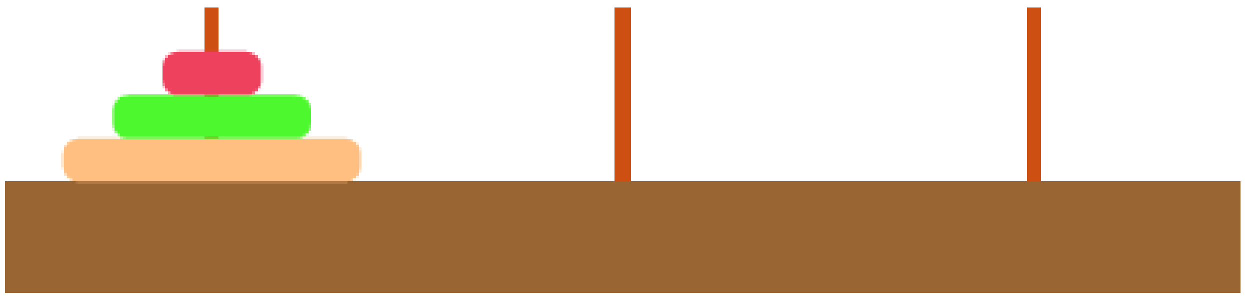
汉诺塔

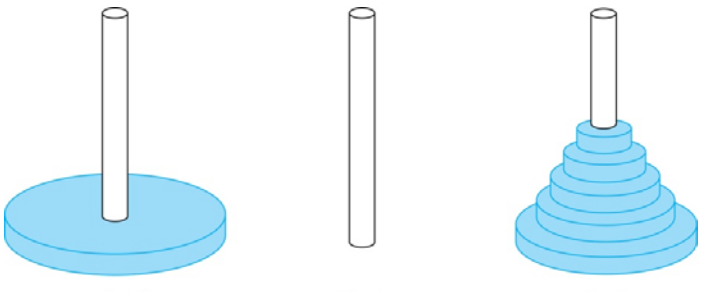
- 例:19世纪后期法国数学家埃德沃德.卢卡斯发明了一个叫**汉诺塔**的游戏. 安装在板子上的3根柱子, 如果大小不同的n个盘子构成. 最开始的时候如柱子1上所示, 盘子根据从大到小的次序排列. 要求每次把1个盘子从一个柱子移动到另外一根柱子, 但是不允许这个盘子放在比它更小的盘子上面. 那么需要多少次移动以后才能将柱子1上的所有盘子移动到柱子2上.



汉诺塔

汉诺塔

- 解:
  - 令H_n 表示解n个盘子的汉诺塔所需移动的次数．建立一个关于序列$\{H_n\}$的递推关系．最初，n个盘子在柱子1．按照游戏规则，我们可以用H_{n-1}次移动将上边的n-1个盘子移动到柱子3(在这些移动中保证最大的盘子不动)．如下图所示:



  - 然后我们就可以用一次移动将最大的盘子从柱子1移动到柱子2，再使用H_{n-1}次移动将柱子3上的那n-1个盘子移到柱子2, 把他们放大最大的盘子上面.
  - 这样就能满足游戏的要求, 因此$H_n = 2H_{n-1} + 1$. 其中初始条件$H_1 = 1$(因为依照游戏规则一个盘子可以用1次移动从柱子1到柱子2).

汉诺塔

- 扩展: 我们可以迭代方法求解这个递推关系:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$
$$= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

……

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1$ (因为$H_1 = 1$)

$= 2^n - 1$

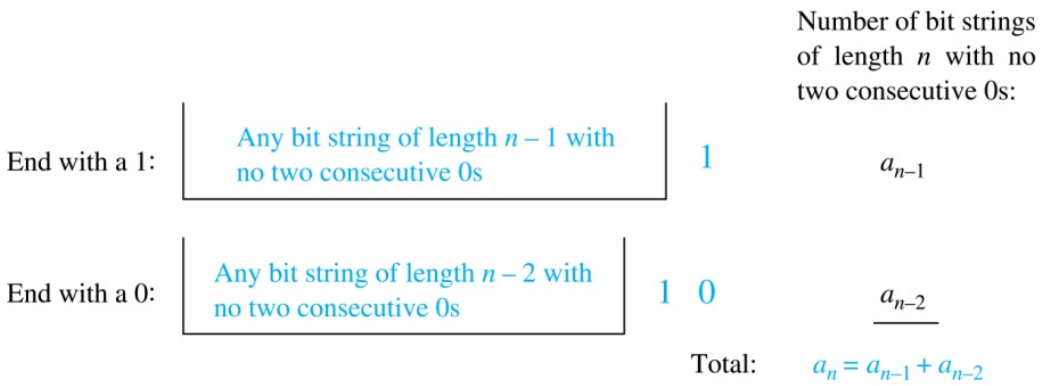
【基础知识：等比序列的求和公式$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$】

位串计数

- 例:对于不含2个连续0的n位二进制位串的个数，找出递推关系和初始条件, 有多少个这样的5位二进制位串?
- 解:
  - 设a_n表示不含2个连续0的n位二进制位串数. 为得到一个关于$\{a_n\}$的递推关系, 由求和法则，不含2个连续0的n位二进制位串数=以0结尾的这种二进制位串数+以1结尾的这种二进制位串数. 我们假定$n \geq 3$, 二进制位串数至少为3位.
    - 1)不含2个连续0并以1结尾的n位二进制位串, 就是在不含2个连续0的n-1位二进制位串的尾部加上一个1. 因此存在a_{n-1}个这样的位串.
    - 2)不含2个连续0并以0结尾的n位二进制位串在它的n-1位必须是1,否则就不满足要求(不含2个连续0). 精确地说，它就是在不含2个连续0的n-2为二进制位串的尾部加上10. 因此存在a_{n-2}个这样的位串. 如下所示:

位串计数

- 解(续):



  - 可以断言对于$n \geq 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.
  - 其中初始条件a_1 =2, 因为1位的二进制位串是0或者1. a_2 =3, 因为2位的二进制位串中满足条件的有01,10,11.
  - 使用递推关系可以得到$a_5 = a_4 + a_3 = (a_3+a_2) + a_3 = 2 \times (a_2 + a_1) + a_2 = 13$

编码字的枚举

- 例:一个十进制串作为一个编码字．如果它包含偶数个0，则它有效. 比如1200是有效的, 120则不是有效的. 设a_n是有效的n位编码字的个数. 找出一个关于a_n的递推关系.
- 解:从少一位构成n位有效编码字有两种方式，
  - 一个n-1位的有效编码字后面加一个非0的数字．后面的非0数字共有9种(1-9)，所以$a_{n-1}*9$;
  - 一个n-1位的无效编码字后面加上一个0．有10^{n-1}个n-1位编码字，这其中a_{n-1}个有效编码字，所以10^{n-1}-a_{n-1}种.
  - 综上，$a_n = a_{n-1} * 9 + 10^{n-1} - a_{n-1} = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$，$a_1$=9，因为串0是无效的，数字1-9都是有效的.

卡塔兰数

- 例:求关于C_n的递推关系，它是通过对$n+1$个数$x_0 . x_1 . x_2 \dots\dots x_n$的乘积中加括号来规定乘法的次序的方式数．例如$C_3 = 5$，因为有以下五种方式

$((x_0 . x_1) . x_2) . x_3$　　$(x_0 . (x_1 . x_2)) . x_3$　　$(x_0 . x_1) . (x_2 . x_3)$

$x_0 . ((x_1 . x_2) . x_3)$　　$x_0 . (x_1 . (x_2 . x_3))$

- 解:
  - 无论从哪个位置加入括号，总有一个“.”运算符在括号的外面．该运算符出现在$n+1$个数的两个数之间，例如x_k和x_{k+1}之间．那么在$x_0 . x_1 . x_2 \dots\dots x_k$的乘积中有$C_k$种方式确定它们乘积中的括号不同而出现的不同乘法次序．另外在$x_{k+1} . x_{k+2} . x_{k+3} \dots\dots x_n$的乘积中有$C_{n-k-1}$种方式确定它们乘积中的括号不同而出现的不同乘法次序.

卡塔兰数

- 解(续):
  - 由于k值可能是0到n-1的任何一个值, 所以

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

  - 其中初始条件$C_0 = 1$, $C_1 = 1$.
  - 备注: 序列$\{C_n\}$是**卡塔兰数**的序列. 这个序列还是除了该例之外的许多不同计数问题的解.