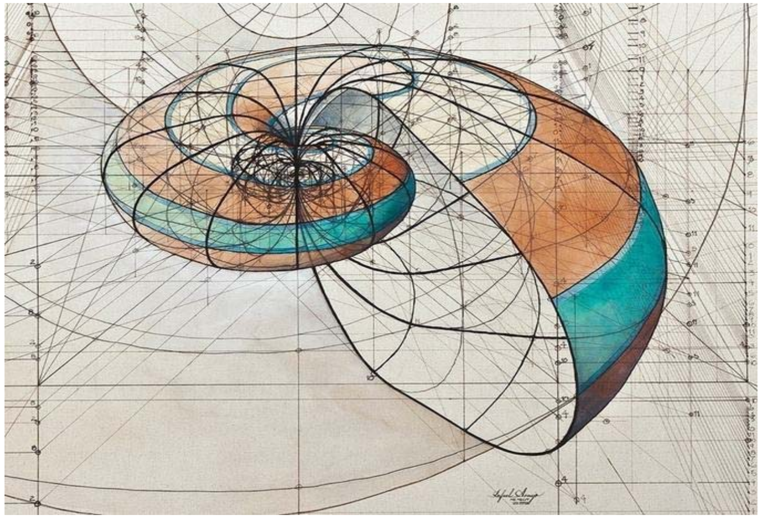

第3.4节生成函数

Section 3.4: Generating Functions

知识要点

1. 生成函数
2. 计数问题与生成函数
3. 常见的有用的生成函数
4. 使用生成函数求解递推关系
5. 使用生成函数证明恒等式

本节用得上的基础知识

- 一些有用的求和公式(离散一的内容):

和	闭形式	和	闭形式
$\sum_{k=0}^{n} ar^k (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

- 二项式定理: $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \Rightarrow (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
- 此外, 本节还有部分内容涉及到微积分相关知识.

生成函数

- 表示一个序列的一种有效方法就是生成函数(也叫母函数)，它把序列的项作为一个形式幂级数中变量x的幂的系数. 生成函数是组合数学中一种重要的方法, 它把离散数列与形式幂级数对应起来

- 定义:实数序列$a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots$的**生成函数**是无穷级数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

- 备注:该定义给出的$\{a_k\}$的生成函数有时叫做$\{a_k\}$的普通生成函数(或一般生成函数). 此外还有指数生成函数(自学).

生成函数

- 例:求以下序列的生成函数
  - (1) $\{a_k\}$, 其中$a_k = 3$
  - (2) $\{a_k\}$, 其中$a_k = k + 1$
  - (3) $\{a_k\}$, 其中$a_k = 2^k$
- 解:
  - (1)$\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$
  - (2) $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$
  - (3) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$

生成函数

- 对于一个有限序列该如何求生成函数呢?
- 通过设置$a_{n+1}=0, a_{n+2}=0$等，把一个有限序列$a_0, a_1, \cdots, a_n$扩充成一个无限序列，就可以定义一个实数的有限序列的生成函数．这个无限序列$\{a_n\}$ 的生成函数$G(x)$是一个n次多项式, 因为当$j>n$时没有形如$a_j x^j$的项出现, 即:

$$G(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_n x^n$$

生成函数

- 例:序列1,1,1,1,1,1的生成函数是多少?

【前面基础知识, 等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$】

生成函数

- 例:序列1,1,1,1,1,1的生成函数是多少?
- 解:
  - 1,1,1,1,1,1的生成函数是$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.
  - $\frac{x^6-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, 其中$x \neq 1$.
  - 因此, $G(x)$= $(x^6 - 1)/(x - 1)$是序列1,1,1,1,1,1 的生成函数, 因为x的幂只在生成函数的序列项中使用, 我们不必担心$G(1)$没有被定义.

【前面基础知识, 等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$】

生成函数

- 例:序列1,1,1,1,...的生成函数是多少?

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$】

生成函数

- 例:序列1,1,1,1,...的生成函数是多少?
- 解:

  1,1,1,1,...的生成函数是$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. 因为 $\frac{1}{1-x}$=1+x+x^2+x^3+..., 对于|x|<1.

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$】

生成函数

- 例:序列$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是多少?

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty}(ax)^j = \frac{1}{1-ax}, |ax| < 1$】

生成函数

- 例:序列$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是多少?
- 解:$1, a, a^2, a^3, \ldots$的生成函数是 $f(x)=\frac{1}{1-ax}$.

  因为 $\frac{1}{1-ax}=1+ax+(ax)^2+(ax)^3+\ldots$, 对于$|ax|<1$.

【前面基础知识, $\sum_{j=0}^{\infty}(ax)^j=\frac{1}{1-ax}, |ax|<1$】

生成函数

- 接下来，我们考虑两个生成函数如何相加和相乘，其证明可以通过微积分相关知识完成．数列的相加对应生成函数的相加，数列的卷积对应生成函数的相乘.
- 定理：令$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$，那么

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}a_j\,b_{k-j}\right)x^k$$

- 备注:只有当幂级数在一个区间收敛才有效．如何证明涉及微积分知识，自学.

生成函数

- 例:已知$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 求解$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$中的系数.

生成函数

- 例:已知$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, 求解$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$中的系数.
- 解:根据前面的例题可知$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$

  那么根据生成函数的相乘定理可得 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}1*1)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$.

- 思考:$f(x)=\frac{1}{(1-x)^3}$, $f(x)=\frac{1}{(1-x)^4}$, …, $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}$时, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$中的系数分别为多少?

生成函数

- 二项式系数$\binom{u}{k}$中，u为正整数，k满足0≤ $k \leq u$. 现在我们扩展**广义二项式系数**(又称牛顿二项式系数)
- 定义:u是实数且k是非负整数. 那么广义二项式系数$\binom{u}{k}$定义为

$$\binom{u}{k}=\begin{cases}\frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-k+1)}{k!}, k>0\\ 1,\quad k=0\end{cases}$$

【前面的基础知识, $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$】

生成函数

- 例:求以下广义二项式系数$\binom{-2}{3}$, $\binom{1/2}{4}$, $\binom{-9}{0}$, 的值
- 解: $\binom{-2}{3}=\frac{(-2)*(-3)*(-4)}{3!}=-4$

$$\binom{1/2}{4}=\frac{(1/2)*(1/2-1)*(1/2-2)*(1/2-3)}{4!}=\frac{-5}{128}$$

$$\binom{-9}{0}=1$$

生成函数

- 根据广义二项式系数，对应定义**广义二项式定理**. 其证明略.
- 定义:x是实数且其绝对值小于1, u是实数, 那么

$$(1+x)^u=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{u}{k}x^k$$

【前面的二项式定理的基础知识】：$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$

生成函数

- 4大常见的有用的生成函数，$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:
- 1、$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$
  - 其中$G(x) = (1 + x)^n$
  - $a_k = C(n,k)$

- 2、$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
  - 其中$G(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
  - $a_k = 1$, 如果$k \le n$; 否则为0

生成函数

- 4大常见的有用的生成函数，$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:
- 3、$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$
  - 其中$G(x)=\frac{1}{1-x}$
  - $a_k=1$
- 4、$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=1+2x+3x^2+\cdots$
  - 见前面例子
  - 其中$G(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$
  - $a_k=k+1$

生成函数

- 常见的有用的生成函数如下:

G(x)	a_k	G(x)	a_k
$(1+\boxed{x})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ $=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+x^n$	$C(n,k)$	$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$	如果$k\le n$,则为1;否则为0
$(1+\boxed{ax})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$ $=1+C(n,1)ax+C(n,2)a^2x^2+\cdots+a^n x^n$	$C(n,k)a^k$	$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$	1
$(1+\boxed{x^r})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $=1+C(n,1)x^r+C(n,2)x^{2r}+\cdots+x^{rn}$	如果$r\|k$,则$C(n,k/r)$;否则为0	$\frac{1}{1-\boxed{ax}}=\sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k=1+ax+a^2x^2+\cdots$	a^k

生成函数

- 常见的有用的生成函数如下(续):

G(x)	a_k	G(x)	a_k
$\frac{1}{1-\boxed{x^r}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^{rk}=1+x^r+x^{2r}+\cdots$	如果$r\|k$,则为1;否则为0	$\frac{1}{(1\boxed{+x})^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k=1-C(n,1)x+C(n+1,2)x^2-\cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k)=(-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{2}}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k =1+2x+3x^2+\cdots$	$k+1$	$\frac{1}{(1\boxed{-ax})^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k=1+C(n,1)ax+C(n+1,2)a^2x^2+\cdots$	$C(n+k-1,k)a^k=C(n+k-1,n-1)\ a^k$
$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k =1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\cdots$	$C(n+k-1,k)=C(n+k-1,n-1)$	(备注:书上剩余两个指数型的公式自学)	

计数问题和生成函数

- 生成函数可以用于求解各种计数问题．特别地，他们可以用于计数各种类型的组合数.

- 例:有n种不同的物体，分别为I_1，I_2，$\cdots$, I_n , 每个物体只有一件．求取r个物体的方案数.

$$(1+\boxed{x})^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$
$$=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+$$
$$\cdots+x^n$$

计数问题和生成函数

- 生成函数可以用于求解各种计数问题．特别地，他们可以用于计数各种类型的组合数.

- 例:有n种不同的物体，分别为I_1，I_2，$\cdots$，I_n，每个物体只有一件．求取r个物体的方案数.
- 解:每种物体的生成函数都是$(x^0 + x^1)$，那么n种物体的生成函数就是$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,x^k$. 因此取$r$个物体, 则$k=r$, 系数为$C(n,r)$, 与之前学的不重复选择物体的一般组合的意义一致.

$$(1+\boxed{x})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$
$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$$

计数问题和生成函数

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体可以取任意件. 求取r个物体的方案数.

$$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k =1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\cdots$$

计数问题和生成函数

- 例:有n种不同的物体, 分别为$I_1, I_2, \cdots, I_n$, 每个物体可以取任意件. 求取r个物体的方案数.
- 解:每种物体的生成函数都是$(x^0+x^1+x^2+\cdots)$，那么n种物体的生成函数就是$(1+x^1+x^2+\cdots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$. 因此取$r$个物体，则$k=r$，系数为$C(n+r-1,r)$, 与之前学的可重复选择物体的组合的意义一致.

$$\frac{1}{1-\boxed{x}}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=1+x+x^2+\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k=1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\cdots$$