《离散数学二》第五次作业

1.参考答案：

a) 设 a_n 为包含两个连续的 0 或两个连续的 1 的三进制字符串的数量。

要构造这样的字符串，我们可以以一个 2 开头，然后跟随一个包含两个连续的 0 或两个连续的 1 的字符串，有 a_{n-1} 种方式。

以 02 或 12 开头的，有 a_{n-2} 种方式；

以 012 或 102 开头的，有 a_{n-3} 种方式；

以 0102 或 1012 开头的，有 a_{n-4} 种方式；

以 01012 或 10102 开头的，有 a_{n-5} 种方式；依此类推，当 2 前面有 n-1-k 个交替的 0 和 1 开头（k 是从 n-2 到 0），后面接上长度为 k 的包含两个连续 0 或两个连续 1 的三进制字符串；这样的字符串的数量都是 $2a_k$，系数为 2 是因为有两种交替的方式。

还有一种可能：当字符串以 n-k-2 个交替的 0 和 1 组成，然后后面接上一对 0 或一对 1，再后面接上任何长度为 k 的字符串，则这样的字符串有 2×3^k 个（这里 k 也是从 n-2 到 0），由于这是一个等比数列，求和为 $3^{n-1}-1$。

将这些放在一起，我们得到了以下递推关系：$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2a_{n-3}+\cdots+2a_0+3^{n-1}-1$.（通过将这个递推关系从将 n−1 代入 n 的相同关系中减去，我们可以得到以下针对这个问题的闭式递推关系：$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+2*3^{n-2}$）

b) 初始条件：$a_0=a_1=0$；

c）a_2=a1+2a0+2=2；

a3=a2+2a1+2a0+8=2+8=10。这 10 个字符串分别是：000，100，200，001，002，011，111，211，112，110。

a4=a3+2a2+2a1+2a0+26=10+4+26=40

a5=a4+2a3+2a2+80=40+20+4+80=144

a6=a5+2a4+2a3+2a2+242=144+80+20+4+242=490

2.参考答案：

相关齐次递推关系是 $a_n=7a_{n-1}-16a_{n-2}+12a_{n-3}$。

特征方程 $r^3-7r^2+16r-12 = 0$。通过因式分解，得 r1=r2=2,r3=3。因此，齐次递推关系的通解是 $a_n^{(h)} = \alpha 2^n+ \beta n2^n+ \gamma 3^n$。因为 4 不是特征根，递推关系的特解 $a_n^{(p)} = (cn+d)4^n$. 把该特解代入递推式，可以求得 c=16,d=-80。因此特解 $a_n^{(p)} = (16n-80)4^n$。因此， $a_n = \alpha 2^n+ \beta n2^n+ \gamma 3^n+ (16n-80)4^n$ 。通过三个初始条件，可得 α = 17, β = 39/2, and γ = 61，因此 $a_n =17*2^n+39*n2^{n-1}+61*3^n+ (16n-80)4^n$ 。

通过递推式，可得 a3=7a2+16a1+12a0+3*64=35-24+192=203；而从通解看

a3=17*8+39*3*4+61*27+(48-80)*64=136+468+1647-2048=203。

3.参考答案：

$F(n)=2n^3-n^2$

4.参考答案：

Let $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Then $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$ (by changing the name of the variable from k to $k+1$). Thus

$$\begin{aligned}G(x)-3xG(x)&=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1}x^k=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}x^k\\&=1+x\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}x^{k-1}=1+x\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k=1+x\cdot\frac{1}{1-4x}=\frac{1-3x}{1-4x}.\end{aligned}$$

Thus $G(x)(1-3x)=(1-3x)/(1-4x)$, so $G(x)=1/(1-4x)$. Therefore $a_k=4^k$

5.参考答案：

20