TST - Projekt 1

Jakub Postępski

27 listopada 2018

1 Wprowadzenie

Przyjmijmy macierz A_{2x2}.

Macierz posiada, dla $i = 1, 2$:

- wartości własne λ_i
- wektory własne $\vec{v_i}$

W zadaniu interesuje nas dynamika ciągu:

$$x^{(t)} = A^t x_0$$

2 Wartości własne

Podstawowym równaniem jest:

$$Ax = \lambda x$$

Zbiór rozwiązań to widmo:

$$\sigma(A) = \{\lambda_i \in \}$$

W ten sposób szukamy wartości dla których macierz A zachowa się jak przekształcenie liniowe (skalar). Dla takich wartości macierz tylko powiększa lub zmniejsza zadany wektor, ale nie zależności pomiędzy składowymi wektora.

Z równania wynika, że wartości własne decydują o tym jakim przekształceniem będzie macierz A.

3 Wektory własne

Są wektorami rozpinającymi bazę którą tworzy przekształcenie macierzy A. Zestaw takich wektorów nie jest jednoznaczny. Dla jednej macierzy można znaleźć wiele zestawów wektorów rozpinających. Wektory własne decydują więc o obrocie (konfiguracji) naszego przekształcenia.

4 Związek wartości i wektorów własnych

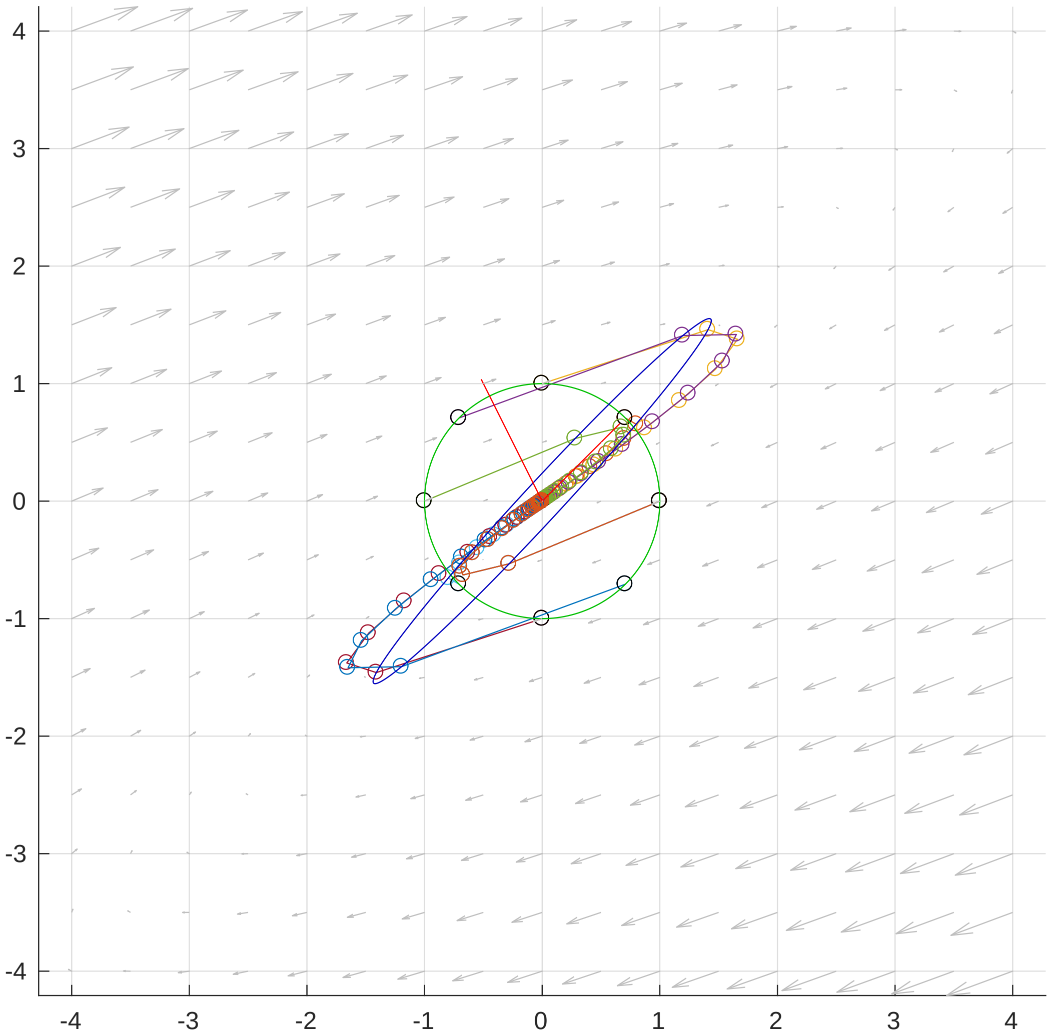
Wiemy już, że wartości własne (poniżej zapisane w diagonalnej macierzy D) definiują przekształcenie, a zestaw wektorów własnych (poniżej zapisane w macierzy V) jego obrót. Aby przekształcenie zachowywało się tak samo (pod względem widma) jak D musi zachodzić (szukamy macierzy podobnej):

$$A = VDV^{-1}$$

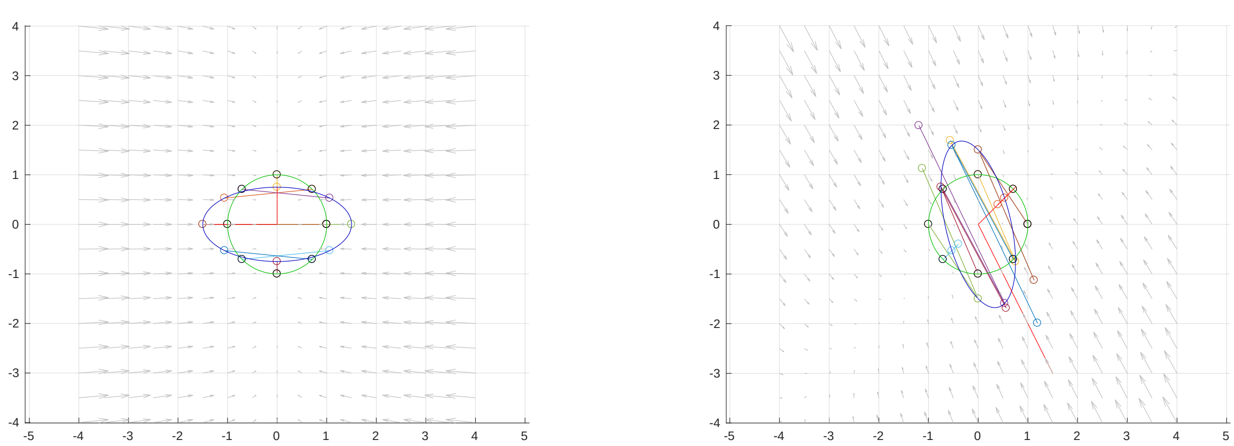
dzięki czemu jesteśmy w stanie znaleźć macierz A.

Ciekawostka której jeszcze nie przemyślałem: Możemy przekształcić do $AV = VD$ i wtedy zbiór wektorów własnych ma jakieśtam wartości własne, które definiują przekształcenie którym działamy na D.

5 Dynamika układów



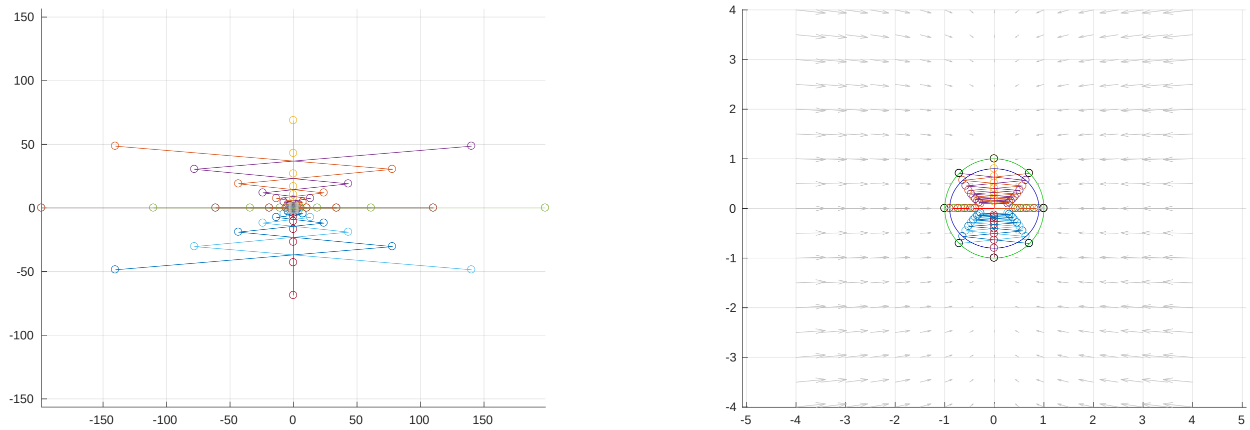
Rysunek 1: Przykładowy układ z losowymi wartościami. "Popychany" przez gradient układ zbiega do zera, zgodnie z wyznaczonym obrazem.



(a) $\lambda_1 = 0.75, \lambda_2 = -1.5$

(b) $\lambda_1 = 0.75, \lambda_2 = -1.5$

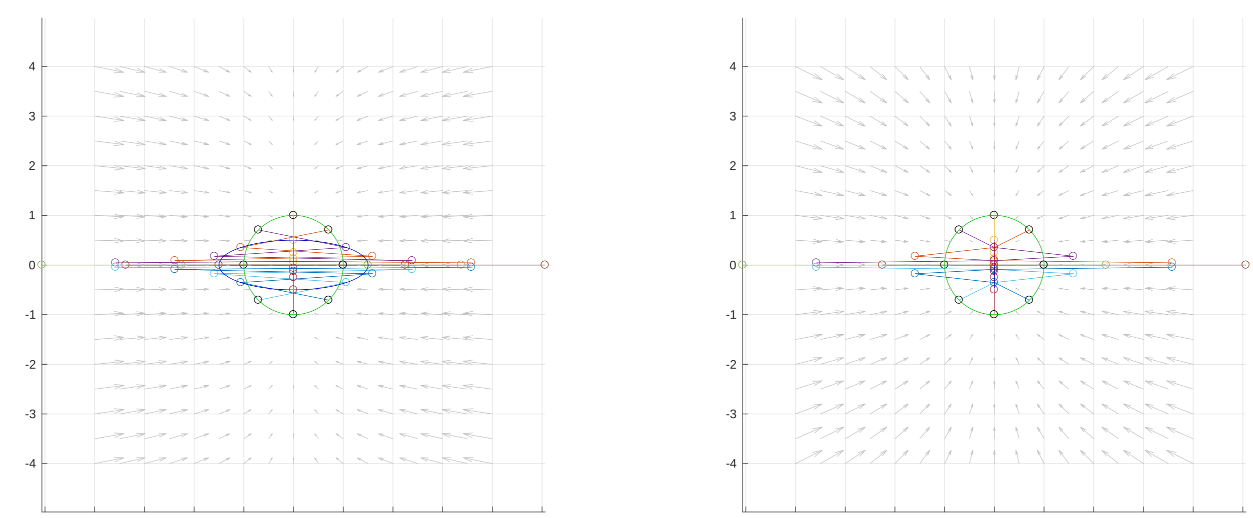
Rysunek 2: Porównanie układów z jednakowymi wartościami własnymi. Różne wektory własne powodują obrót i przeskalowanie przekształcenia.



(a) $\lambda_1 = 1.6, \lambda_2 = -1.8$

(b) $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = -0.9$

Rysunek 3: Porównanie promieni spektralnych. W drugim przypadku $\rho < 1$. Por.: Układ rozbiega się; Układ zbiega do zera.



(a) $\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = 0.5$

(b) $\lambda_1 = -1.5i, \lambda_2 = 0.5$

Rysunek 4: Zastosowanie jednego bieguna zespolonego. Por.: Rzutowanie na okrąg; Rzutowanie na prostą.