

1. 用扩展欧几里得算法把 $\gcd(100001, 1001)$ 表示成 100001 和 1001 的线性组合。(10 分)
2. 求线性同余式 $3x \equiv 7 \pmod{10}$ 的解, 要求分别利用扩展欧几里得方法求解 $3^{-1} \pmod{10}$, 即 $3 \pmod{10}$ 的逆。(20 分)
3. 证明当素数 $p \mid (a \cdot b)$, 则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$, 其中 a, b 为整数, 请写出具体证明过程; 请写出一个当 p 不是素数时, 上述结论不成立的例子(10 分)
4. 用中国剩余定理求解下列方程组, 写出具体求解过程:
 $x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{5}, \text{ and } x \equiv 4 \pmod{11}.$ (20 分)
5. 利用费马小定理求 $23^{1002} \bmod 41$. (10 分)
6. $N=55, k=37, t=54$ (30 分).
 - (1) k 作为公钥, 求密文 t 对应的明文.
 - (2) k 作为私钥, 求明文 t 对应的密文.