_4 s_{23} \\ c_4 s_6 - s_4 c_6 & c_4 c_6 + s_4 s_6 & 0 & 0 \\ s_4 s_6 s_{23} + c_4 c_6 s_{23} & c_6 s_4 s_{23} - c_4 s_6 s_{23} & c_{23} & a_2 s_2 + a_3 s_{23} - d_4 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

można wtedy wykorzystać równania ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{21}$ i ${}^1_6\mathcal{T}^*{}_{22}$:

$$\begin{cases} c_4 s_6 - s_4 c_6 = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ c_4 c_6 + s_4 s_6 = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

korzystając ze wzorów na sinus i cosinus sumy:

$$\begin{cases} \sin(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{21} - s_1 r_{11} \\ \cos(\theta_6 - \theta_4) = c_1 r_{22} - s_1 r_{12} \end{cases}$$

stąd:

$$\theta_6 - \theta_4 = \arctan \frac{c_1 r_{21} - s_1 r_{11}}{c_1 r_{22} - s_1 r_{12}}$$