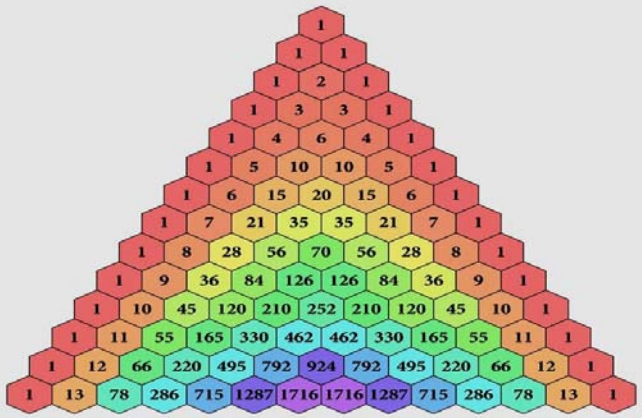


第2.4节 二项式系数和恒等式

Section 2.4: Binomial Coefficients and Identities

知识要点

1. 二项式定理
2. 帕斯卡恒等式和三角形
3. 其他二项式系数恒等式

二项式定理

- 具有n个元素的集合的r组合记作$C(n,r)$，也记作$\binom{n}{r}$. 由于这些数出现在二项式的幂$(a+b)^n$的展开式中作为系数，所以这些数叫做**二项式系数**.

- 例:$(x+y)^2$的展开式是多少? $(x+y)^3$的展开式是多少? $(x+y)^{100}$的展开式是多少?
- 解:
  - $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2$
  - $(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
  - $(x+y)^{100}$的展开式稍后我们再回答.

二项式定理

- **二项式定理**:设x和y是变量, n是非负整数, 那么

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

$$=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

- 二项式定理给出了二项式幂的展开式的系数. 一个二项式是两项的和, 例如$x+y$.

二项式定理

- 例:求$(x\ \ + y)^5$的展开式
- 解:根据二项式定理, 我们有

$$(x+y)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}x^{5-j}y^j$$

$$=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y^1+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}x^1y^4+\binom{5}{5}y^5$$

$$=x^5+5x^4y^1+10x^3y^2+10x^2y^3+5x^1y^4+y^5$$

二项式定理

- 例:求$(x+y)^{100}$的展开式
- 解:根据二项式定理, 我们有

$$(x+y)^{100}=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}x^{100-j}y^{j}$$

$$=\binom{100}{0}x^{100}+\binom{100}{1}x^{99}y^{1}+\cdots+\binom{100}{99}x^{1}y^{99}+\binom{100}{100}y^{100}$$

二项式定理

- 例:在$(2x - 3y)^{25}$的二项式展开式$x^{12}y^{13}$的系数是多少?
- 解:这个表达式等于$((2x) + (-3y))^{25}$. 根据二项式定理, 我们有

$$(2x+(-3y))^{25}=\sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^{j}$$

因此, 当j =13时可以得到$x^{12}y^{13}$的系数, 即

$$\binom{25}{13}(2)^{25-13}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$$

- 扩展:展开式$x^{13}y^{13}$的系数是多少?
- 解:因为$13+13\neq 25$, 所以无该项展开式, 系数为0.

二项式定理

- 推论:设n为非负整数, 那么

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

- 证:用二项式定理, 令$x=1$, $y=1$, 我们有:

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

二项式定理

- 推论:设n为正整数, 那么$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
- 证:用二项式定理, 令x=1, y=-1, 我们有:

$$0=((1)+(-1))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

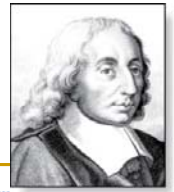
二项式定理

- 推论:设n为非负整数, 那么$\sum_{k=0}^{n}(2)^k\binom{n}{k}=3^n$
- 证:用二项式定理, 令$x=1$, $y=2$, 我们有:

$$3^n=((1)+(2))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^{n-k}(2)^k=\sum_{k=0}^{n}(2)^k\binom{n}{k}$$

帕斯卡恒等式

Blaise Pascal
(1623-1662)



- 定理:(**帕斯卡恒等式**) 设n和k是满足$n \geq k \geq 0$的正整数, 那么

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

- 证(**组合分析证明法**):
  - 假定T是包含$n+1$个元素的集合. 令a是T的一个元素, 且$S=T-\{a\}$.
  - T包含k个元素的子集有$\binom{n+1}{k}$个.
  - T包含k个元素的子集, 或者包含a和S的k-1个元素; 或者不包含a但包含S的k个元素.
  - 由于S的k-1个元素的子集合数有$\binom{n}{k-1}$个, 所以T含a在内的k元子集有$\binom{n}{k-1}$个.
  - 又由于S的k元素的子集有$\binom{n}{k}$个, 所以T的不含a的k元子集有$\binom{n}{k}$个.
  - 从而得到$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

【备注:答案非唯一】

帕斯卡三角形

- 帕斯卡恒等式是二项式系数以三角形表示的几何排列的基础
  - 该三角形叫做**帕斯卡三角形**, 或**杨辉三角形**. 三角形第n行由二项式系数$\binom{n}{k}$组成.
  - 其中相邻的二项式系数相加时, 就产生了下一行在这两个系数之间的二项式系数.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8} \\
\cdots
\end{array}
$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

【帕斯卡恒等式$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$】

其他二项式系数恒等式

- **范德蒙恒等式**：m,n和r是非负整数，其中r不超过m或n，那么

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

- 证(组合分析证明法)：假定从第一个集合有m项，第二个集合有n项. 当从两个集合的并集中取r个元素的方式数为$\binom{m+n}{r}$.

  此外，我们还可以采用另外一种方式来处理，首先从第二个集合中取k个元素(方法是$\binom{n}{k}$)，然后从第一个集合取r-k个元素(方法是$\binom{m}{r-k}$). 由乘积法则可知，共有$\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$种方式完成. 得证.

其他二项式系数恒等式

- 推论: n是非负整数，那么

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

- 证:范德蒙恒等式中$m = r = n$，可得$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$. 由于$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, 所以上式$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$=$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, 得证.

其他二项式系数恒等式

- 定理: n和r是非负整数，其中r不超过n，那么

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

- 证明略.

其他二项式系数恒等式

- 例: 使用组合分析法证明$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
- 解:
  - 将$2n$个不同元素的集合划分成两个分别有n个元素的集合A与B,
  - 左边相当于从$2n$个不同元素的集合任取2个元素的组合数, 共有$\binom{2n}{2}$种方法;
  - 右边表示从这个集合里取2个元素也可以等价地:
    - 1)要么从A中取2个, 有$\binom{n}{2}$种方法;
    - 2)要么从B中取2个, 有$\binom{n}{2}$种方法;
    - 3)要么分别从A中取一个, 从B中取一个, 共有$n * n$种方法;
  - 利用加法原理, 得到总数为$= 2\binom{n}{2} + n^2$
  - 由此得证, 等式左边= 右边

其他二项式系数恒等式

- 例: 使用组合分析法证明$\binom{m}{0}\binom{n}{n}+\binom{m}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{n}$
- 解:
  - 将有m个男生, n个女生的集合中选择出n个同学来参加比赛.
  - 右边相当于从$m+n$个学生的集合中选择n个学生的组合数, 共有$\binom{m+n}{n}$种方法;
  - 左边表示从这个集合里选取n个同学也可以等价地:
    - 要么从m个男生中选择0个, 从n个女生中选择n个, 有$\binom{m}{0}\binom{n}{n}$种方法;
    - 要么从m个男生中选择1个, 从n个女生中选择$n-1$个, 有$\binom{m}{1}\binom{n}{n-1}$种方法;
    - ……
    - 要么从m个男生中选择n个, 从n个女生中选择0个, 有$\binom{m}{n}\binom{n}{0}$种方法;
  - 利用加法原理, 得到总数=$\binom{m}{0}\binom{n}{n}+\binom{m}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{0}$
  - 由此得证, 等式左边= 右边

其他二项式系数恒等式

- 例: 使用组合分析法证明$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\times 2^{n-1}$
- 解:
  - 在n个学生的集合中选择出$r(r=1,2,3,\ldots n)$个同学组成班长候选团，然后再从中选择1个同学成为班长, 求解班长产生的方法有多少种?
  - 左边相当于先从n个人中选择r个成为子集, 有$\binom{n}{r}$种方法. 然后从r个子集中选择1个成为班长, 有$\binom{r}{1}$种方法. $r=1,2,3,\ldots n$, 因此总共有方法数 = $\binom{n}{1}\binom{1}{1}+\binom{n}{2}\binom{2}{1}+\binom{n}{3}\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{1}$=$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}$
  - 右边表示:先考虑确定一个同学当班长, 那么班长候选团除该同学以外可能有0, 1, 2,…, n-1个. 那么该同学当班长的方法数 = $\binom{n-1}{0}*1+\binom{n-1}{1}*1+\binom{n-1}{2}*1+\cdots+\binom{n-1}{n-1}*1$=$2^{n-1}$(备注: 根据二项式定理中$x$=1, y=1得到的推论). 然后再考虑实际中每个同学都可能当班长, 也就是最终班长的方法数=$n\times 2^{n-1}$
  - 由此得证, 等式左边= 右边

【备注：该题有一点难度】 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

多项式定理

- **多项式定理**：设n为正整，x_i为实数，i=1，2，…，t. 其中$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$, 那么$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$

  其中已知: $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_t!}$

- 证：展开式中的项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$是如下构成的:在$n$个因式中选$n_1$个因式贡献$x_1$，从剩下$n$-$n_1$个因式选$n_2$个因式贡献$x_2$，…，从剩下的$n$-$n_1$-$n_2-\ldots-n_{t-1}$个因式中选$n_t$个因式贡献$x_t$. 因此:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}$$