Chapter 13
含磁耦合的电路

13.1 耦合电感

Coupled inductors

13.2 含耦合电感电路的分析

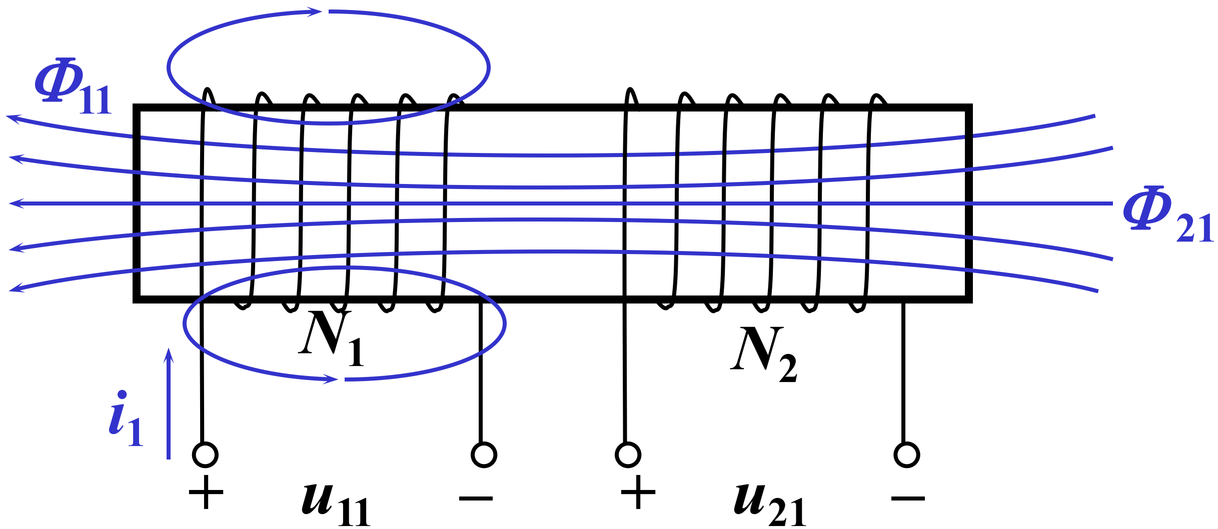
Analysis of coupled circuits

13.3 变压器

Transformers

13.1 互感和互感电压

一、互感（mutual inductance）和互感电压（mutual voltage）

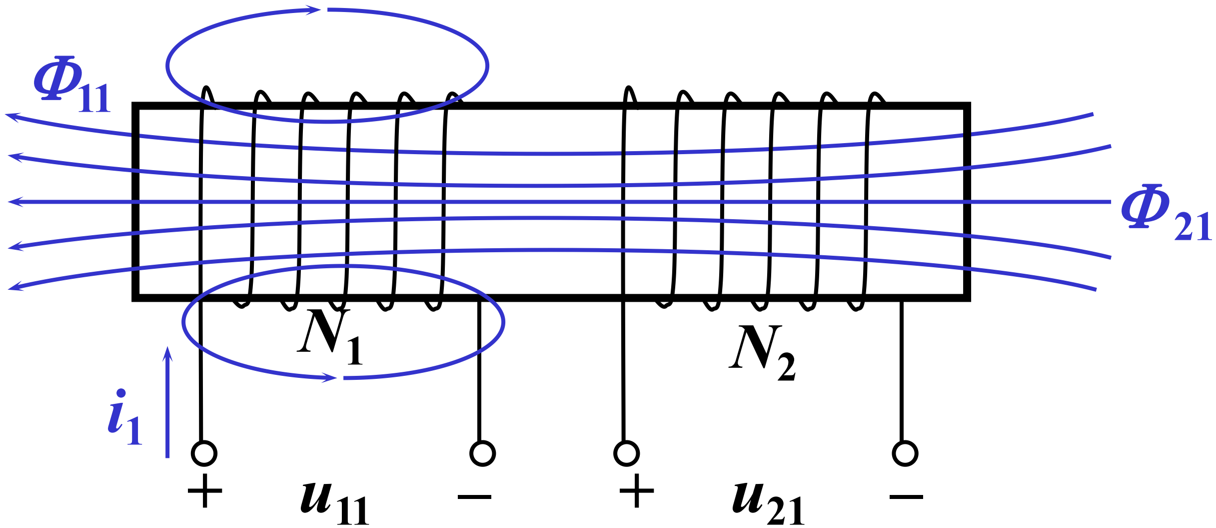


参考方向设定：$i \sim \Phi$ ，$u \sim \Phi$符合右手定则

当线圈1中通入电流i_1时

$$\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$$

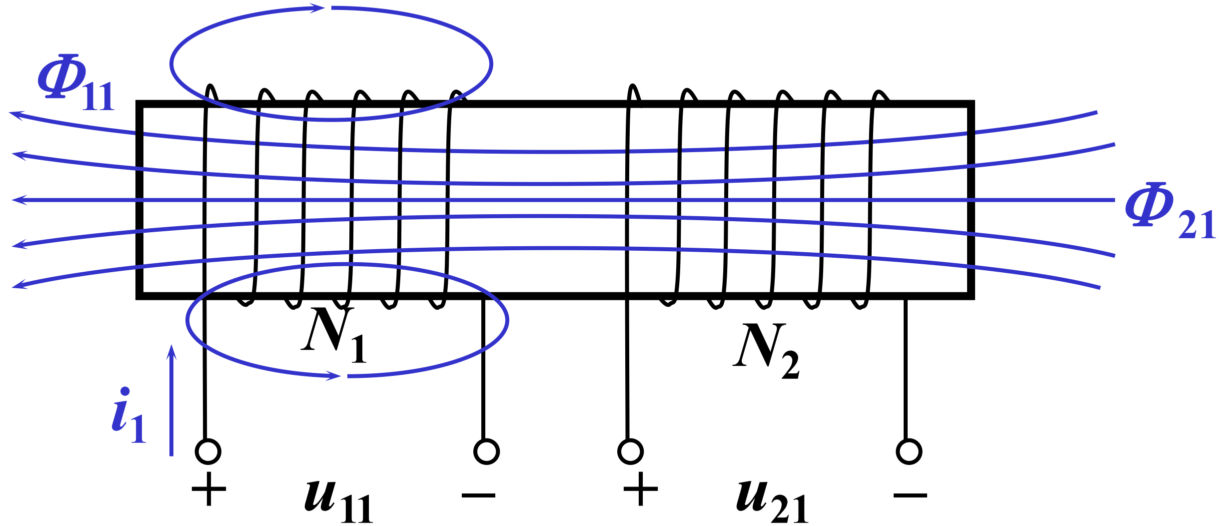
载流回路1中的电流 i → 磁感应强度 B → 磁通 Φ_{11} → 磁链 Ψ_{11}



由电磁感应定律（**Farady′s law**）和楞次定律（**Lenz′s law**）可得

$$u_{11}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t}=N_1\frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t}$$ —自感电压

$$u_{21}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t}=N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}$$ —互感电压

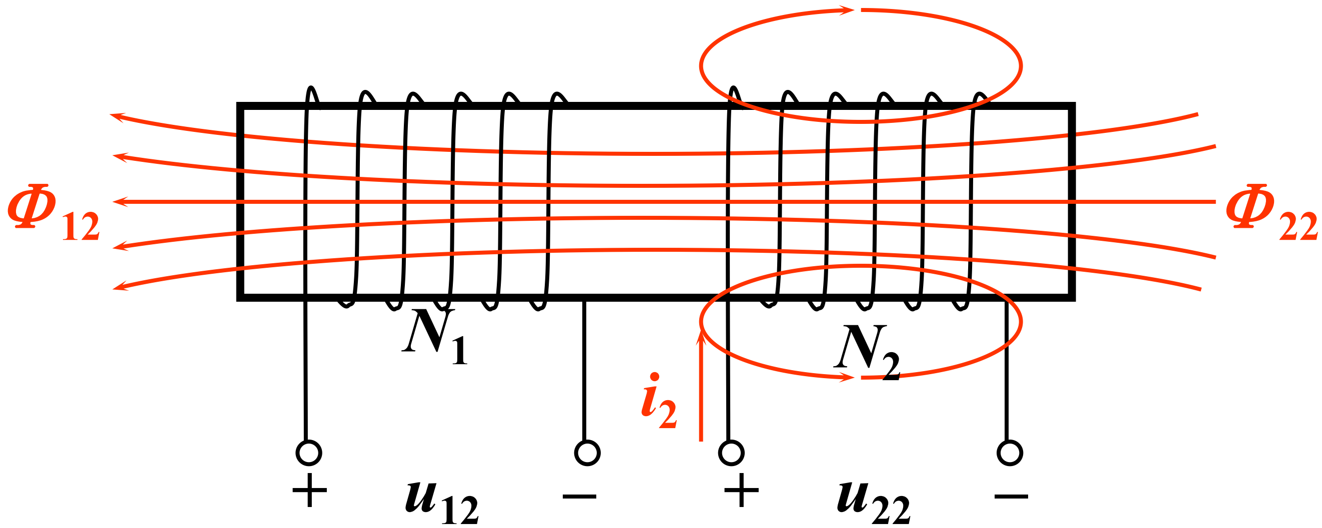


当线圈周围无铁磁物质（空心线圈）时，有

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\overset{\text{def}}{=} \left|\frac{\Psi_{11}}{i_1}\right| && \text{——线圈1的自感系数} \\ M_{21} &\overset{\text{def}}{=} \left|\frac{\Psi_{21}}{i_1}\right| && \text{——线圈1对线圈2的互感系数} \end{aligned}\right\} \text{单位：H}$$

则有 $$\begin{cases} u_{11} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ u_{21} = M_{21} \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

同理，当线圈2中通电流i_2时，有



$$M_{12} \overset{\text{def}}{=} \left|\frac{\Psi_{12}}{i_2}\right|$$ —线圈2对线圈1的互感系数

$$\begin{cases} u_{12} = \dfrac{d\Psi_{12}}{dt} = N_1 \dfrac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \dfrac{di_2}{dt} & \text{—互感电压} \\ u_{22} = \dfrac{d\Psi_{22}}{dt} = N_2 \dfrac{d\Phi_{22}}{dt} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} & \text{—自感电压} \end{cases}$$

可以证明　$M_{12}= M_{21}= M$

当两个线圈同时通以电流时，有

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

在正弦稳态电路中，其相量形式的方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

二、耦合系数（coupling coefficient）k

k 表示两个线圈磁耦合（magnetic coupling）的紧密程度。

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

可以证明，$k \leq 1$

全耦合时：$\Phi_{11} = \Phi_{21}$，$\Phi_{22} = \Phi_{12}$

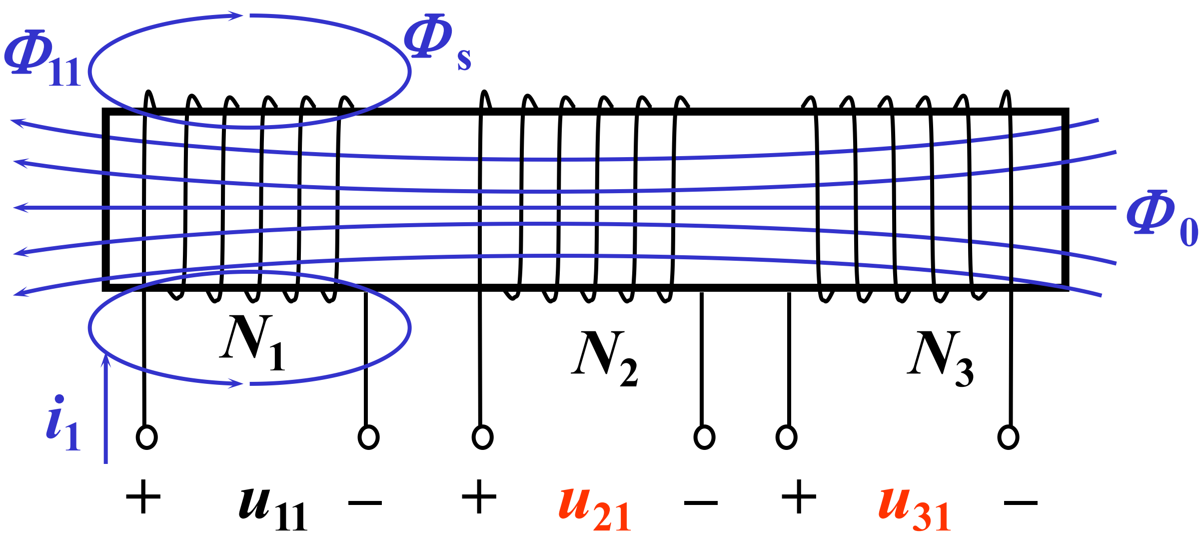
$$\because \quad L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}, \qquad L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}, \quad M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

$$\therefore \quad M_{12} M_{21} = L_1 L_2, \quad M^2 = L_1 L_2, \quad k = 1$$

三、互感线圈的同名端（dotted terminal）

互感电压不仅与参考方向有关，而且与线圈的绕向有关，这在电路分析中显得很不方便。



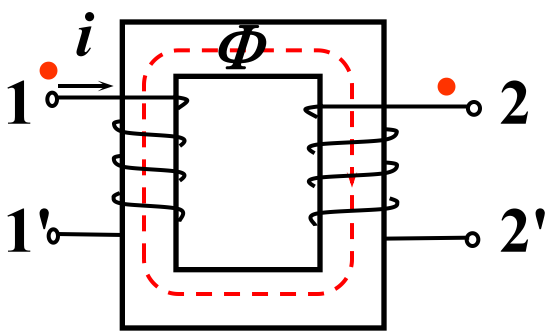
$$u_{21} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad u_{31} = -M_{31}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

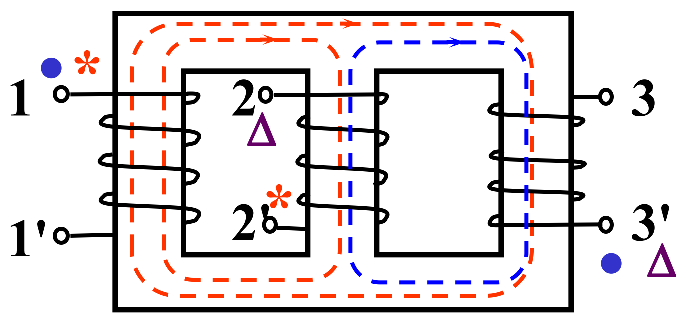
引入同名端可以解决这个问题。

1. 同名端的定义：

同名端是分别属于两个线圈的这样两个端点：当两个电流分别从这两个端点流入，与每个线圈相链的自感磁通同由另一线圈的电流产生的互感磁通方向相同，因而互相加强，这两个端点便是同名端。

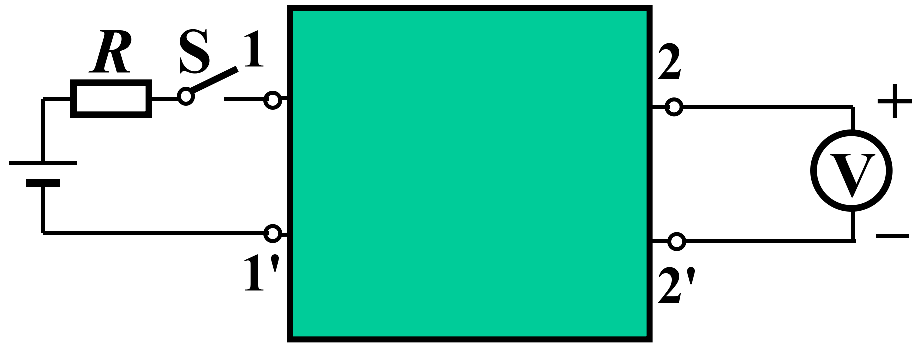
例





2. 同名端的实验测定

假设线圈的同名端已知，观察实验的现象



当闭合开关S时，电压表指针正偏一下，又回到零。

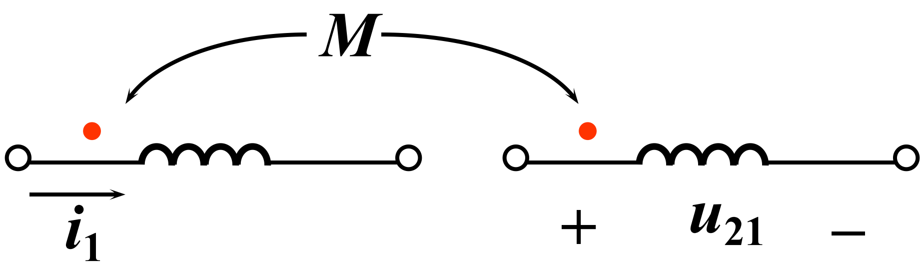
分析：

开关S闭合，i增加 $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$, $u_{22'}=M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$

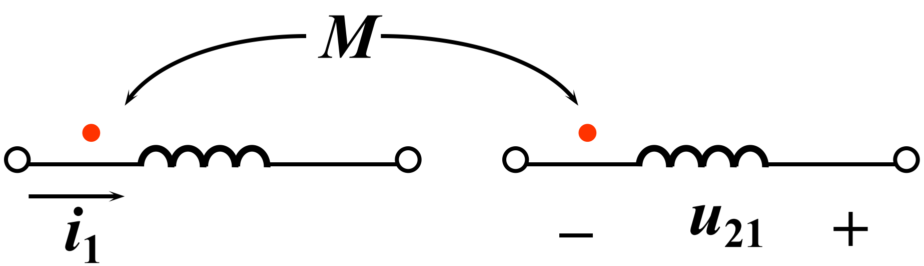
当两个线圈是封装的，只引出接线端子，要确定其同名端，就可以利用上面的结论来加以判断。

四、由同名端及u，i参考方向确定互感电压表达式的正负号

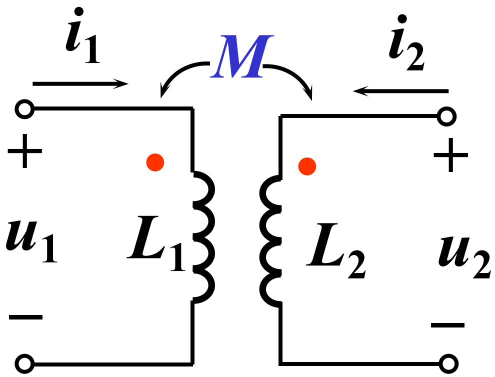
当一个线圈的电流i和其在另一个线圈两端产生的互感电压u_M的参考方向相对于各自线圈的同名端一致时，则互感电压 $u_M = M\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 。

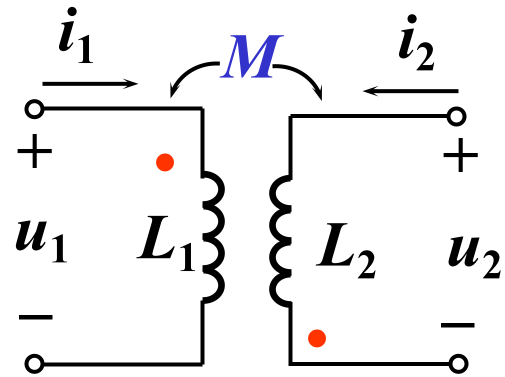


$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



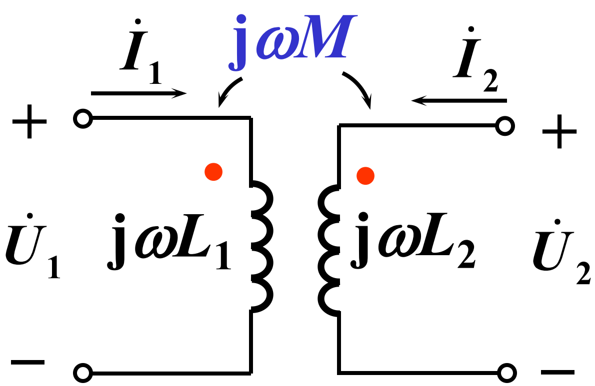


时域形式

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

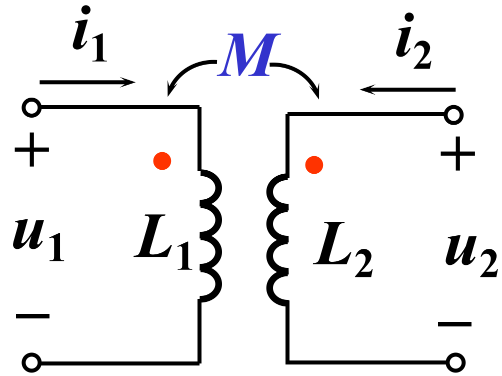
$$\begin{cases} u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的电路模型和方程分别为



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 \end{cases}$$

五、互感线圈的储能



t 时刻互感线圈吸收的功率

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t)$$

t~t+dt 时间段互感线圈储能的增量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= p(t)\mathrm{d}t = [u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t)]\mathrm{d}t \\ &= \left(L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}\right) i_1(t)\mathrm{d}t \\ &\quad + \left(L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}\right) i_2(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

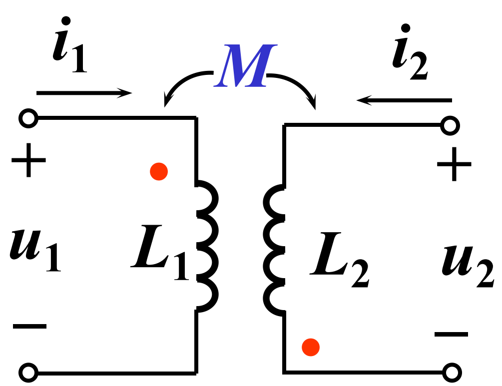
$$= L_1 i_1(t)\mathrm{d}i_1(t) + M i_1(t)\mathrm{d}i_2(t) + L_2 i_2(t)\mathrm{d}i_2(t) + M i_2(t)\mathrm{d}i_1(t)$$

$$= L_1 i_1(t)\mathrm{d}i_1(t) + L_2 i_2(t)\mathrm{d}i_2(t) + M\mathrm{d}[i_1(t)i_2(t)]$$

设电流由零增至$i_1(t)$、$i_2(t)$，则t时刻互感的储能为

$$W = \int_0^{i_1(t)} L_1 i_1(\xi)\mathrm{d}i_1(\xi) + \int_0^{i_2(t)} L_2 i_2(\xi)\mathrm{d}i_2(\xi) + \int_0^{i_1(t)i_2(t)} M\mathrm{d}[i_1(\xi)i_2(\xi)]$$

$$= \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) + M i_1(t)i_2(t)$$



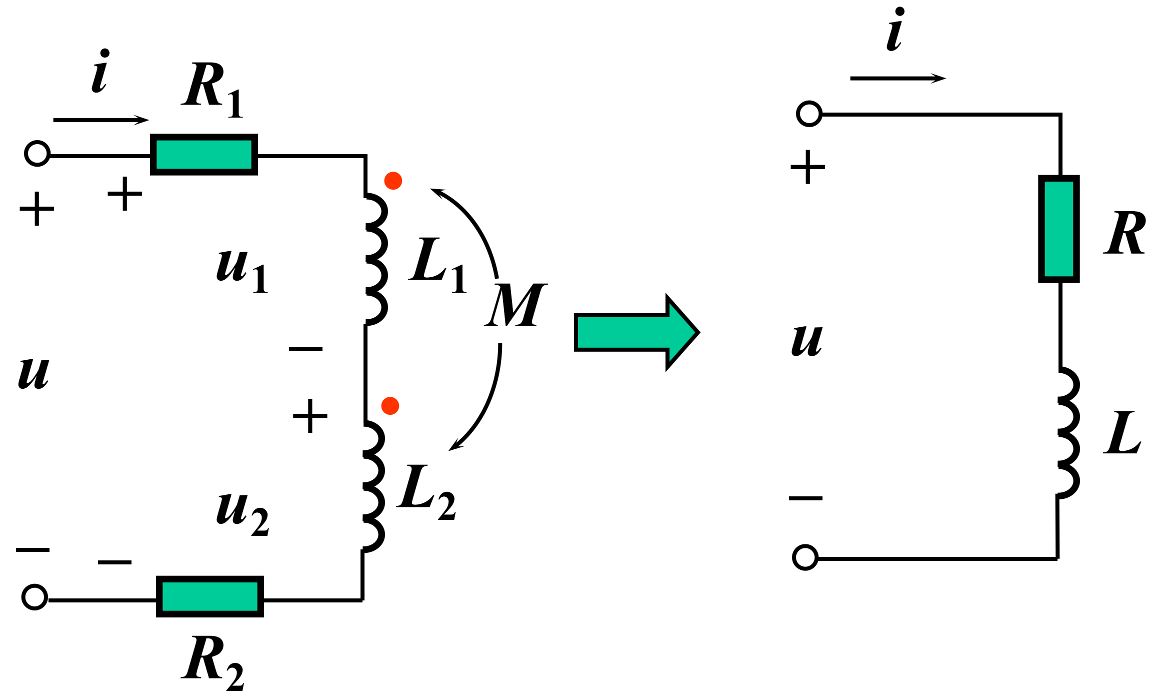
$$W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_2 i_2^2(t) - M i_1(t)i_2(t)$$

11.2 互感线圈的串联和并联

一、互感线圈的串联

1. 同名端顺串

时域

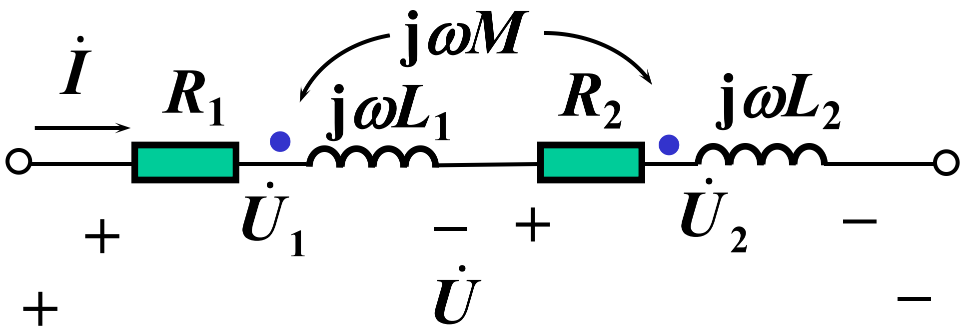


$$u = R_1 i + L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

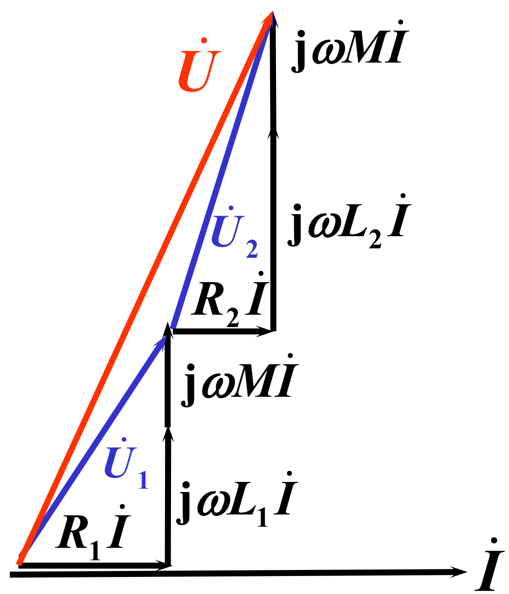
其中 $R = R_1 + R_2$， $L = L_1 + L_2 + 2M$

在正弦稳态下

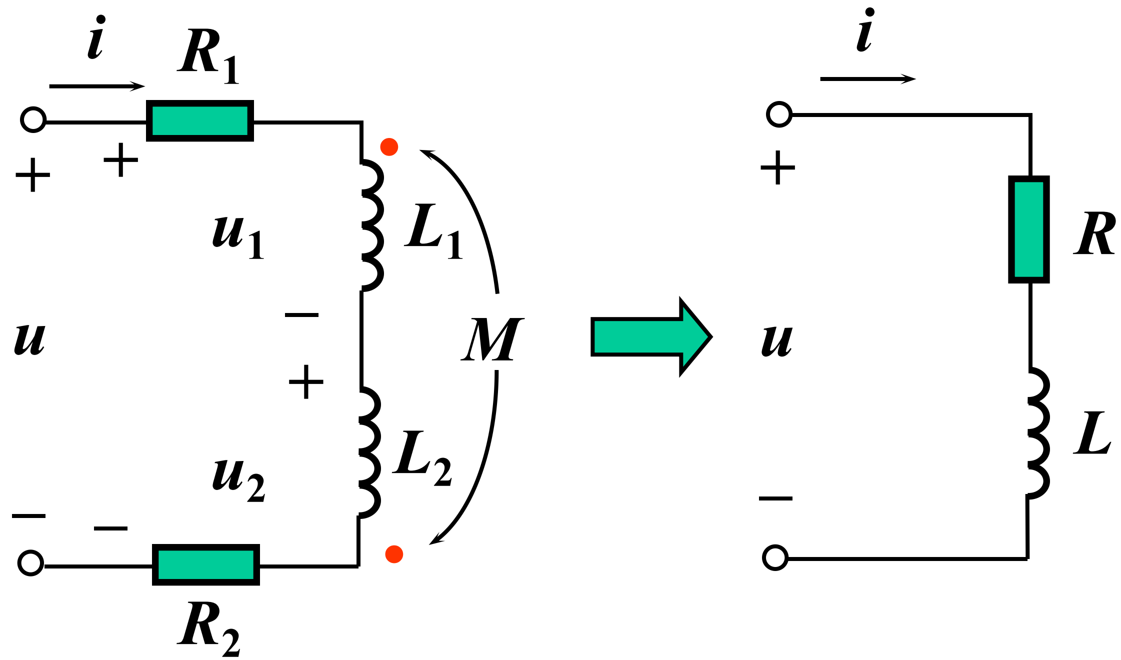


$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I}$$

相量图



2. 同名端反串



$$u = R_1 i + L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

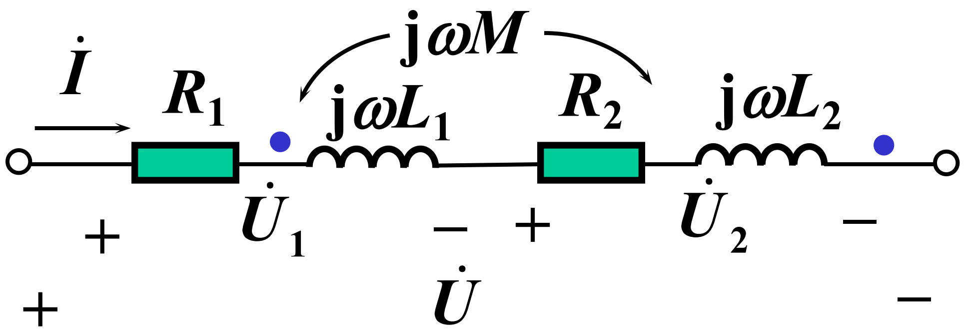
$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

其中 $R = R_1 + R_2,\quad L = L_1 + L_2 - 2M$

$$L = L_1 + L_2 - 2M \geq 0 \qquad \therefore M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$$

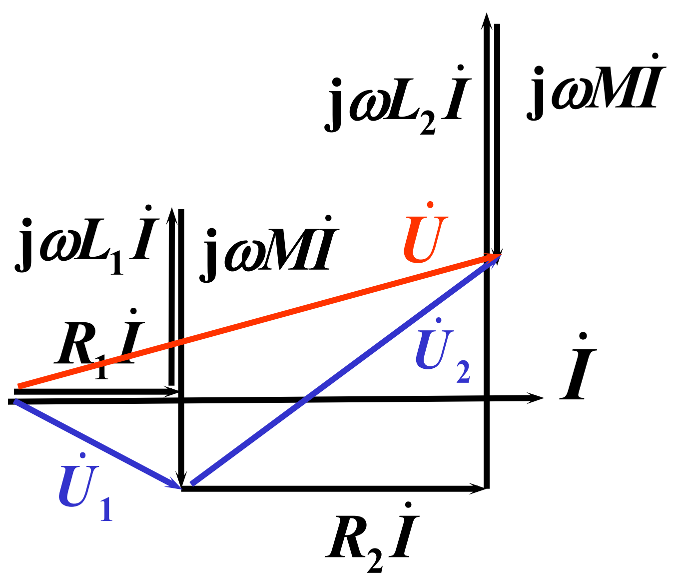
互感不大于两个自感的算术平均值。

在正弦稳态下



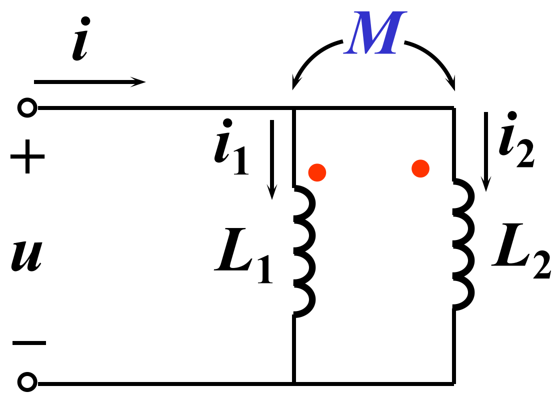
$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$

相量图



二、互感线圈的并联

1. 同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

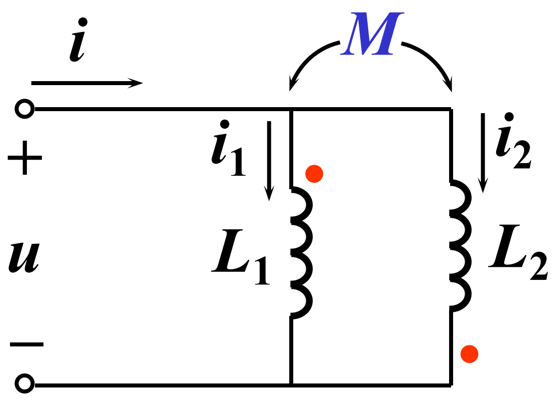
解得u, i的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow L_{\mathrm{eq}} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$$

故 $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

互感小于两元件自感的几何平均值。

2. 同名端在异侧



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得u, i的关系

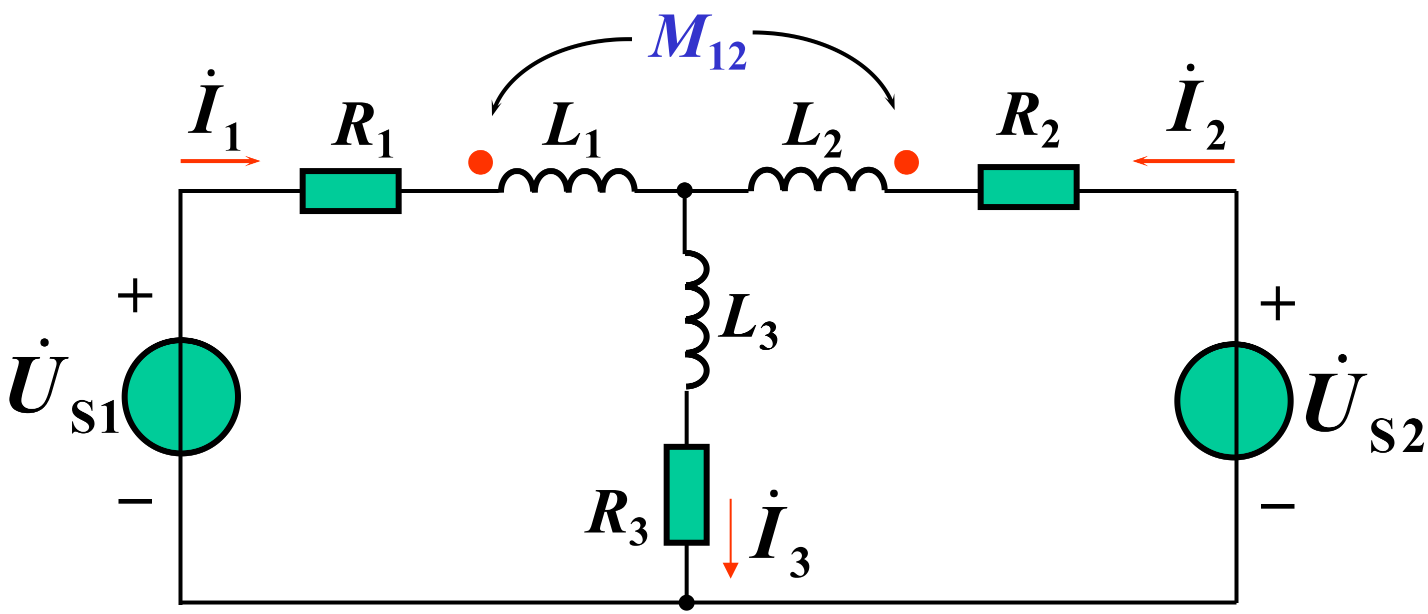
$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

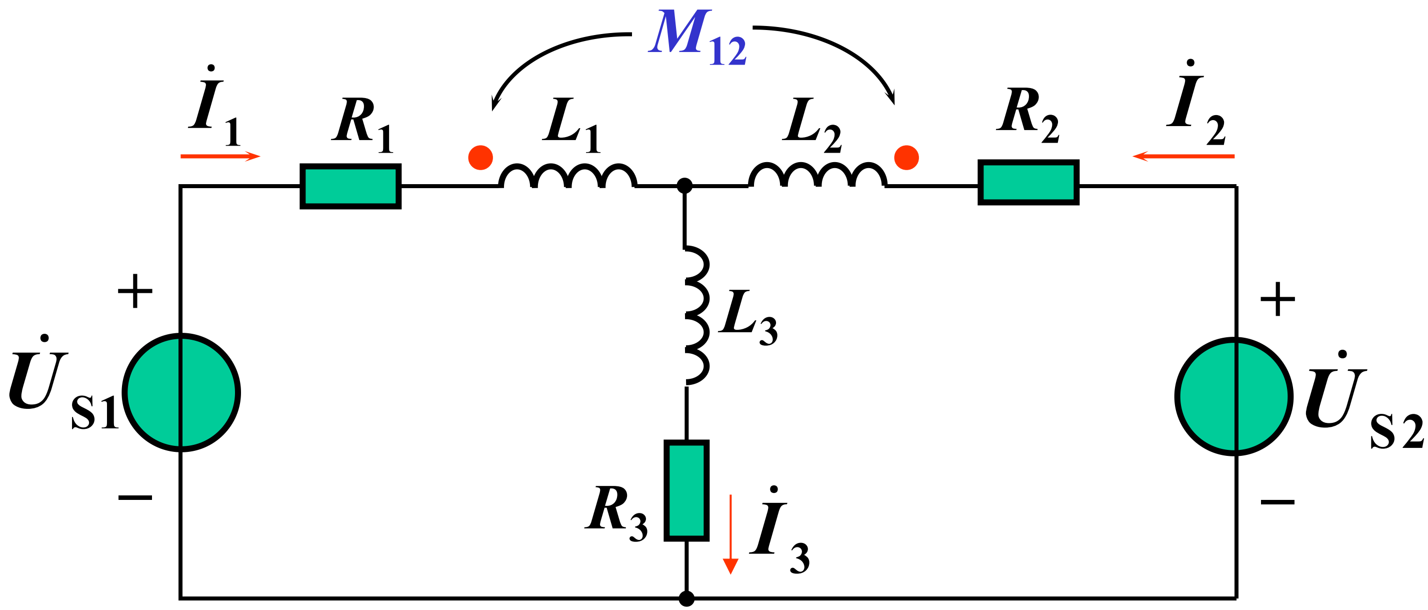
$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$$

13.3 含耦合电感电路分析Analysis of coupled circuits

有互感的电路的计算仍属正弦稳态分析，前面介绍的相量分析的的方法均适用。只需注意互感线圈上的电压除自感电压外，还应包含互感电压。

例 1 列写下图电路的方程。





网孔分析法:

$$\begin{cases} R_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega L_3\dot{I}_3 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_{S1} \\ R_2\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_3\dot{I}_3 + R_3\dot{I}_3 = \dot{U}_{S2} \\ \dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

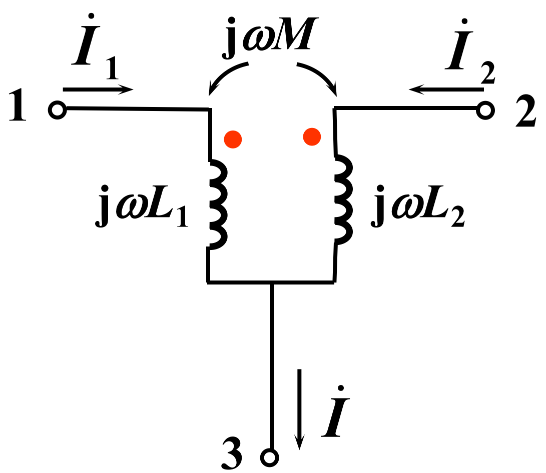
注意: 线圈上互感电压的表示式及正负号。

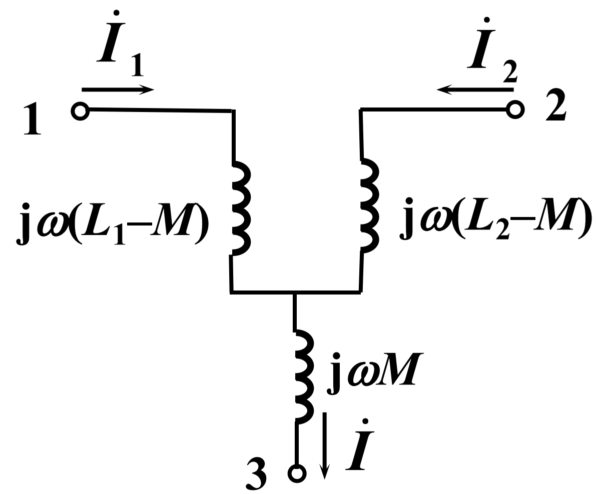
含互感的电路，直接用节点法列写方程不方便。

2.互感的去耦等效（两电感有公共端）

当耦合的两个线圈有一个公共端时，可以等效为非耦合的三个电感，称为去耦等效电路

（a） 两个线圈的同名端接在公共端



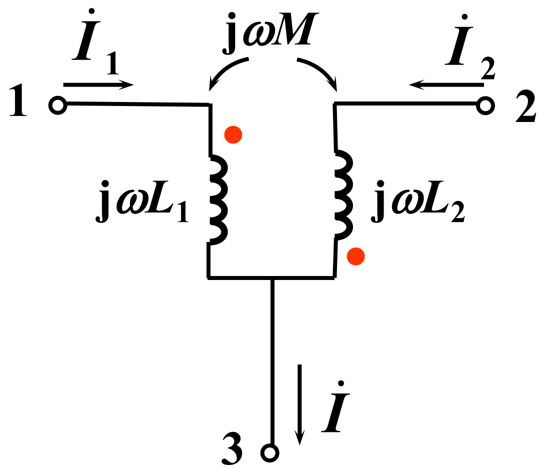


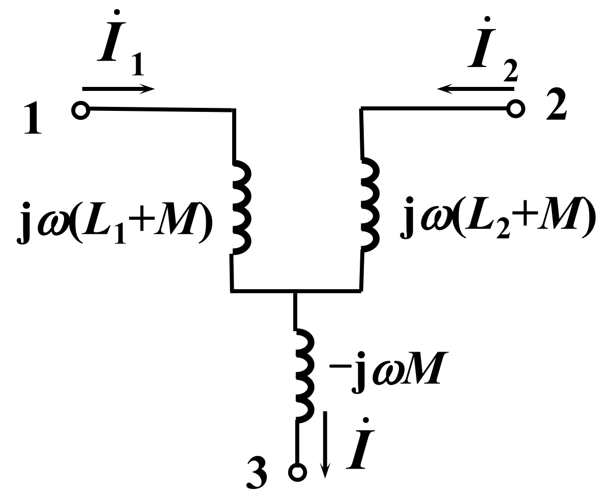
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega (L_1 - M) \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega (L_2 - M) \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

（b）两个线圈的异名端接在公共端



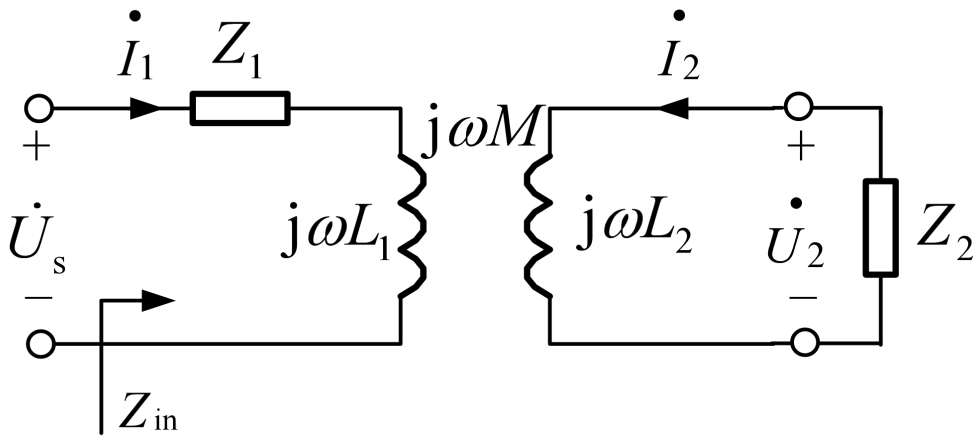


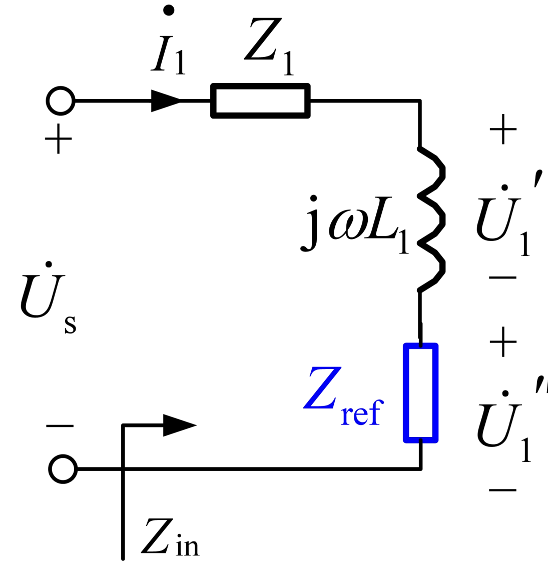
$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = \mathrm{j}\omega (L_1 + M)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = \mathrm{j}\omega (L_2 + M)\dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

3. By reflected impedance 映射阻抗





负载回路对电源回路的影响可用Z_{ref}表示，称Z_{ref}为负载回路在电源回路的映射阻抗。

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_1 + \frac{j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2}{\dot{I}_1} = (Z_1 + j\omega L_1) + (\pm j\omega M)\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = -Z_2 \dot{I}_2$$

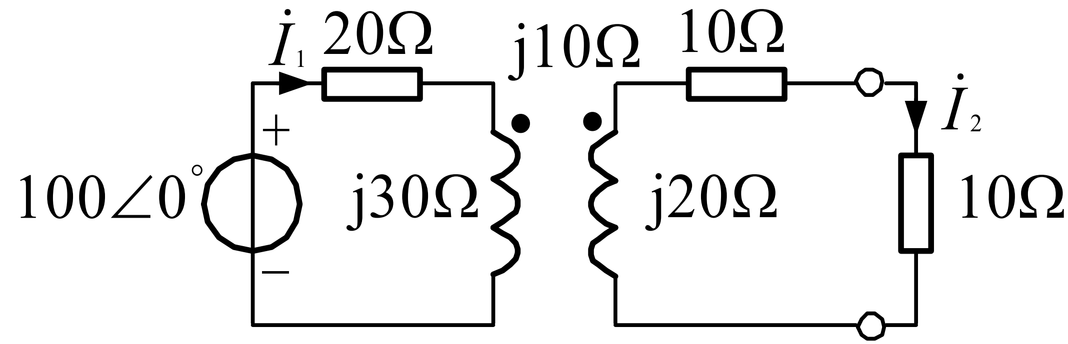
$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{(\pm j\omega M)}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$Z_{in} = (Z_1 + j\omega L_1) + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$= Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

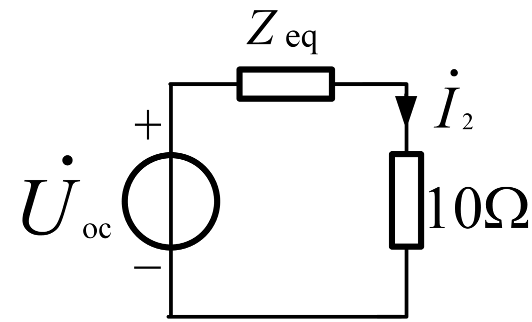
$$= Z_{11} + Z_{ref}$$

3. By reflected impedance 映射阻抗



$$\dot{U}_s = [Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}]\dot{I}_1$$

$$100\angle 0^\circ = [(20 + j30) + \frac{10^2}{(10 + 10 + j20)}]\dot{I}_1$$



$$10\dot{I}_2 + 10\dot{I}_2 + (j20\dot{I}_2 - j10\dot{I}_1) = 0$$

如何先求 $\dot{I}_2$?

$$\dot{U}_{oc} = -(-j\omega M)\dot{I}_1 = j\omega M\frac{\dot{U}_s}{Z_{11}} = j10 \times \frac{100\angle 0^\circ}{20 + j30}$$

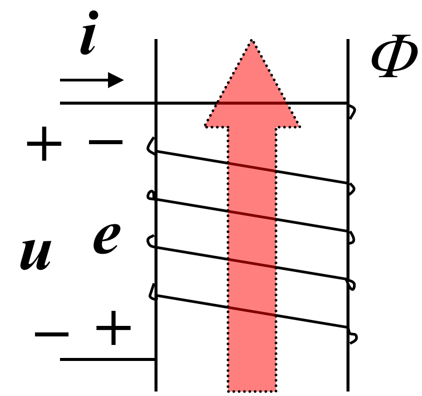
$$Z_{eq} = (10 + j20) + \frac{10^2}{20 + j30}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc}}{10 + Z_{eq}}$$

$$20\dot{I}_1 + j30\dot{I}_1 - j10\dot{I}_2$$
$$= 100\angle 0^\circ$$

13.4 变压器　Transformers

1. 变压器线圈的基本电磁关系



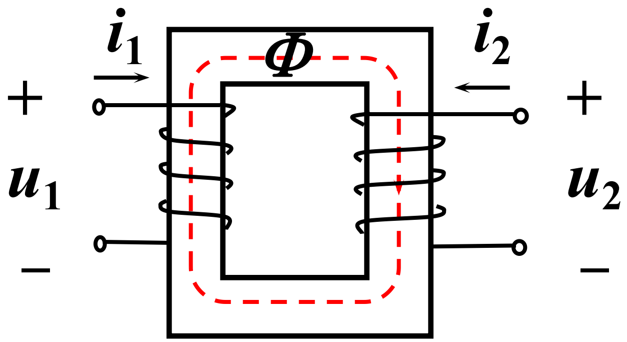
载流回路中的电流 i → 安培环路定律 $\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum i_{\text{int}}$ → 磁场强度$\boldsymbol{H}$ → $\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的关系 → 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$

→ 磁通的定义 $\Phi=\iint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ → 磁通Φ → 磁链的定义 $\Psi=N\Phi$ → 磁链 Ψ

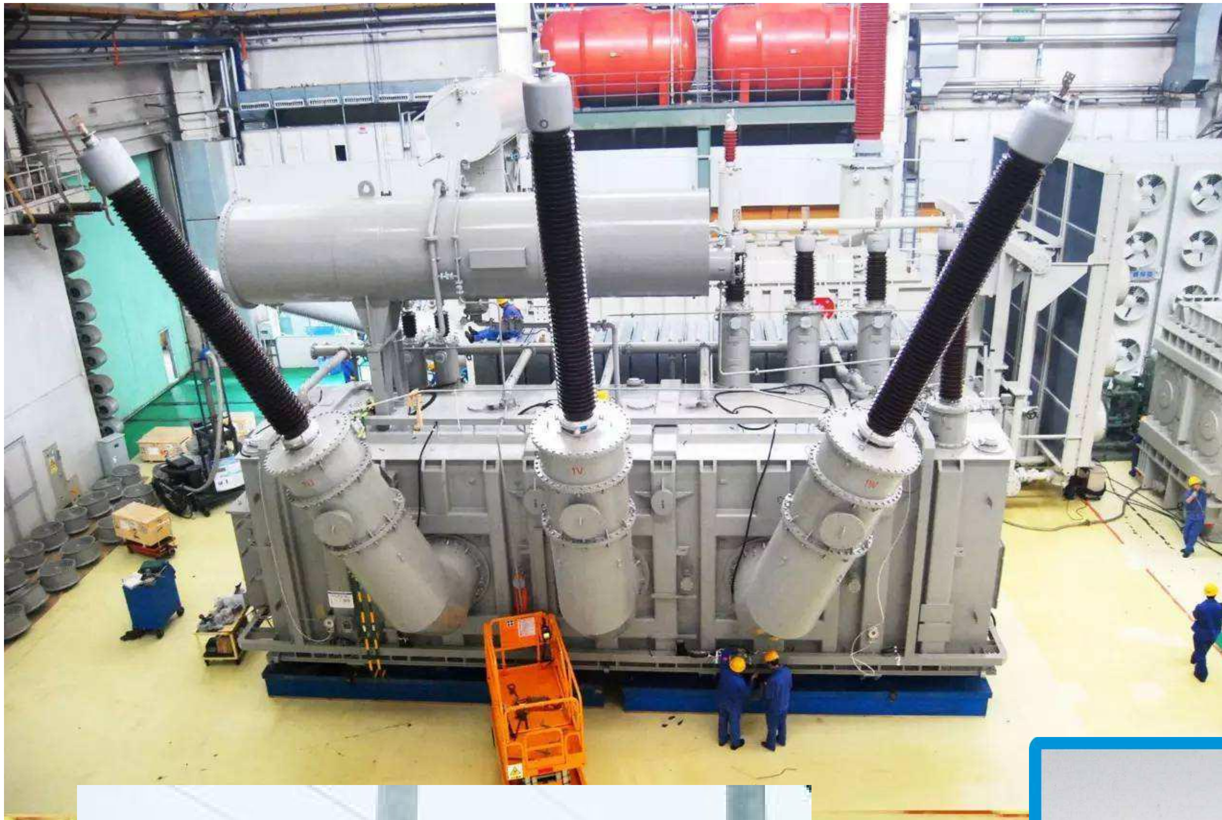
→ 电磁感应定律 $e=-\dfrac{d\Psi}{dt}$ → 电动势e → u和e的关系 → 感应电压u

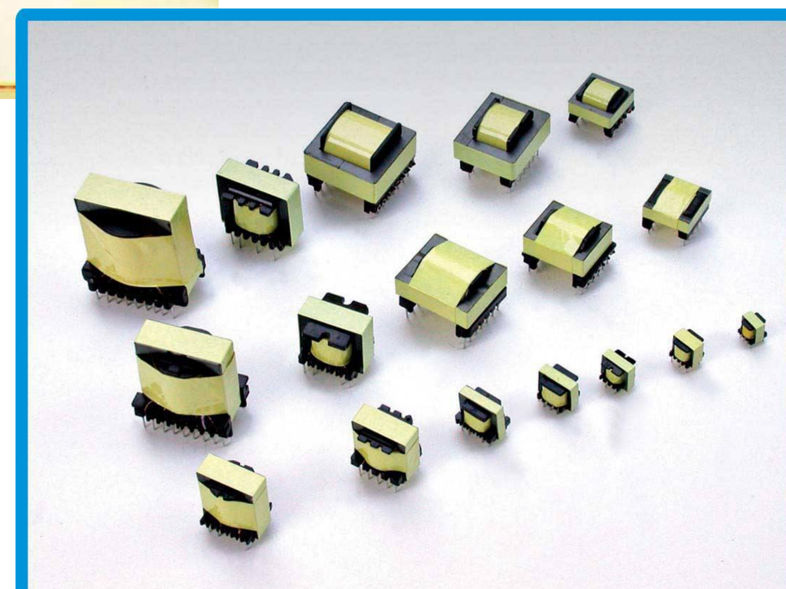
$$u=L\frac{di}{dt}$$

2. 变压器的作用

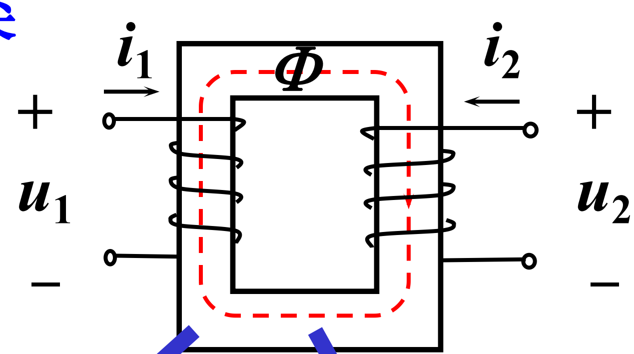


- 交流变压、变流
- 传送功率
- 电隔离
- 阻抗匹配



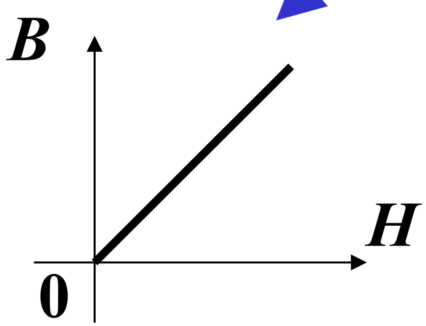


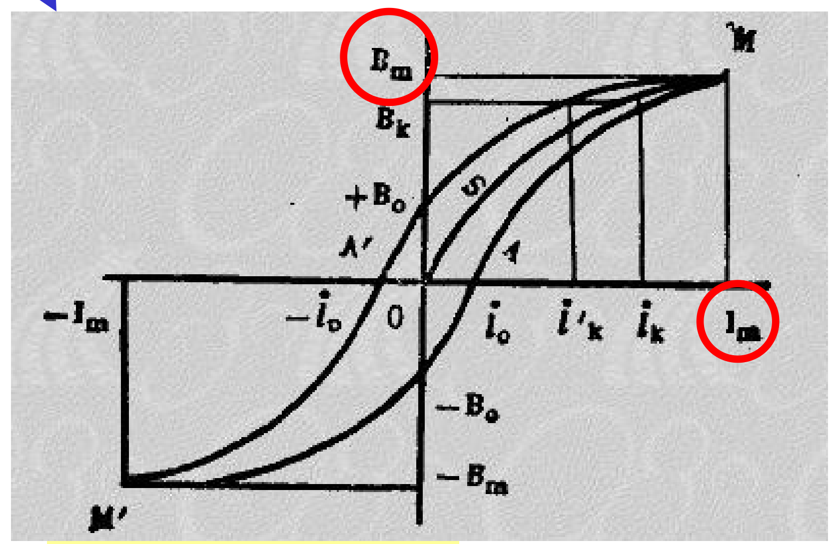
3. 变压器的分类



空气

硅钢片、铁氧体、非晶合金





物理量之间关系简单，容易分析。

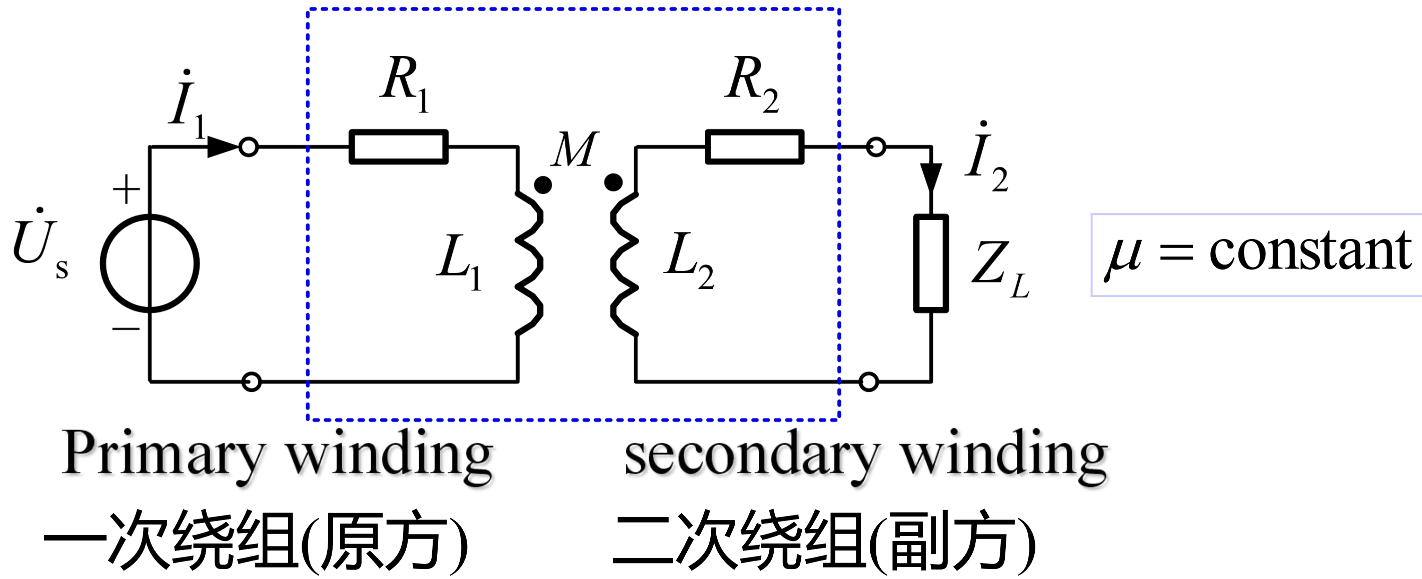
空心变压器

铁心变压器　　*B-H*间非线性

相同体积下
L比较大

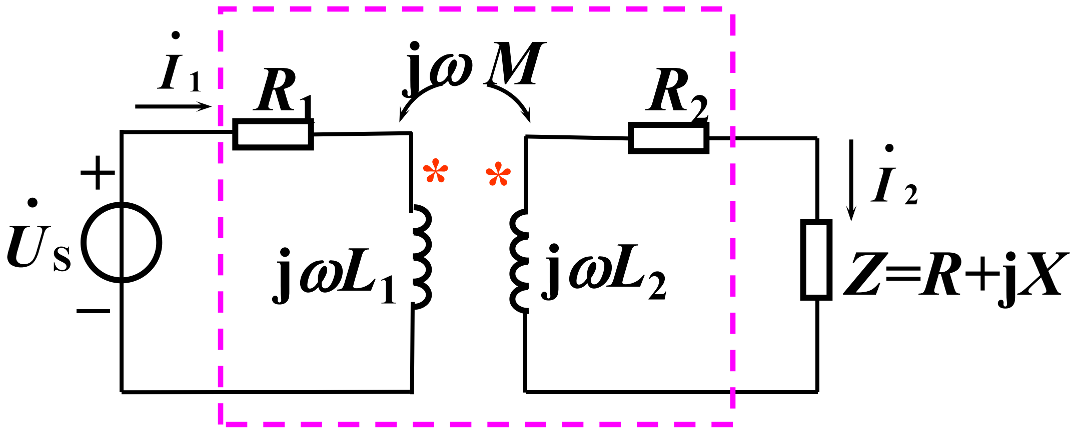
相同电流产生的*B*大。

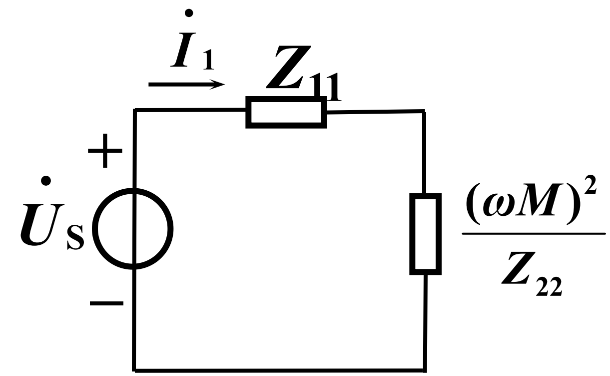
线性变压器 Linear transformers（*Air-core transformers*）



- 线性变压器（空心变压器） 自感不大，低频下自感抗低，因而线圈电流大。一般用在高频下。优点是没有铁心损耗。分析时用线性耦合电感为模型。
- 为了加大自感，采用铁心，即为铁心变压器，是非线性耦合系统。由于自感大，可以用于低频下。存在铁心损耗。分析时近似为理想变压器。

4. 空心变压器





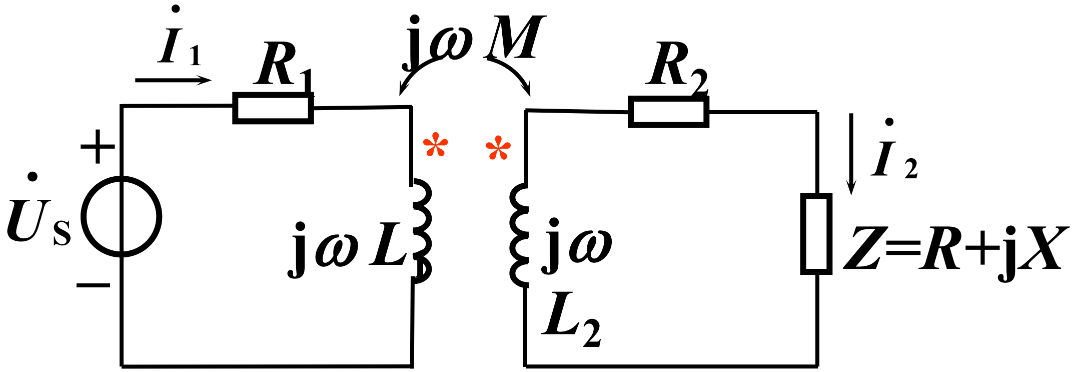
一次绕组等效电路

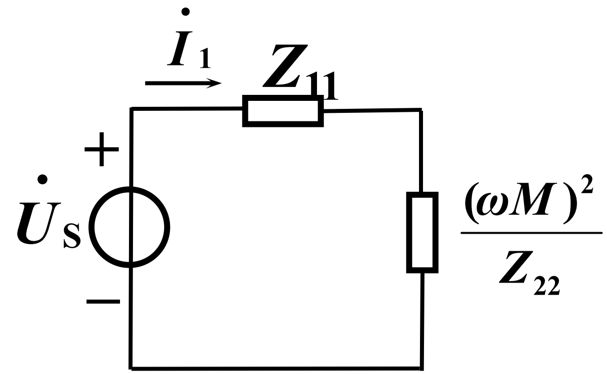
原边回路总阻抗：$Z_{11}=R_1+j\omega L_1$

副边回路总阻抗：$Z_{22}=(R_2+R)+j(\omega L_2+X)=R_{22}+j\omega L_{22}$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1-j\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_S \\ -j\omega M\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}} \\ \dot{I}_2=\dfrac{j\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}} \end{cases}$$

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1}=Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$





原边等效电路

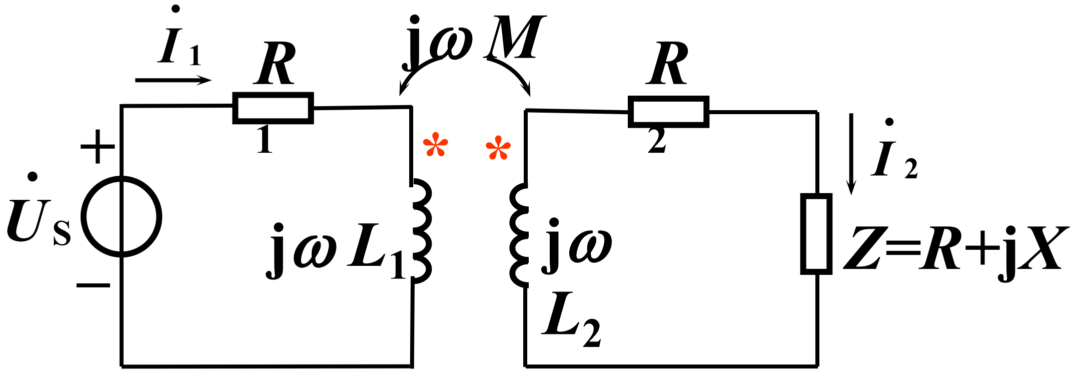
$$Z_l=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\frac{\omega^2M^2}{R_{22}+jX_{22}}=\frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}-j\frac{\omega^2M^2X_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}=R_l+jX_l$$

副边对原边的引入阻抗

引入电阻

引入电抗

负号反映了副边的感性阻抗反映到原边为一个容性阻抗

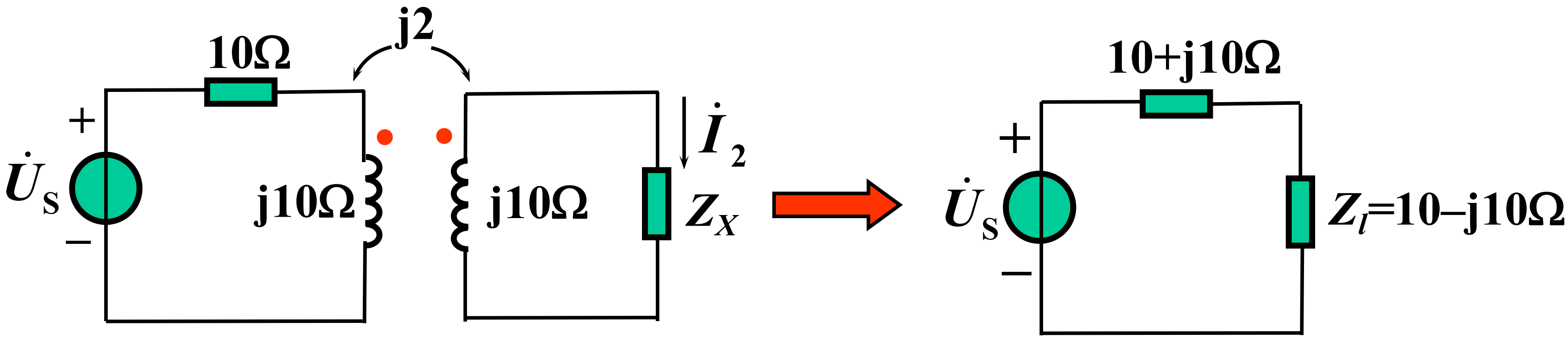


当$\dot{I}_2 = 0$，即副边开路，$Z_{in} = Z_{11}$ ➡ $\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11}} = \dfrac{\dot{U}_S}{R + j\omega L_1}$

- R为线圈内阻，一般情况下较小；空心线圈L较小，为避免空载电流太大，只适用于高频场合。
- 为了提高线圈的自感系数，使其能够应用于低频场合，常采用磁导率高的铁合金磁心，且合理增加线圈匝数，这就是铁心变压器

例1 已知 U_S=20 V，原边引入阻抗 Z_l=10－j10Ω。

求：Z_X并求负载获得的有功功率。



原边等效电路

解 $$Z_l = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{Z_X + \text{j}10}$$

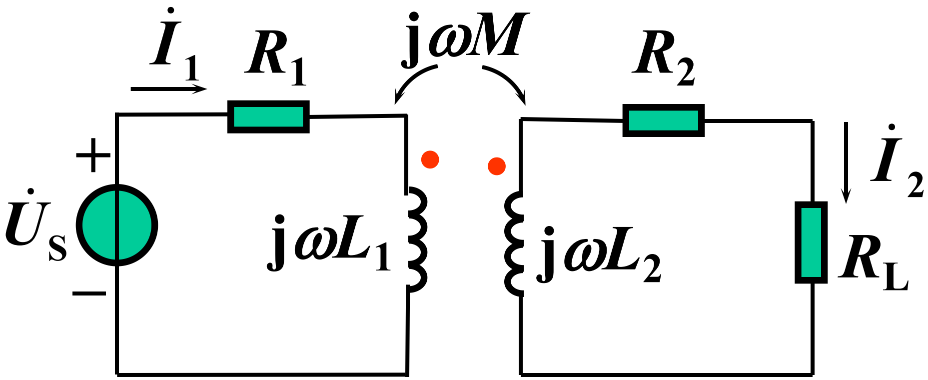
$$\therefore Z_X = 0.2 + \text{j}9.8\Omega$$

此时负载获得的功率 $P = P_{R引} = (\frac{20}{10+10})^2 R_l = 10\text{ W}$

本例实际是最佳匹配状态

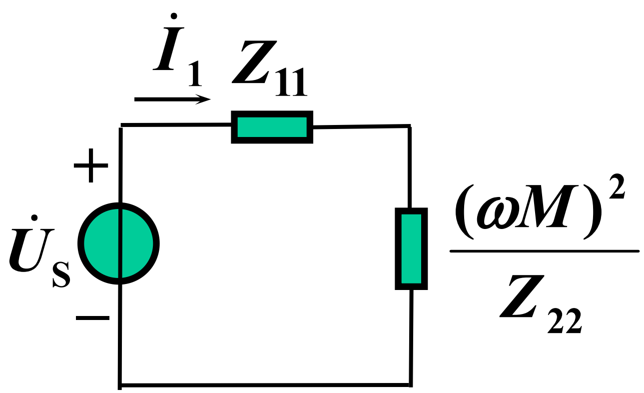
$$Z_l = Z_{11}^*, \qquad P = \frac{U_S{}^2}{4R} = 10\text{ W}$$

例2　已知L_1=3.6H，L_2=0.06H，M=0.465H，R_1=20Ω，R_2=0.08Ω，R_L=42Ω，ω=314rad/s，$\dot{U}_s = 115\angle 0°\text{V}$。



求：$\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$。

解　利用空心变压器原边等效电路



$$Z_{11} = R_1 + \text{j}\omega L_1 = 20 + \text{j}1131\Omega$$

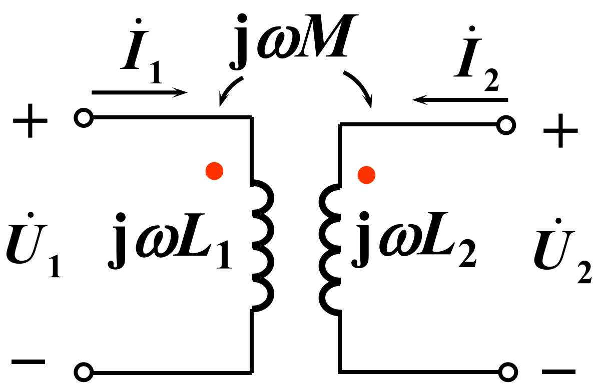
$$Z_{22} = R_2 + R_L + \text{j}\omega L_2 = 42.08 + \text{j}18.85\,\Omega$$

$$Z_l = \frac{X_M^2}{Z_{22}} = 464\angle -24.1^{\circ}\ \ \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + Z_l} = 0.111\angle -64.9^{\circ}\ \ \text{A} \qquad \dot{I}_2 = \frac{\text{j}\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = 0.351\angle\ 1^{\circ}\ \text{A}$$

11.4 全耦合变压器和理想变压器

一、全耦合变压器（perfect coupling transformer）



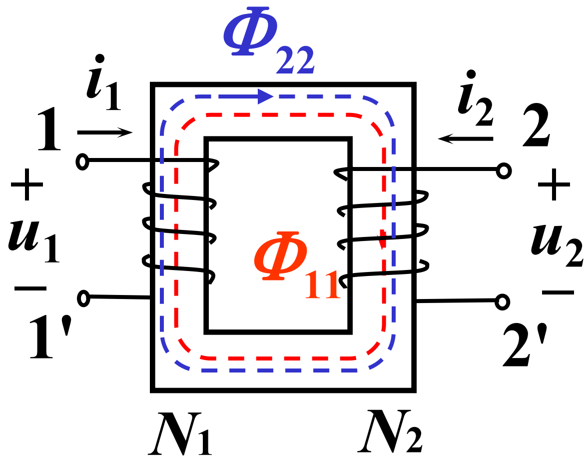
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

全耦合时 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ， $k = 1$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega M}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{L_1}{M}(\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2) + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 = \frac{L_1}{M}\dot{U}_2$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$



$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22}$$

$$u_1 = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\ , \quad u_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

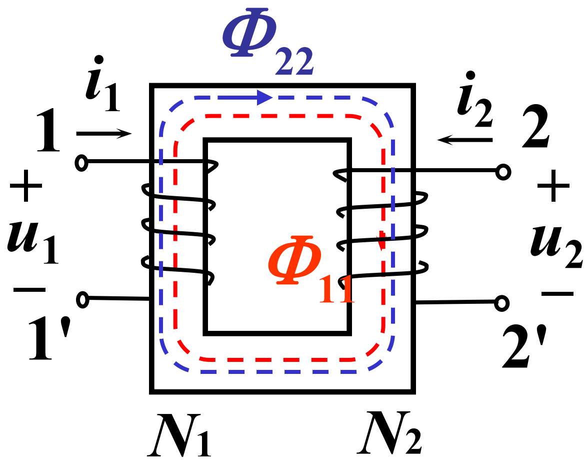
则

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n = \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

全耦合变压器的电压、电流关系

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1 - \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2}{\mathrm{j}\omega L_1} = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{\mathrm{j}\omega M}{\mathrm{j}\omega L_1}\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

6. 理想变压器 (*ideal transformer*)



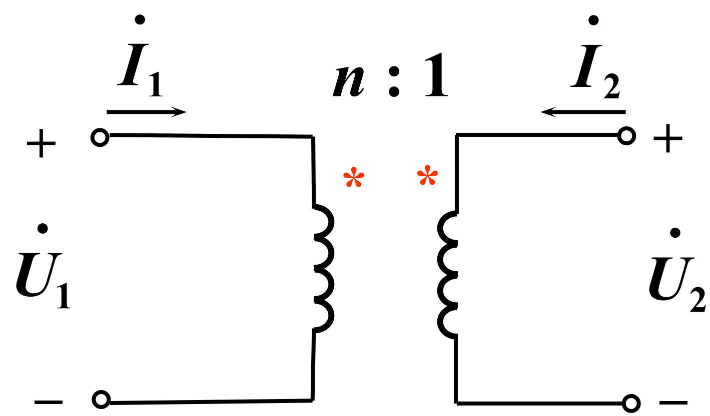
全耦合变压器

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

当L_1 , M, $L_2 \to \infty$，L_1/L_2比值不变 (磁导率$\mu \to \infty$)，则有

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

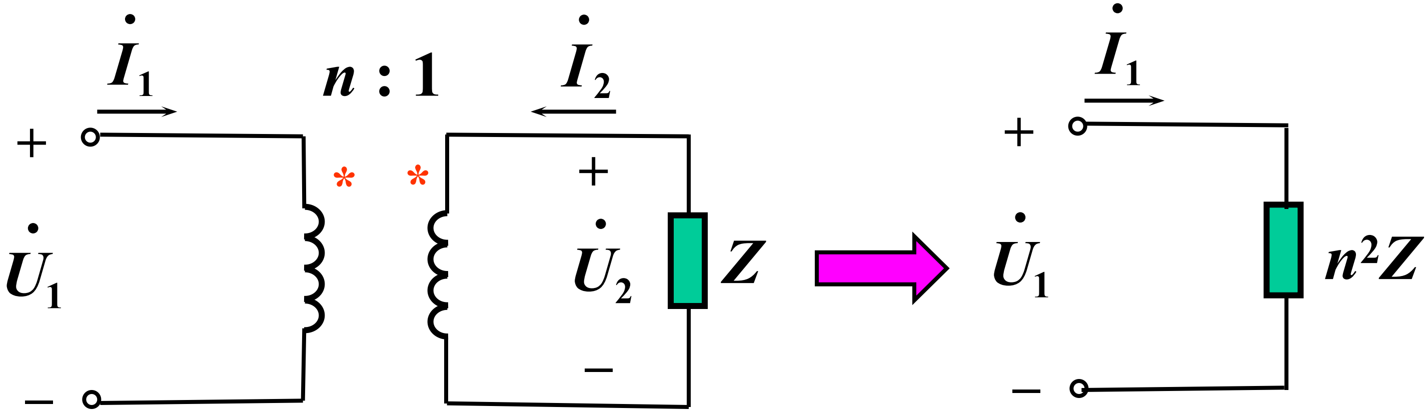
理想变压器的元件特性



理想变压器的电路模型

理想变压器的性质：

(a) 阻抗变换性质

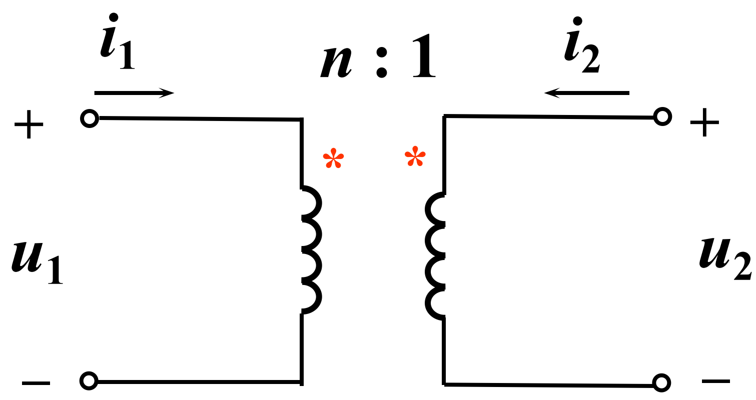


$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2} = n^2(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}) = n^2 Z$$

(b) 功率传输

理想变压器的特性方程为代数关系，因此无记忆作用。

$$\begin{cases} u_1 = nu_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

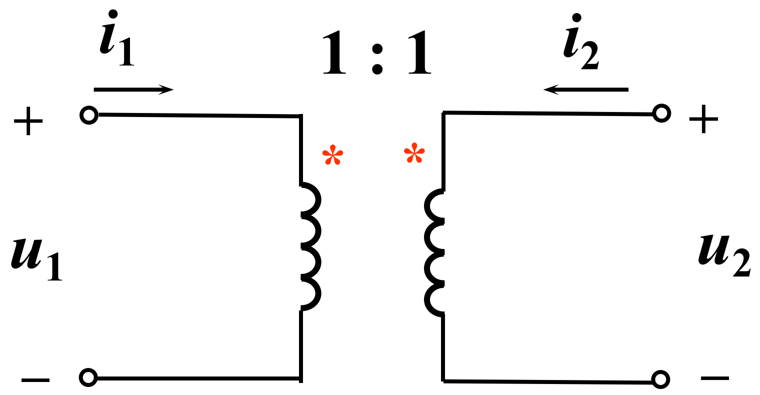


$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-n i_1) = 0$$

由此可以看出，理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

(c) 电气隔离

一次绕组、二次绕组的匝数比为1，称为隔离变压器。



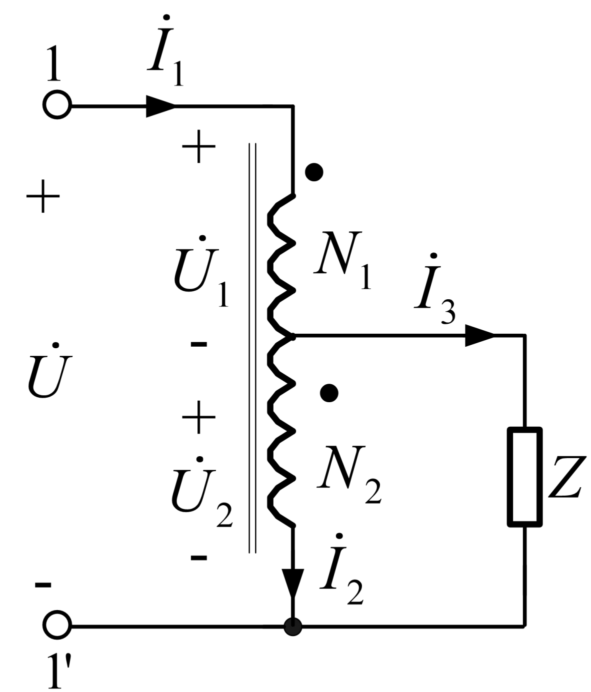
隔离变压器的作用为对电源回路和负载回路进行电气隔离。

5. Ideal autotransformers 自耦变压器

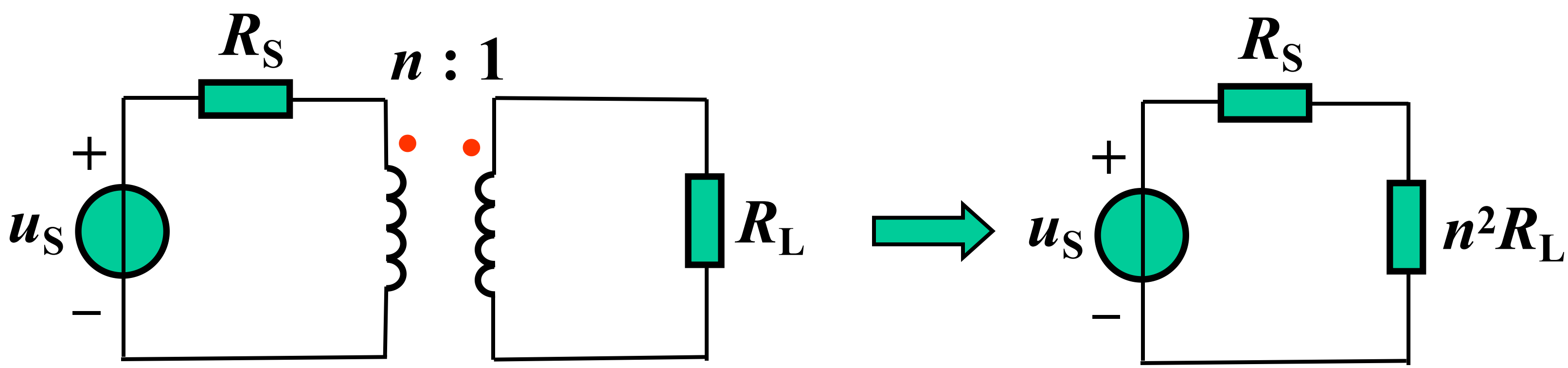
单相变压器闭合铁心上的两个线圈在电气上是不相连的，而自耦变压器是闭合铁心上只有一个线圈，从线圈中间接出一个抽头，线圈的一部分为一次绕组（或二次绕组），线圈的全部为二次绕组（或一次绕组）。

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} \longrightarrow \frac{\dot{U}}{\dot{U}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2}$$

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1} \longrightarrow \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_3} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1 - \dot{I}_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$



例1 已知电源内阻R_S=1kΩ，负载电阻R_L=10Ω。为使R_L上获得最大功率，求理想变压器的变比n。

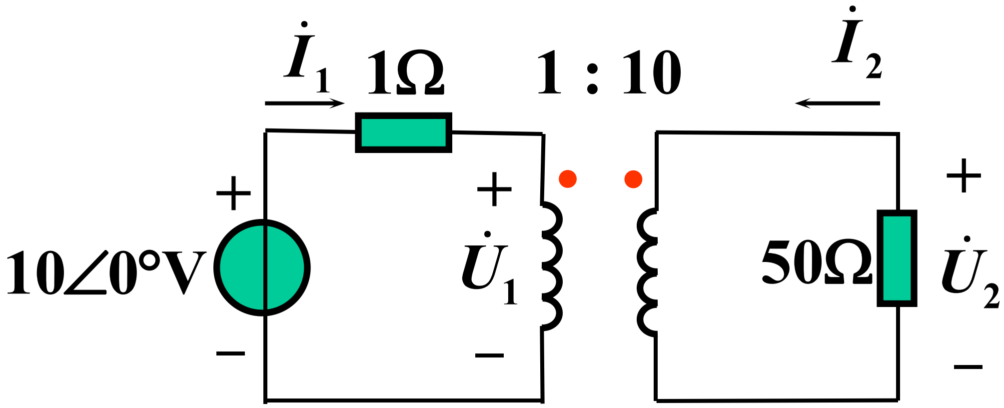


解 当 $n^2R_L=R_S$时匹配，即

$$10n^2=1000$$

$$\therefore\ n^2=100,\quad n=10.$$

例2　已知如图求 $\dot{U}_2$。



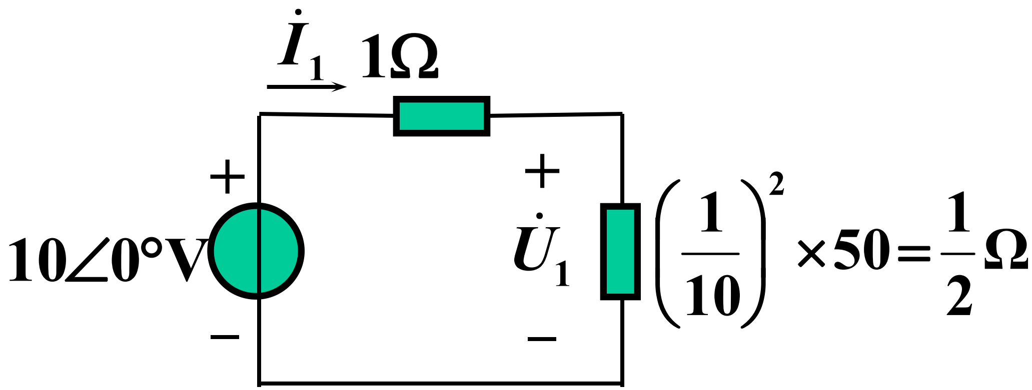
方法1　列方程

$$\begin{cases} 1\times \dot{I}_1+\dot{U}_1=10\angle 0^\circ \\ 50\dot{I}_2+\dot{U}_2=0 \\ \dot{U}_1=\dfrac{1}{10}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1=-10\dot{I}_2 \end{cases}$$

解得

$$\dot{U}_2=33.33\angle 0^\circ \mathrm{V}$$

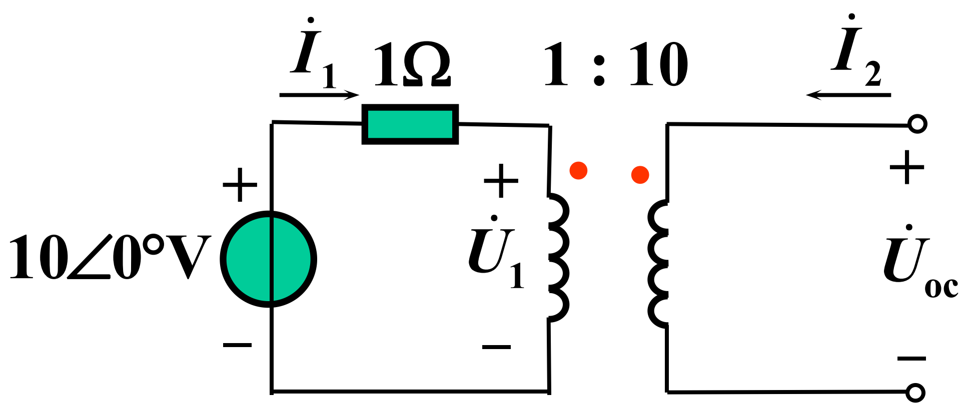
方法2　阻抗变换



$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0°}{1+1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}\angle 0°\text{V}$$

$$\dot{U}_2 = n\dot{U}_1 = 10\,\dot{U}_1$$
$$= 33.33\angle 0°\text{V}$$

方法3　戴维南等效

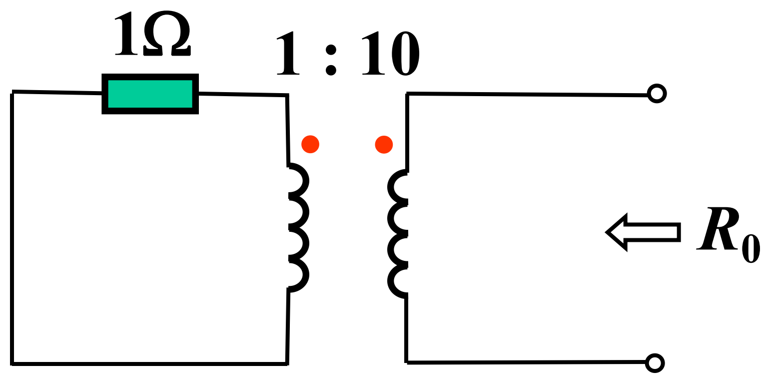


（1）求$\dot{U}_{oc}$

$$\because \dot{I}_2 = 0, \quad \therefore \dot{I}_1 = 0$$

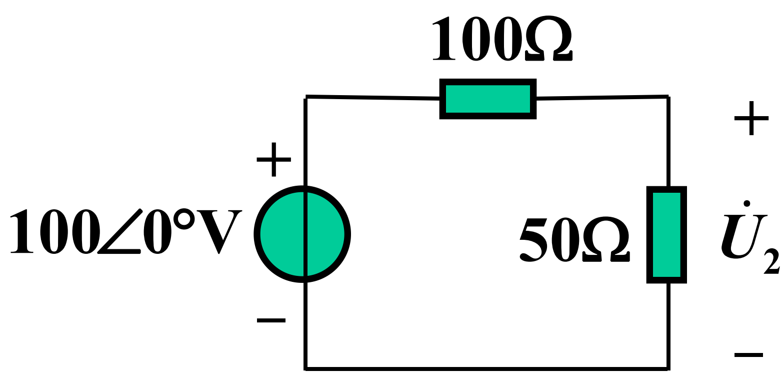
$$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1 = 10\dot{U}_S$$
$$= 100\angle 0°\text{V}$$

（2） 求R_0



$R_0=10^2\times1=100\Omega$

戴维南等效电路



$$\dot{U}_2=\frac{100\angle0^\circ}{100+50}\times50=33.33\angle0^\circ\text{V}$$

作业

- 13.2节：13-6
- 13.3节：13-9
- 13.4节：13-15
- 13.5节：13-20