4.6.3 使用推理规则建立论证

概念

描述事实的语句

判断

对概念的肯定与否定的判断

推理

从一个/多个前提利用推理规则推出结论的思维过程

认识世界的渐进过程！

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 【**论证**】论证的**前提**为$A_1, A_2, \cdots, A_k$, **结论**为B. 只要$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$为真, 并且$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$为真, 那么$B$也肯定为真. 我们把语句的这种论证形式称为**有效的**.

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 多个前提时，通常用到前面提及的推理规则来证明论证形式有效. 常用的论证方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)**

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 例:大宋提刑官清水断油钱案. 某小伙偷肉铺老板钱反咬一口, 宋慈用清水找到铜钱主人. 如果钱不是从肉铺偷的, 放于水面就不会浮起油脂. 但该小偷的钱浮起了油脂. 请使用推理规则建立有效论证.

4.6.3 使用推理规则建立论证

- 例:大宋提刑官清水断油钱案. 某小伙偷肉铺老板钱反咬一口, 宋慈用清水找到铜钱主人. 如果钱不是从肉铺偷的, 放于水面就不会浮起油脂. 但该小偷的钱浮起了油脂. 请使用推理规则建立有效论证.
- 解:设A表示钱不是从肉铺偷的, B表示水面上没有油脂. 翻译前提为$A \to B, \neg B$, 结论为$\neg A$. 论证如下所示:

步骤	理由
1. $A \to B$	前提引入
2. $\neg B$	前提引入
3. $\neg A$	拒取式, 用步骤1和2

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 常用的论证方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法** (详见下页内容)
  - 3) 归谬证明法(或简称归谬法)

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 【**附加前提证明法**】推理形式为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B)$. 将结论的前件$A$作为推理的前提(A称作附加前提)，结论为$B$，即推理形式改写为$\boldsymbol{(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B}$，称作附加前提证明法(Conclusion Premise Rule, 简称CP规则).

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to (A \to B) \\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\
\Leftrightarrow\ &(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \to B
\end{aligned}
$$

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - (1) “如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影.”
  - (2) “小赵不去看电影, 或小张去看电影.”
  - (3) “小王去看电影.”
  - (4) “如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影.”

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - (1) “如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影.”
  - (2) “小赵不去看电影, 或小张去看电影.”
  - (3) “小王去看电影.”
  - (4) “如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影.”
- 解:
  - 设p: “小张去看电影” q: “小王去看电影” r: “小李去看电影” s: “小赵去看电影”
  - 翻译前提为: $(p \wedge q) \to r$, $\neg s \vee p$, q, 结论为$s \to r$. 论证如下所示:

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

已知$(p \wedge q) \to r$, $\neg s \vee p, q$
结论为$s \to r$

❑解(续): 步骤 理由

步骤	理由
➢1. s	附加前提引入
➢2. $\neg s \vee p$	前提引入
➢3. p	析取三段, 用步骤1和2
➢4. q	前提引入
➢5. $p \wedge q$	合取引入, 用步骤3和4
➢6. $(p \wedge q) \to \mathrm{r}$	前提引入
➢7. r	假言推理, 用步骤5和6

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 常用的论证方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)** (详见下页内容)

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 【**归谬法**】推理的形式为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$. 将结论B的否定作为推理的附加前提引入，即$\boldsymbol{A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B}$，推出矛盾(例如$A \wedge \neg A$), 称作归谬证明法(或简称归谬法).

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow\ &\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)
\end{aligned}
$$

若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$为矛盾式，则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式, 即由前提能推出结论$B$.

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例:使用归谬法证明前提$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p$, 能推出结论$\neg q$.

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例:使用归谬法证明前提$(p \wedge q) \to r$, $\neg r \vee s$,$\neg s$, p, 能推出结论$\neg q$.
- 解:步骤 理由

步骤	理由
1. q	结论的否定引入
2. $\neg r \vee s$	前提引入
3. $\neg s$	前提引入
4. $\neg r$	析取三段论, 用步骤2和3
5. $(p \wedge q) \to r$	前提引入
6. $\neg(p \wedge q)$	取拒式, 用步骤4和5
7. $\neg p \vee \neg q$	德摩根律, 用步骤6
8. p	前提引入
9. $\neg q$	析取三段论, 用步骤7和8
10. $q \wedge \neg q$	合取律, 用步骤1和9

- 最后得到矛盾式$q \wedge \neg q$, 即证明给定前提能推出结论$\neg q$.

4.6.4 量化命题的推理

- 推理规则包括:
  - 1, 命题逻辑的推理规则 (前面已讲解)
  - 2, **量化命题的推理规则** (这儿4.6.4小节内容)
- 我们现在开始量化命题的推理规则

4.6.4 量化命题的推理规则1:全称实例

- **全称实例**：从给定前提$\forall xP(x)$得出$P(c)$为真的推理规则，其中c是论域里的一个特定成员.

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 例:p表示“Fido是一条狗” 论域U表为全部的狗. 假设语句“所有的狗都可爱”为真, 那么“Fido是可爱的”为真.

4.6.4 量化命题的推理规则2:全称引入

- **全称引入**: 对论域里所有元素c都有$P(\mathrm{c})$为真的前提, 推出$\forall x P(x)$为真.

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{任意c}}{\therefore\ \forall x P(x)}$$

- 经常在数学证明中隐式使用该规则.

4.6.4 量化命题的推理规则3:存在实例

- **存在实例**: 如果我们知道$\exists x P(x)$为真，得出在论域中存在一个元素c使得$P(\mathrm{c})$为真.

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(\mathrm{c}),\ \text{对某个元素}}$$

- 例:假设语句“有人在课程考试中获得成绩A”为真，那么“如果我们把他叫做a，我们可以说a获得成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则4:存在引入

- **存在引入**: 已知一个特定c使得$P(\mathrm{c})$为真, 得出结论$\exists x P(x)$为真

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{对某个元素}}{\therefore\ \exists x P(x)}$$

- 例:假设语句“张三在课程中获得了成绩A”为真，那么可以得到推论“有人在课程中获得了成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则

❑量化命题的推理规则总结:

推理规则	名称
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	全称实例
$\dfrac{P(c)\text{, 任意c}}{\therefore \forall x P(x)}$	全称引入
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)\text{, 对某个元素}}$	存在实例
$\dfrac{P(c)\text{, 对某个元素}}{\therefore \exists x P(x)}$	存在引入

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 例:使用推理规则证明“史密斯有两条腿”是以下前提的结论“每个人都有两条腿”和“史密斯是个人”.

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 例:使用推理规则证明“史密斯有两条腿”是以下前提的结论“每个人都有两条腿”和“史密斯是个人”.
- 解: $M(x)$表示“x是个人”, $L(x)$表示“x有两条腿”, 史密斯是论域中的值. 翻译以上语句前提为$\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$, $M(S)$, 结论为$L(S)$. 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 推理过程如下:

步骤	理由
1. $\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$	前提引入
2. $M(S) \rightarrow L(S)$	全称实例, 用步骤1
3. $M(S)$	前提引入
4. $L(S)$	假言推理, 用步骤2和3

其实全称实例和假言推理可以组合起来使用

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 论证中常常组合使用全称实例和假言推理，这种组合被称为：**全称假言推理**

$$\begin{array}{l} \forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x)) \\ \mathrm{P}(a), a\text{是论域中的一个特定元素} \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

- 全称假言推理常常用于数学论证中, 比如之前苏格拉底的例子.

$$\begin{array}{l} \forall x(Man(x) \rightarrow Mortal(x)) \\ Man(\mathrm{Socrates}) \\ \hline \therefore Mortal(Socrates) \end{array}$$

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 将全称实例和取拒式组合在一起的组合称为: **全称取拒式**

$$\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$$

$\neg Q(a)$, a是论域中的一个特定元素

$$\therefore \neg P(a)$$

4.6.5 推理规则综合应用

- 例:公安人员审查了一起重大珠宝盗窃案, 已获得以下线索:
  - （1）张三或者李四盗窃了珠宝;
  - （2）若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
  - （3）若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
  - （4）若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
  - （5）午夜时商店的灯光灭了.

  请问张三和李四谁该受到法律的制裁?

4.6.5 推理规则综合应用

张三或者李四盗窃了珠宝;
若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
午夜时商店的灯光灭了.

- 解:李四是盗窃犯.

设A:张三盗窃珠宝；B:李四盗窃珠宝；C:李四的证词正确；D:商店午夜时灯管未灭; E:作案时间发生在午夜前.

符号化为$(A \vee B)\wedge(C \rightarrow D)\wedge(A \rightarrow \neg E)\wedge(\neg C \rightarrow E)\wedge\neg D$, 推理得到结论A或B.

4.6.5 推理规则综合应用

已知(A∨B)∧(C→D)∧(A→¬E)∧(¬C→E)∧¬D
推出A或者B

❑解(续): 步骤	理由
➢1. $\neg D$	前提引入
➢2. $C \rightarrow D$	前提引入
➢3. $\neg C$	取拒式, 用步骤1和2
➢4. $\neg C \rightarrow E$	前提引入
➢5. E	假言推理, 用步骤3和4
➢6. $A \rightarrow \neg E$	前提引入
➢7. $\neg A$	取拒式, 用步骤5和6
➢8. $A \vee B$	前提引入
➢9. B	析取三段论, 用步骤7和8

第4.6节 推理规则总结

- 1、命题逻辑的推理规则
  - 假言推理、取拒式、假言三段论、析取三段论、附加律、化简律、合取律、消解律、构造性二难推理、破坏性二难推理
- 2、量化命题的推理规则
  - 全称实例、全称引入、存在实例、存在引入、全称假言推理、全称取拒式
- 3、使用推理规则建立论证
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法