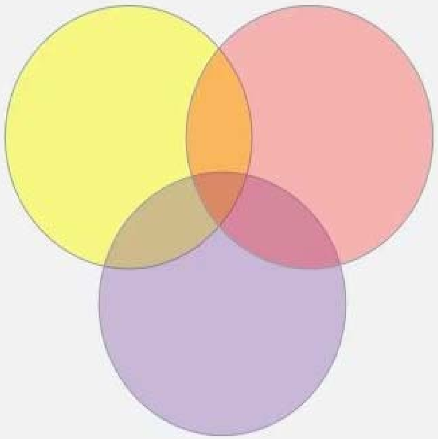


第3.5节 容斥

Section 3.5: Inclusion-Exclusion

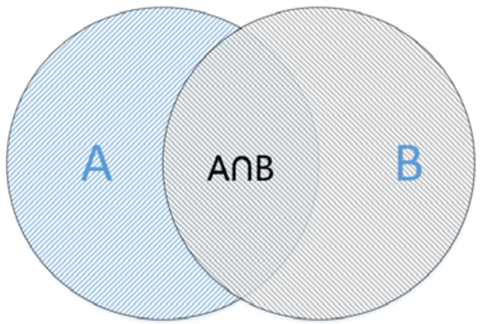
知识要点

1. 容斥
2. 容斥的例子

3.5.1 容斥原理

- 在前面相关章节中证明了两个集合A和B的并集中的元素数是这些集合的元素数之和减去其交集的元素数, 即:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



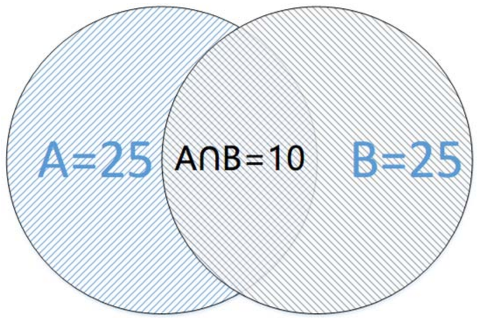
【基础知识: ∪并集, ∩交集】

3.5.1 容斥原理

- 这个关于两个集合并集中元素数的公式在计数问题中经常被使用.
- 例:一个班有25个计算机专业的学生，25个数学专业的学生，10个同时主修计算机和数学的学生. 如果一个学生或者主修计算机，或者主修数学, 或者同时主修计算机和数学. 那么这个班上有多少个学生?

3.5.1 容斥原理

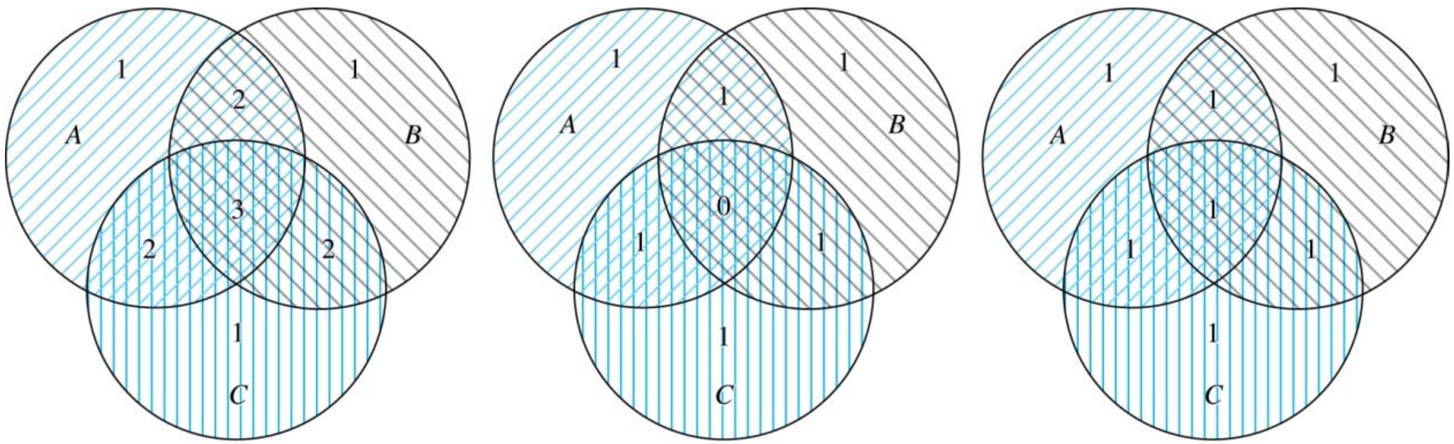
- 这个关于两个集合并集中元素数的公式在计数问题中经常被使用.
- 例:一个班有25个计算机专业的学生，25个数学专业的学生，10个同时主修计算机和数学的学生. 如果一个学生或者主修计算机，或者主修数学, 或者同时主修计算机和数学. 那么这个班上有多少个学生?
- 解:设A为计算机专业的学生的集合，B为数学专业的学生的集合，那么$A \cap B$表示同时主修计算机和数学的学生的集合，这个班上的学生的集合表示为$A \cup B$, 所以 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 25 - 10 = 40$.



3.5.1 容斥原理

- 三个集合A,B,C的并集可推广如下:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



(a) Count of elements by $|A|+|B|+|C|$

(b) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$

(c) Count of elements by $|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

3.5.2 容斥原理

- 例:某单位举行篮球，长跑和跳绳比赛，规定每人最多只能报两个比赛，结果一共有40人报名．篮球，长跑和跳绳的报名人数分别为23人，15人，25人；且同时报篮球,长跑的有7人；同时报篮球,跳绳的有8人．那么同时报长跑和跳绳的人数为多少?

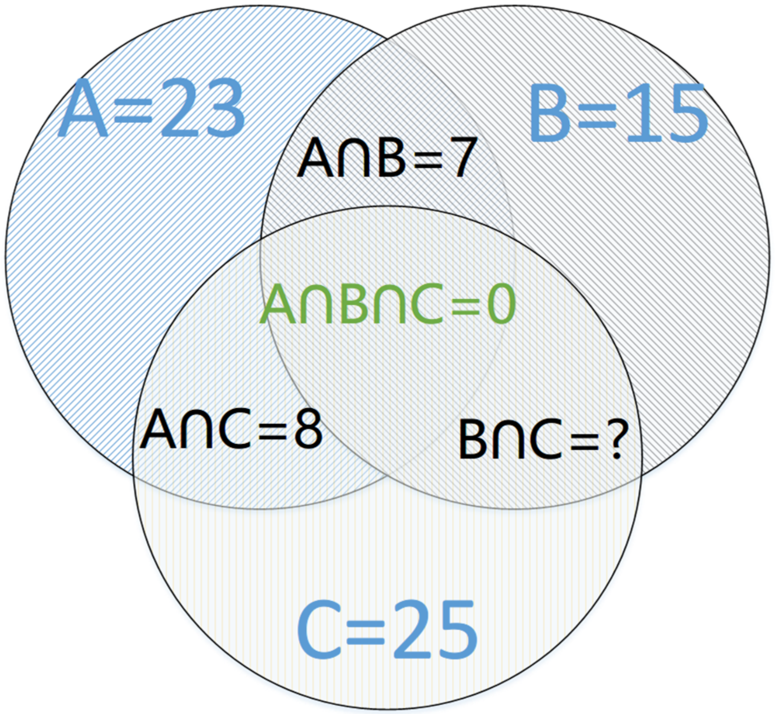
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3.5.2 容斥原理

- 例:某单位举行篮球，长跑和跳绳比赛，规定每人最多只能报两个比赛，结果一共有40人报名．篮球，长跑和跳绳的报名人数分别为23人，15人，25人；且同时报篮球,长跑的有7人；同时报篮球,跳绳的有8人．那么同时报长跑和跳绳的人数为多少?
- 解:因为题目规定每个人最多只能报两个比赛，所以此题没有三种都报的人．我们设报篮球的为A，报长跑的为B，报跳绳的为C．那么A∩B∩C为0，A∩B=7，A∩C=8，所求为B∩C．根据标准公式：A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C=总体-三项都不，总体为40，代入数据有：23+15+25-7-8-B∩C=40-0，得到B∩C=8.

3.5.2 容斥原理

❑解(续):



3.5.2 容斥原理

- 定理(容斥原理):设A_1, A_2, …, A_n是有穷集. 那么:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap a_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap a_n|$$

- 证明略.
- 计算n个集合的并集大小时，需要将n个集合的元素个数相加，然后减去所有两个集合交集的元素个数，然后加上所有三个集合交集的个数，如此下去，直到所有集合的交集. 其中，奇数集合个数时是加法，偶数集合个数时是减法.

3.5.2 容斥原理

- 例:求4个集合的并集中的元素数给出一个公式

3.5.2 容斥原理

- 例:求4个集合的并集中的元素数给出一个公式
- 解:根据容斥原理可知

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_2 \cap A_3|-|A_2 \cap A_4|-|A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$

注意以上共包含15个不同的项(n个元素的集合中，非空子集数为2^{n-1}个)