第2.5节 排列和组合的推广

Section 2.5: Generalized Permutations and Combinations

知识要点

1. 有重复的排列
2. 有重复的组合
3. 具有不可区别物体的集合的排列
4. 把物体放入盒子

排列与组合

- 选取问题:设n 元集合S，从S 中选取 r 个元素. 根据是否有序, 是否允许重复, 将该问题分为四个子类型:

	不重复选取	重复选取
有序选取	集合的排列	有重复的排列 (多重集的排列)
无序选取	集合的组合	有重复的组合 (多重集的组合)

  - 其中不重复选取在上一节已讲, 因此本小节学习重复选取的问题

有重复的排列

- 定理:具有n个对象的集合**允许重复的r排列数**n^r.
- 有重复的排列, 或称多重集的排列
- 证:当允许重复时，在r排列中对r个位置的每个位置都有n种方式来选择集合的元素．因为对每个选择都有n个物体是有效的，根据乘积法则, 当允许重复时存在$n * n * \ldots * n = n^r$个r排列.

有重复的排列

- 例:用英文大写字母可以构成多少个长度为r的字符串?
- 解:因为有26个英文大写字母, 而长度为r的字符串中的每一位都选择一个字母，且每一个字母都可以被重复地选择，所以存在26^r个长度为r的字符串满足要求.

有重复的组合

- 那么接下来**有重复的组合问题**, 又称多重集的组合问题:
- 从n个元素的集合中，允许重复地选择r个元素时，这种情况下r组合有多少种方式呢?

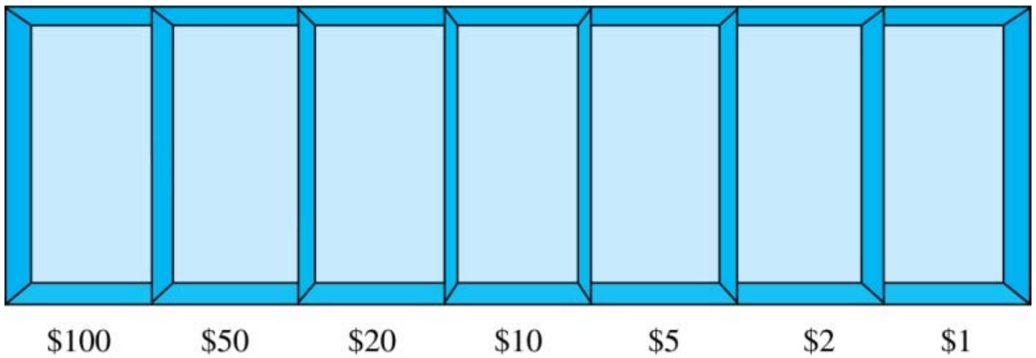
有重复的组合

- 例:花店现有白玫瑰和红玫瑰若干，现在你要买2支花，选择花的顺序无关, 只关心类型, 且可以重复的购买某类型的花, 请问共有多少种选法?
- 解:枚举列出所有的情况
  - 方法一: 
  - 方法二: 
  - 方法三: 

综上，从2个元素的集合{白玫瑰,红玫瑰}中允许重复的2组合数为3

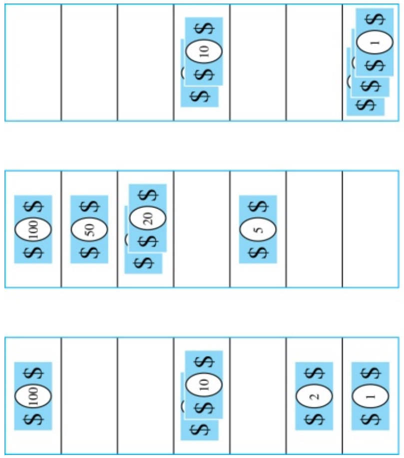
有重复的组合

- 例:从有$1, $2, $5， $10, $20, $50, $100的钱袋中选出5张纸币, 有多少种方式？假定不管纸币被选的次序, 同样的币值的纸币也不加区分, 并且钱袋中每种纸币至少5张.
- 解(**隔板法**):纸币如下排列放在7个隔间中，该题相当于我们从其中可以重复的选择5个元素, 如下所示:



有重复的组合

比如下图给出了3种不同选5张纸币的实例，其中竖线表示隔板，每个星号表示一张纸币：



$| \; | \; | \; * * \; | \; | \; | \; * * *$

$* \; | \; * \; | \; * * \; | \; | \; * \; | \; |$

$* \; | \; | \; | \; * * \; | \; | \; * \; | \; *$

所以，在总共11个位置上安排6条竖线和5颗星．也就是从11个位置上选择5颗星的位置，对应了从11个元素的集合中无序地选择5个元素的方法数，所以有$C(11,5)=\frac{11!}{5!6!}=462$种方式.

有重复的组合

- 定理:n个元素的集合**允许重复的r组合**数有$C(n+r-1,r)=C(n+r-1,n-1)$.
- 证:允许重复时n元素集合的r组合可以用$n-1$条竖线和r颗星的列表来表示. 这$n-1$条竖线用来标记n个不同的单元. 当集合的第i个元素出现在组合中时，第i个单元就包含1颗星. 包含$n-1$条竖线和r颗星的每一个不同的表对应了n元素集合的允许重复的一个r组合，即$C(n+r-1,r)$，因为每个表对应了从包含r颗星和$n-1$条竖线的$n-1+r$个位置取r个位置来放r颗星的一种选择. 同时还等于$C(n+r-1,n-1)$, 因为每个表对应于取$n-1$个位置来放$n-1$条竖线.
- 思考: $C(n,r)=C(n,n-r)$ 中用$n+r-1$替代n

有重复的组合

- 例:方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$有多少个解？其中x_1，x_2，x_3都是非负整数.
- 解:一个解对应从3元素集合中选11个元素的方式，以使得x_1选第一类，x_2选第二类，x_3选第三类. 因此解的个数等于3元素的集合允许重复的11组合数, 所以

$$C(3+11-1,11)=C(13,11)=C(13,2)=\frac{13\times 12}{2\times 1}=78$$

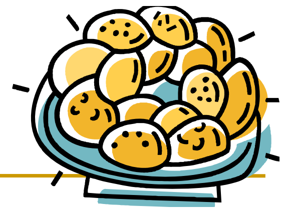
有重复的组合

- 例(扩展):方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$有多少个解？其中x_1，x_2，x_3都是非负整数. $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1.$
- 解:类似地, 满足此限制的方程的解对应于从11项中的选择, 其中第一类元素至少取1个, 第二类元素至少取1个, 第三类元素至少取1个.

  因此，先选择1个第一类元素，然后选择1个第二类元素，再选择1个第三类元素. 完成以上选择以后, 我们再多选8个元素. 因此,

$$C(3 + 8 - 1, 8) = 45$$

有重复的组合



- 例:一家甜品店有4种不同类型的甜品，从中选6块甜品有多少种不同的方式？假定只关心甜品的类型，不管是哪一块甜品，也不关心选择的次序.
- 解:具有4元素集合的可重复6组合数．根据定理，这等于$C(4+6-1,6)=C(9,6)=C(9,3)=\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}=84.$

有重复的排列与组合

允许和不允许重复的排列和组合的归纳如下表所示:

类型	是否允许重复	公式
r排列	否	$P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
r组合	否	$C(n,r)=\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r排列	是	n^r
r组合	是	$C(n+r-1,r)$

具有不可区别物体的集合的排列

- 在前面的计数问题中物体都是可区别的物体. 但在某些计数问题时某些元素时没有区别的, 这时需要小心避免重复计数.

- 例:分别以123这三个元素可以构成多少种不同的3排列? 那么以133这三个元素呢?
- 解:(枚举法)以123这三个元素构成3排列时:$P(3,3)=6$, 具体为123, 132, 213, 231, 312, 321.

  以133这三个元素构成3排列时, 因为包含两个3, 所有总共包含133,313,331这三种情况.
- 备注:通过枚举来罗列出所有的情况.

具有不可区别物体的集合的排列

- 例:重新排列单词SUCCESS中的字母能构成多少个不同的串?
- 解:包含3个S,2个C,1个U,1个E.
  - 首先, 3个S可以放在7个位置中, 产生C(7,3)种方式. 剩下4个位置
  - 然后, 2个C放在剩余的4个位置中, 产生 C(4,2)种方式. 剩下2个位置.
  - 然后, 1个U放在剩余的2个位置中, 产生 C(2,1)种方式. 剩下1个位置.
  - 最后, 1个E放在剩余的1个位置中, 也就是产生C(1,1) 种方式.
  - 因此, 由乘积法则, 可得:

$$C(7,3)*C(4,2)*C(2,1)*C(1,1)=\frac{7!}{3!\,4!}*\frac{4!}{2!\,2!}*\frac{2!}{1!\,1!}*\frac{1!}{1!\,0!}=\frac{7!}{3!*2!*1!*1!}$$
$$=420$$

- 思考:包含1个E,1个U, 2个C, 3个S,则

$$C(7,1)*C(6,1)*C(5,2)*C(3,3)=420$$

具有不可区别物体的集合的排列

- 定理:设类型1的相同的物体有n_1个，类型2的相同的物体有n_2个,……,类型k的相同的物体有n_k个. 那么这n个物体的不同排列数为

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$$

- 证:
  - 首先，在n个位置放类型为1的n_1个物体，产生$C(n,\ n_1)$种方式. 剩下n-n_1个位置.
  - 然后，在剩下的n-n_1个位置放类型为2的n_2个物体，产生$C(n-n_1, n_2)$种方式. 剩下n-n_1-n_2个位置.
  - 以此类推循环, 直到$C(n\text{-}n_1\text{-}n_2\text{-}\cdots\text{-}n_k,\ n_k)$ 种方法来放类型为k的n_k个物体. 由乘积法则, 可得:

$$\frac{n!}{n_1! * (n-n_1)!} * \frac{(n-n_1)!}{n_2! * (n-n_1-n_2)!} * \cdots * \frac{(n-n_1-\cdots n_{k-1})!}{n_k! * 0!} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$$

把物体放入盒子

- 有许多计数问题可以通过把物体放入盒子来解决，这些物体放入盒子的次序无关紧要. 这时需要注意区分物体和盒子它们分别是不是可辨别的:
  - 物体也许是可辨别的(有标号), 也许是不可辨别的(没有标号)
  - 盒子也许是可辨别的(有标号), 也许是不可辨别的(没有标号)

- 因此物体放入盒子分为四种情况:
  - 1、可辨别的物体与可辨别的盒子
  - 2、不可辨别的物体与可辨别的盒子
  - 3、可辨别的物体与不可辨别的盒子
  - 4、不可辨别的物体与不可辨别的盒子

把物体放入盒子

- 1、**可辨别的物体与可辨别的盒子**：把n个不同的物体分配到k个不同的盒子，使得n_i个物体放入盒子i的方式数为$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
- 证明略

把物体放入盒子

- 例:52张标准牌发给4个人使得每个人有5张牌的方式有多少种?
- 解:首先，第一个人得到5张牌，那么有$C(52,5)$. 然后第二个人得到剩余52-5张牌中的5张牌，那么有$C(47,5)$种方式，接着第三个人有$C(42,5)$种方式，最后第四个人有$C(32,5)$种方式. 因此总方式数为$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(32,5)$.
- 思考:也相当于将这些牌分为5个不同的类，其中4类中每一类都有5个物体，第五类相当于有32个物体, 因此52!/(5!5!5!5!32!).

把物体放入盒子

- 2、**不可辨别的物体与可辨别的盒子**：将r个不可辨别的物体放入n个可辨别的盒子, 产生$C(n+r-1, n-1)$种方式

- 例:将10个不可辨别的球放入8个有编号的桶里, 有多少种方法?
- 解:该题相当于在允许重复计数的情况下, 从具有8个元素的集合中取出10组合的方法的个数，因此有 $C(8+10-1, 10) = C(17,10) =$ 19,448种方法.

把物体放入盒子

- 3、**可辨别的物体与不可辨别的盒子**：没有简单的闭公式来计算把n个可辨别的物体放入j个不可辨别的盒子，可以通过枚举来求解该问题.
- 备注:有一个求和计算公式. $S(n,j)$(第二类斯特林数)表示将n个可辨别物体放入j个不可辨别的盒子的方式数, 其中不允许有空的盒子. 那么，将n个可辨别物体放入j个不可辨别的盒子(其中非空的盒子数等于k, $k-1$, …, 2, 1)的总方式数为:

$$\sum_{i=1}^{k} S(n,j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$

把物体放入盒子

- 例:将4个不同的员工安排到3间不可辨别的办公室, 共有多少种方式?
- 解:(枚举法)共14种方式. 假设员工为a,b,c,d.
  - 可以把四位员工分配到同一间办公室(共一种方法):{{a,b,c,d}};
  - 可以将三位员工分配到同一间办公室，剩下一位分配到另一间办公室(共4种方法):{{a,b,c},d}, {{a,b,d},c}, {{a,c,d},b}, {{b,c,d},a};
  - 可以将两位员工分配到同一间办公室，剩下的两位分配到另外一间办公室(共3种方法):{{a,b},{c,d,}}, {{a,c},{b,d}}, {{a,d},{b,c}};
  - 可以将两位员工分配到同一间办公室，剩下的两位各安排一间办公室(共6种方法):{{a,b},{c},{d}}, {{a,c},{b},{d}}, {{a,d},{b},{c}}, {{b,c},{a},{d}}, {{b,d},{a},{c}}, {{c,d},{a},{b}};
  - 综上, 共计14种不同的分配方式.

把物体放入盒子

- 例:把$2n$个人分成n组, 每组2人, 有多少分法?
- 解:
  - $2n$个人, 人肯定是不重复的, 分成n组, 这里的分组是没有区别的. 相当于$2n$不同的球放到n个相同的盒子, 每个盒子2个.
  - 考虑**组有区别**, **组没有区别**两种情况: 分组有区别的话, 分成n组, 先选2人放第1组, 再选2人放第2组, ...这种方案是可以计算出来的; 分组没有区别的话, 然后对n个分组进行全排列(有$n!$种排列方法), 就得到了分组有区别的方案个数. 因此:

$$\textbf{分组没有区别方案数} \times \boldsymbol{n!} = \textbf{分组有区别方案数}$$

  - 首先, 先考虑分组有区别(按照分步处理的方案)$=c(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)$
  - 然后, 考虑分组没有区别方案数=分组有区别方案数/$n!$
  - 综上所述, 将$2n$个人分为n组, 使得每组2人的方法数$N=\frac{1}{n!}c(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)=\frac{1}{n!}\frac{2n!}{(2n-2)!2!}\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!2!}\ldots\frac{2!}{0!2!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

把物体放入盒子

- 例: 将4本不同的书分为2堆, 每堆2本,有多少分法?
- 解: 方法数$N = \frac{C(4,2)C(2,2)}{2!} = 3$
- 解2(枚举法): 不同的方法数罗列如下，共包括以下6种，其中后面3种和前面3种是重复的, 因此方法数为3
  - 1,2　　3,4
  - 1,3　　2,4
  - 1,4　　2,3
  - 3,4　　1,2
  - 2,4　　1,3
  - 2,3　　1,4

把物体放入盒子

- 4、**不可辨别的物体与不可辨别的盒子**：将n个不可辨别的物体放入k个不可辨别的盒子的方式数可以通过枚举所有的方式．没有简单的闭公式来计算这种情况.

- 例:将同一本书的6个副本放入4个相同的盒子有多少种方式，其中每个盒子最多能容纳6本书.
- 解:(枚举法)共有9种方式．按照具有最多副本数的盒子的次数依次列出每个盒子的副本数, 即列出的次序是递减的, 分别有:
  - 6(表示第一个盒子有6个副本, 第二个盒子没有副本, 第三个盒子没有副本, 第四个盒子没有副本)
  - 5,1
  - 4,2

把物体放入盒子

- 解(续):
  - 4,1,1
  - 3,3
  - 3,2,1
  - 3,1,1,1
  - 2,2,2
  - 2,2,1,1
  - 综上, 共计9种方式来完成任务.

把物体放入盒子

- 以上四类归纳总结：

	盒子	物体	公式	备注
1	可辨别	可辨别	$\frac{n!}{n1!\,n2!\cdots nk!}$	有闭公式
2	可辨别	不可辨别	$C(n+r-1,n-1)$	有闭公式
3	不可辨别	可辨别	$\sum_{j=1}^{k} S(n,j)$	无闭公式
4	不可辨别	不可辨别	$p_k(n)$	无闭公式