信号与系统第一周第一次作业答案

1-1.1

解:

连续信号指的是时间上连续的信号。离散信号是时间变量离散取值的信号。根据以上定义可知:(a)、(b)、(d)和(e)为连续信号,(c)和(f)为离散信号。

1-1.2

解:

(1) $f(-at)$左移t_0得到$f[-a(t+t_0)]$, $f[-a(t+t_0)]=f(-at_0-at)\neq f(t_0-at)$,因此不正确。

(2) $f(at)$ 右 移 t_0 得 到 $f[a(t-t_0)]$, $f[a(t-t_0)]=f(-at_0+at)\neq f(t_0-at)$,因此不正确。

(3) $f(at)$ 左 移 $\frac{t_0}{a}$ 得 到 $f\left[a\left(t+\frac{t_0}{a}\right)\right]$, $f\left[a\left(t+\frac{t_0}{a}\right)\right]=f(t_0+at)\neq f(t_0-at)$,因此不正确。

(4) $f(-at)$右移$\frac{t_0}{a}$得到 $f\left[-a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]$, $f\left[-a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right]=f(t_0-at)$,因此正确。

信号与系统第一周第二次作业答案

1-2.1

解:

(1)$[u(t)-u(t-T)]\sin(\frac{4\pi}{T}t)$

$\sin(\frac{4\pi}{T}t)$是以$\frac{T}{2}$为周期的信号，其波形如图 a 所示:

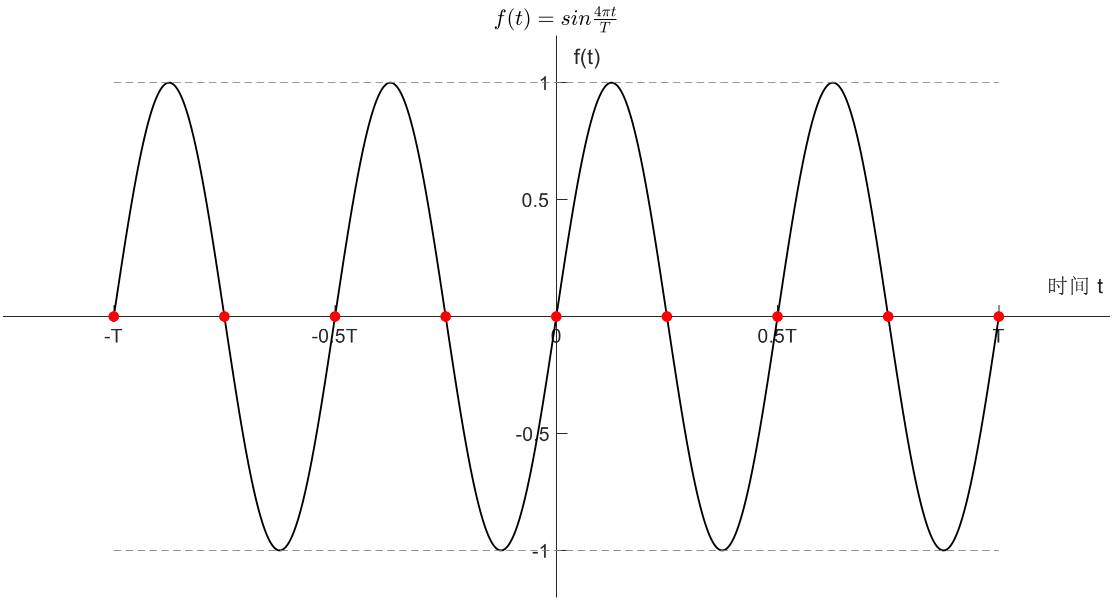


图 a

$[u(t)-u(t-T)]$是以$t=0$为起点，$t=T$为终点的门函数，其波形如图 b 所示:

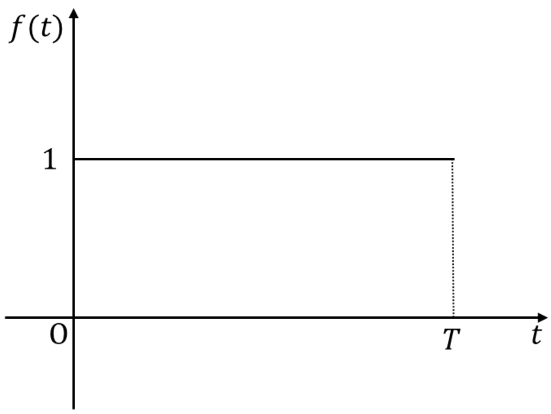


图 b

故二者相乘结果的波形如图 c 所示。

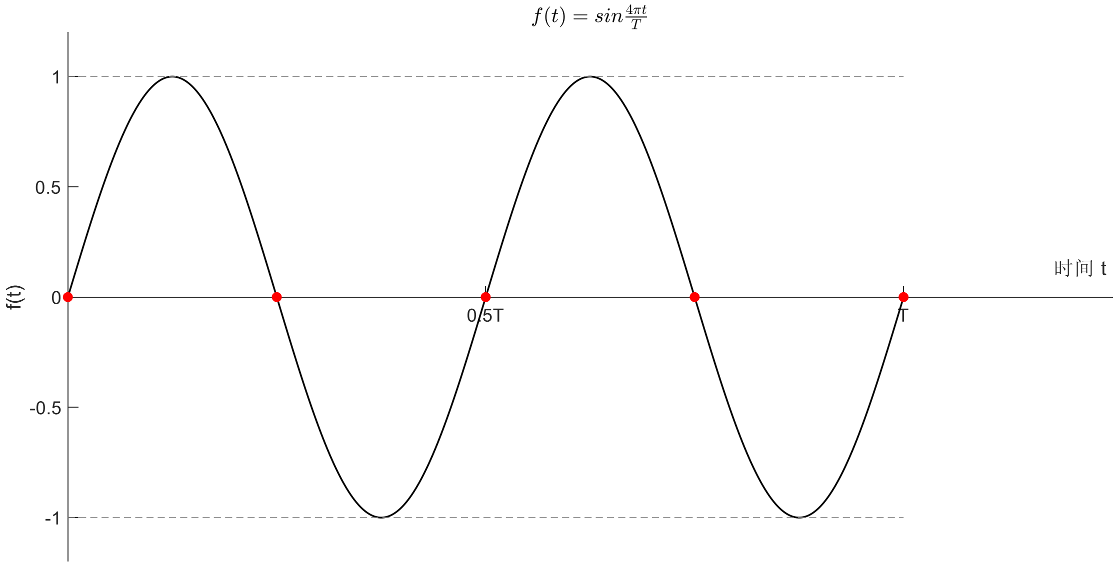


图 c

(2) $[u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)]\sin(\frac{4\pi}{T}t)$

$\sin(\frac{4\pi}{T}t)$是以$\frac{T}{2}$为周期的信号，其波形如题(1)图 a 所示。

$[u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)]$的波形如图 d 所示。

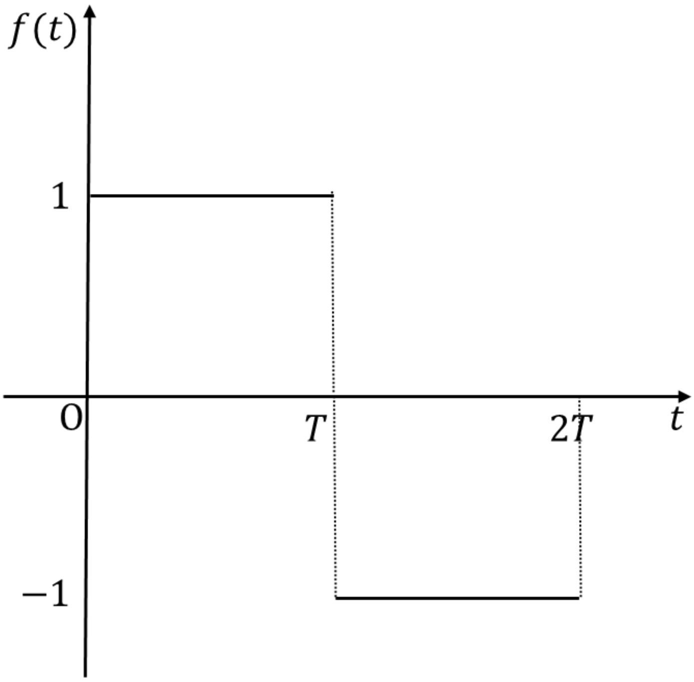


图 d

$[u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)]$与$\sin(\frac{4\pi}{T}t)$相乘结果的最终波形如图 e 所示。

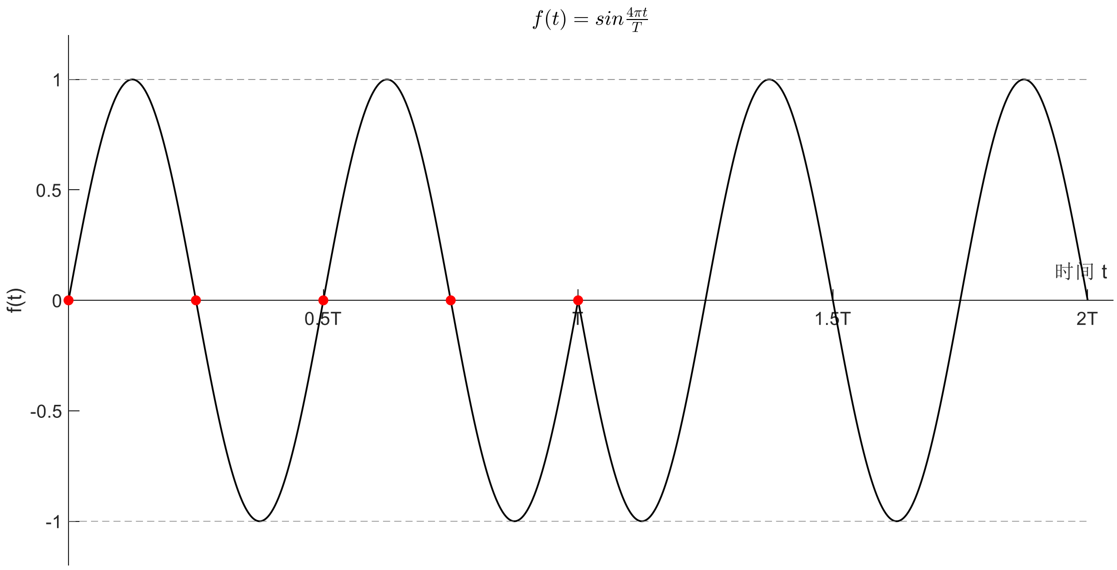


图 e

1-2.2

解:

因为:

$$e_2(t)=\frac{de_1(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e_1(t+\Delta t)-e_1(t)}{\Delta t}$$

即$e_2(t)$等价为: $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e_1(t+\Delta t)-e_1(t)}{\Delta t}$。由于该系统为 LTI 系统，满足线性性（齐次性与叠加性）与时不变性，所以:

$e_1(t)\xrightarrow{LTI}r_1(t)$，$\frac{e_1(t)}{\Delta t}\xrightarrow{LTI}\frac{r_1(t)}{\Delta t}$（齐次性），$\frac{e_1(t+\Delta t)}{\Delta t}\xrightarrow{LTI}\frac{r_1(t+\Delta t)}{\Delta t}$（时不变性），$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e_1(t+\Delta t)-e_1(t)}{\Delta t}\xrightarrow{LTI}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r_1(t+\Delta t)-r_1(t)}{\Delta t}$（叠加性）。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r_1(t+\Delta t)-r_1(t)}{\Delta t}=r_1{}'(t)=\frac{d[e^{-at}u(t)]}{dt}$$

$$=-ae^{-at}u(t)+\delta(t)e^{-at}=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$$

而$e_2(t)\xrightarrow{LTI}r_2(t)$，$e_2(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e_1(t+\Delta t)-e_1(t)}{\Delta t}$，故$e_2(t)$进入系统的响应

与 $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_1(t+\Delta t)-e_1(t)}{\Delta t}$ 进入系统的响应等价，因此 $r_2(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1(t+\Delta t)-r_1(t)}{\Delta t} = \delta(t) - ae^{-at}u(t)$

信号与系统第 2 周第一次作业答案

2-1.1

解：

设汽车底盘质量为m，取竖直向上为正方向。缓冲装置的总作用力由两部分组成 ：

1. 弹簧力F_k：与弹簧形变量成正比，方向相反。

$$F_k = -k \times \Delta x = -k \times [y(t) - x(t)] \tag{1}$$

2. 减振器阻尼力F_f：与阻尼器形变速度成正比，方向相反。

$$F_f = -f \times \Delta v = -f \times \left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right] \tag{2}$$

由牛顿第二定律可得：

$$ma = m\frac{dy'(t)}{dt} = -k \times [y(t) - x(t)] - f \times \left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}\right] \tag{3}$$

整理得：

$$m\frac{dy'(t)}{dt} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = kx(t) + f\frac{dx(t)}{dt}$$

2-1.2

解：

(a)

设回路电流分别为$i_1(t)$与$i_2(t)$，如下图所示，流入 L 的电流$i(t)$。

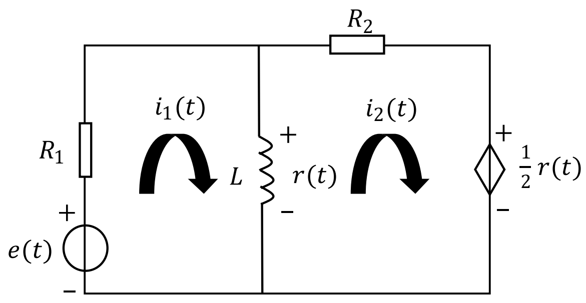


图 1

KVL 方程：

$$i_1(t)R_1 + r(t) = e(t) \tag{1}$$

$$i_2(t)R_2 + \frac{1}{2}r(t) = r(t) \tag{2}$$

KCL 方程：

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) \tag{3}$$

L的 VCR 方程：

$$r(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

联立(1)(2)(3)(4)并代入$R_1 = 20\Omega$，$R_2 = 10\Omega$，$L = 2\text{H}$，得：

$$\frac{dr(t)}{dt} + 5r(t) = \frac{1}{2}\frac{de(t)}{dt} \tag{5}$$

求齐次解，令$\frac{dr(t)}{dt} + 5r(t) = 0$，解得$r_{齐}(t) = Ae^{-5t}u(t)$。再将$e(t) = \delta(t)$代入(3)得：

$$\frac{dh(t)}{dt} + 5h(t) = \frac{1}{2}\frac{d\delta(t)}{dt} \tag{6}$$

由冲激函数匹配法可知，$\frac{dh(t)}{dt}$含有$\frac{1}{2}\frac{d\delta(t)}{dt}$，故$h(t)$含有$\frac{1}{2}\delta(t)$，这也说明激励还带来了特解$\frac{1}{2}\delta(t)$，为了抵消$5h(t)$带来的$\frac{5}{2}\delta(t)$，$\frac{dh(t)}{dt}$必须含有$-\frac{5}{2}\delta(t)$，故$h(t)$含有$-\frac{5}{2}u(t)$，即从$0^-$到$0^+$时刻值存在$-\frac{5}{2}$

的跳变，因为$h(0^-)=0$，所以$h(0^+)=-\frac{5}{2}$。因此最终的$h(t)$为：

$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+Ae^{-5t}u(t) \tag{7}$$

代入$h(0^+)=-\frac{5}{2}$，得$A=-\frac{5}{2}$，故该系统单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{5}{2}e^{-5t}u(t)$$

(b)

设图中回路电流为$i_2(t)$。

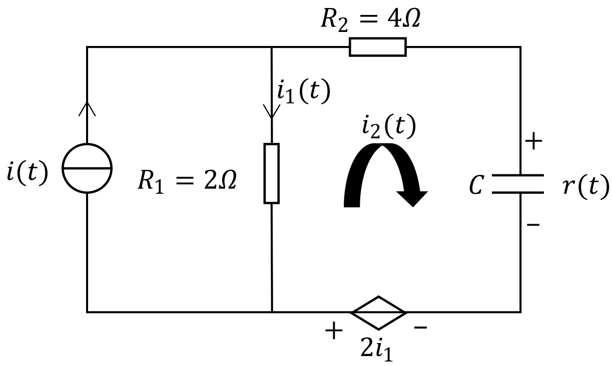


图 2

KVL 方程：

$$i_2(t)R_2+r(t)-i_1(t)R_1-2i_1(t)=0 \tag{1}$$

KCL 方程：

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t) \tag{2}$$

C 的 VCR 方程：

$$i_2(t)=C\frac{dr(t)}{dt} \tag{3}$$

将$R_1=2\Omega$，$R_2=4\Omega$，$C=1F$，带入上述方程，得：

$$\frac{dr(t)}{dt}+\frac{1}{8}r(t)=\frac{1}{2}i(t) \tag{4}$$

解该方程齐次解，可得$r_{齐}(t)=Ae^{-\frac{1}{8}t}u(t)$。再将$i(t)=\delta(t)$代入(4)得：

$$\frac{dh(t)}{dt}+\frac{1}{8}h(t)=\frac{1}{2}\delta(t) \tag{6}$$

由冲激函数匹配法可知，$h(t)$中含有$\frac{1}{2}u(t)$，即从0^-到0^+时刻值存在$\frac{1}{2}$的跳变，因为$h(0^-)=0$，故$h(0^+)=\frac{1}{2}$。代入$h(0^+)=\frac{1}{2}$，得$A=\frac{1}{2}$，故该系统单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}t}u(t)$$

信号与系统第 2 周第二次作业答案

2-2.1

解：

当电路中同时存在电压源和电流源时，电容C上的响应是由两个源同时引起的，我们可以分开讨论。

(a) 当仅有电压源作用时，电流源作断路处理。

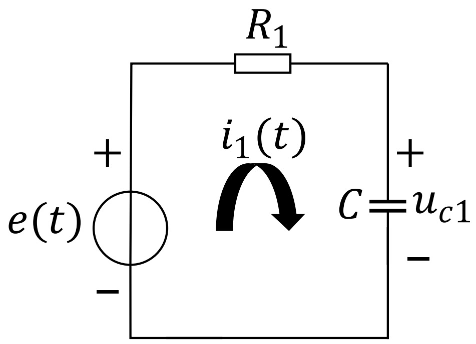


图 1

设此时电路的电流为$i_1(t)$，电容电压为$u_{c1}(t)$。

KVL 方程：

$$e(t) = u_{c1}(t) + i_1(t)R_1 \tag{1}$$

C的 VCR 方程：

$$i_1(t) = C\frac{du_{c1}(t)}{dt} \tag{2}$$

联立(1)(2)可得：

$$\frac{du_{c1}(t)}{dt} + u_{c1}(t) = e(t) \tag{3}$$

解该方程齐次解，可得$u_{c1齐}(t) = Ae^{-t}u(t)$。将$e(t) = \delta(t)$代入(3)得：

$$\frac{dh_1(t)}{dt}+h_1(t)=\delta(t) \tag{4}$$

由冲激函数匹配法可知， $h_1(t)$中含有$u(t)$，即从0^-到0^+时刻值存在1的跳变，因为$h_1(0^-)=0$，故$h_1(0^+)=\ 1$。代入$h(0^+)=\ 1$，得$A=\ 1$，故该系统单位冲激响应为：

$$h_1(t)=e^{-t}u(t)$$

(b) 当仅有电流源作用时，电压源作短路处理。

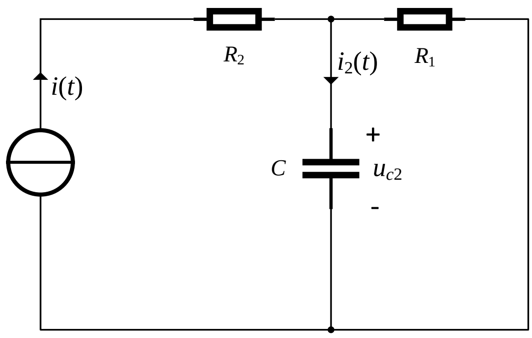


图 2

设此时电容的电流为$i_2(t)$，电压为$u_{c2}(t)$。

KVL 方程：

$$u_{c2}(t)=(i(t)-i_2(t))R_1 \tag{5}$$

C的 VCR 方程：

$$i_2(t)=C\frac{du_{c2}(t)}{dt} \tag{6}$$

联立(5)(6)可得：

$$\frac{du_{c2}(t)}{dt}+u_{c2}(t)=i(t) \tag{7}$$

将$i(t)=u(t)$代入(7)得：

$$\frac{dr_2(t)}{dt}+r_2(t)=u(t) \tag{8}$$

由式(3)及$\frac{du(t)}{dt}=\ \delta(t)$可知：

$$r_2(t)=\int_{-\infty}^{t}h_1(\tau)d\tau\times u(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

最后，由 LTI 系统叠加定理可得：

$$u_{\mathrm{c}}(t)=h_1(t)+r_2(t)=u(t)$$

2-2.2

解：

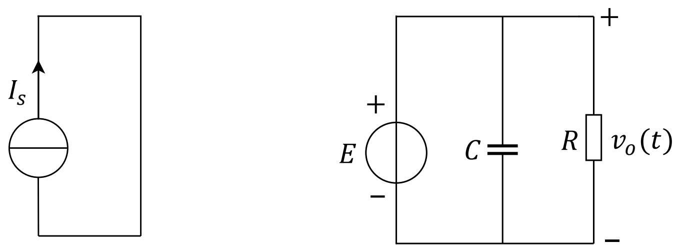


图 3

图 3 为开关S_1与S_2都处于“1”时电路状态。因为在$t=0$前系统已处于稳态，所以$v_{\mathrm{o}}(0^-)=E$。

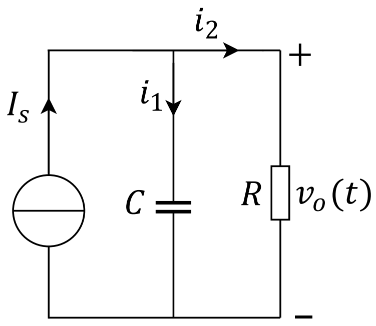


图 4

当$t>0$时，电路如图 4 所示，由 KCL 得：

$$I_{\mathrm{s}}(t)=i_1(t)+i_2(t)=C\frac{dv_{\mathrm{o}}(t)}{dt}+\frac{v_{\mathrm{o}}(t)}{R} \tag{1}$$

因为电容电压不可突变，所以$v_{\mathrm{o}}(0^+)=v_{\mathrm{o}}(0^-)=E$。

1) 齐次解：

$$C\frac{dv_{\text{o}}(t)}{dt}+\frac{v_{\text{o}}(t)}{R}=0 \tag{2}$$

令特征方程$\lambda+\frac{1}{RC}=0$，得$\lambda=-\frac{1}{RC}$，得齐次解为：

$$v_{\text{o齐}}(t)=Ae^{-\frac{1}{RC}t}u(t) \tag{3}$$

2) 特解：

设解为D，代入(1)得$D=RI_{\text{s}}$

当$t\geq 0$时，

$$v_{\text{o}}(t)=\left(Ae^{-\frac{1}{RC}t}+RI_{\text{s}}\right)u(t) \tag{4}$$

代入$v_{\text{o}}(0^{+})=E$，得$A=E-RI_{\text{s}}$，所以：

$$v_{\text{o}}(t)=\left[(E-RI_{\text{s}})e^{-\frac{1}{RC}t}+RI_{\text{s}}\right]u(t) \tag{5}$$

其中，自由响应为$(E-RI_s)e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$，强迫响应为$RI_su(t)$

3) 零输入响应$v_{\text{ozi}}(t)$：

零输入响应激励为 0，与齐次方程(2)有相同模式，故可设$v_{\text{ozi}}(t)=Be^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$，代入$v_0(0^{+})=E$，得：

$$v_{\text{ozi}}(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}u(t) \tag{6}$$

4) 零状态响应$v_{\text{ozs}}(t)$：

$$v_{\text{ozs}}(t)=v_{\text{o}}(t)-v_{\text{ozi}}(t)=\left(RI_{\text{s}}-RI_{\text{s}}e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)$$

信号与系统第三周第一次作业答案

3-1.1

解法 1：

图中周期信号波形的表达式为：

$$f(t)=E\cos(\omega_1 t)\,,\quad t\in(-\frac{T}{4},\frac{T}{4})$$

其中周期$T=\frac{1}{f}$，基波频率$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$。

该信号可展开为傅里叶级数：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

其中：

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)\mathrm{d}t\\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

又所求$f(t)$在周期内为偶函数，而$f(t)\sin(n\omega_1 t)$在周期内为奇函数，所以$b_n=0$。

傅里叶系数a_0的计算：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}E\cos(\omega_1 t)\,\mathrm{d}t=\frac{E}{\pi}\qquad(1)$$

傅里叶系数a_n的计算：

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos(\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos[(n+1)\omega_1 t]+\cos[(n-1)\omega_1 t]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2E}{T}\left\{\frac{\sin[(n+1)\omega_1 t]}{(n+1)\omega_1}+\frac{\sin[(n-1)\omega_1 t]}{(n-1)\omega_1}\right\}\Bigg|_0^{\frac{T}{4}}$$

将$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$带入上式，得：

$$a_n=\frac{-2E\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{(n^2-1)\pi}，\ n\neq 1 \tag{2}$$

由于a_n的分母中含n^2-1，说明$n\neq 1$。系数a_1需单独计算：

$$a_1=\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}(\cos\omega_1 t)^2\mathrm{d}t=\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\frac{\cos(2\omega_1 t)+1}{2}\mathrm{d}t=\frac{E}{2} \tag{3}$$

整理(2)(3)后得：

$$a_n=\begin{cases}\frac{E}{2}, & n=1\\ \frac{-2E\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{(n^2-1)\pi}， & n\neq 1\end{cases}$$

该信号的傅里叶级数可表示为：

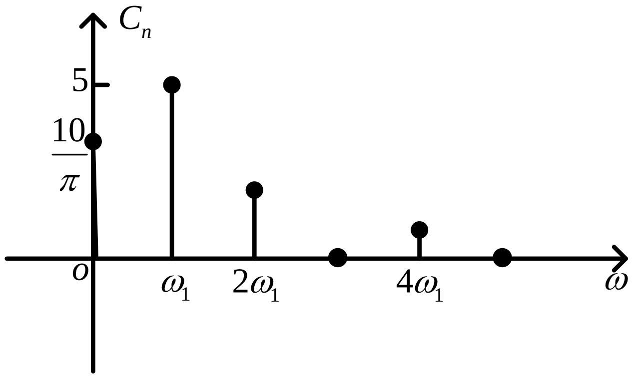
$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

其中：

$$c_n=|a_n|$$

$$\varphi_n=\begin{cases}\pi & n=4k,k\text{为正整数}\\ 0 & n\text{为其它非负整数}\end{cases}$$

将$E=10\ \mathrm{v}$，$f=10\ \mathrm{kHz}$带入，（单边）幅度谱如下所示：



解法 2：

图中周期信号波形的表达式为：

$$f(t)=E\cos(\omega_0 t)\text{，}\ t\in(-\frac{T}{4},\frac{T}{4})$$

其中周期$T=\frac{1}{f}$，基波频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。

傅里叶系数F_n的计算公式如下：

$$F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

由欧拉公式可知:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$$

将上述关系代入傅里叶系数计算公式后可得：

$$F_n=\frac{E}{2T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{2T}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n-1)\omega_0 t}}{-\mathrm{j}(n-1)\omega_0}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n+1)\omega_0 t}}{-\mathrm{j}(n+1)\omega_0}\right]\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$$

将$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$带入上式积分可得：

$$F_n=\frac{-E\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{(n^2-1)\pi}\text{，}\ n\neq\pm 1 \tag{1}$$

由于F_n的分母中含n^2-1，说明$n\neq\pm 1$。系数F_1需单独计算：

$$F_1=\frac{E}{2T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{4} \tag{2}$$

整理(1)(2)后得：

$$F_n=\begin{cases}\dfrac{E}{4}\text{，} & n=\pm 1\\ \dfrac{-E\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{(n^2-1)\pi}\text{，} & n\neq\pm 1\end{cases}$$

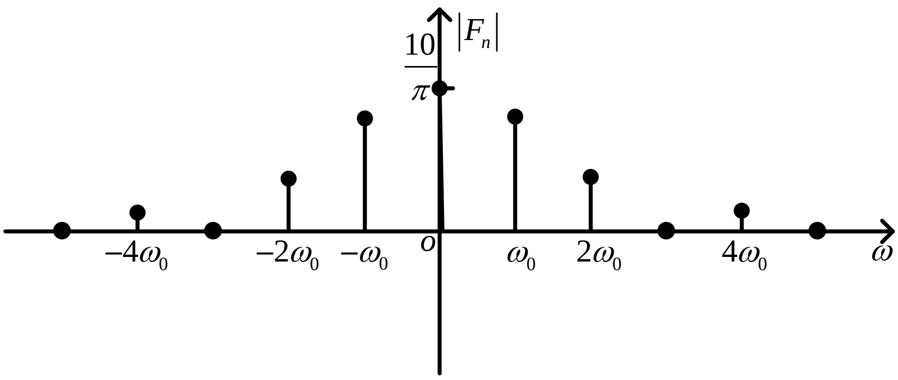
幅度表达式：

$$|F_n| = \begin{cases} \dfrac{E}{4}, & n = \pm 1 \\ \left|\dfrac{E\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{(n^2-1)\pi}\right|, & n \neq \pm 1 \end{cases}$$

相位表达式：

$$\varphi_n = \begin{cases} \pi & n = 4k, k\text{为非零整数} \\ 0 & n\text{为其它整数} \end{cases}$$

将$E = 10\ \mathrm{v}$，$f = 10\ \mathrm{kHz}$带入，其（双边）幅度谱大致为：



3-1.2

解：

图中周期信号波形的表达式为：

$$f(t) = E - \frac{E}{T}t, \quad t \in (0, T)$$

其中周期为T，基波频率$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$。

傅里叶系数F_n的计算公式如下：

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(E - \frac{E}{T}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E}{T}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{-\mathrm{j}n\omega_0} - \frac{(-\mathrm{j}n\omega_0 t - 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}}{T(-\mathrm{j}n\omega_0)^2}\right]\Bigg|_0^T \end{aligned}$$

将$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$带入上式可得：

$$F_n=\frac{-E}{2n\pi}\mathrm{j}，\quad n\neq 0 \tag{1}$$

由于F_n的分母中含n，说明$n\neq 0$。系数F_0需单独计算：

$$F_0=\frac{1}{T}\int_0^T E-\frac{E}{T}t\,\mathrm{d}t=\frac{E}{2} \tag{2}$$

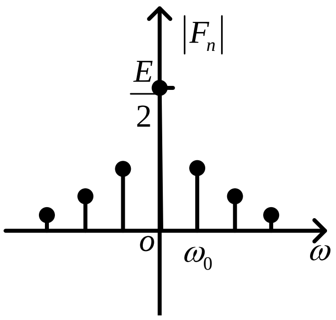
整理(1)(2)后得：

$$F_n=\begin{cases}\dfrac{E}{2}， & n=0\\ \dfrac{-E}{2n\pi}\mathrm{j}， & n\neq 0\end{cases}$$

幅度表达式：

$$|F_n|=\begin{cases}\dfrac{E}{2}， & n=0\\ \dfrac{E}{2|n|\pi}， & n\neq 0\end{cases}$$

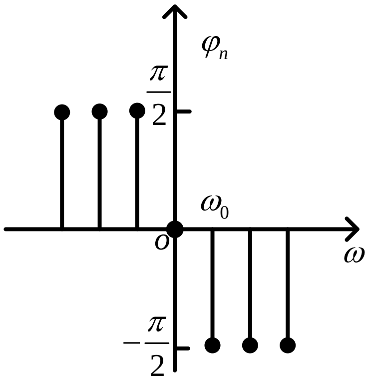
幅度谱大致为：



相位表达式：

$$\varphi_n=\begin{cases}0， & n=0\\ -\dfrac{\pi}{2}， & n>0\\ \dfrac{\pi}{2}， & n<0\end{cases}$$

相位谱大致为：


φ_n
π/2
ω_0
o
ω
−π/2

信号与系统第三周第二次作业答案

3-2.1

解：

a. 图中信号波形的表达式为：

$$f(t)=\frac{2E}{T}t，\ t\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$$

傅里叶变换公式如下：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

欧拉公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$$

将上述关系代入傅里叶变换表达式后可得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t[\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)]\,\mathrm{d}t$$

$$=\ \mathrm{j}\frac{2E}{T}\left[\frac{t(-\cos\omega t)}{\omega}+\frac{\sin\omega t}{\omega^2}\right]\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\frac{2E}{\omega}\left[\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)-Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]，\ \omega\neq 0 \qquad (1)$$

由于$F(\mathrm{j}\omega)$的分母中含ω，说明$\omega\neq 0$。$\omega=0$时的傅里叶变换需单独计算：

$$F(0)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\,\mathrm{d}t=0 \qquad (2)$$

整理(1)(2)后得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}0， & \omega=0\\ \mathrm{j}\dfrac{2E}{\omega}\left[\cos\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)-Sa\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)\right]， & \omega\neq 0\end{cases}$$

b. 图中信号波形的表达式为：

$$f(t)=E-\frac{E}{T}t，\ t\in(0,T)$$

傅里叶变换公式如下：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}\left(E-\frac{E}{T}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=E\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{-\mathrm{j}\omega}-\frac{(-\mathrm{j}\omega t-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{T(-\mathrm{j}\omega)^2}\right]\Bigg|_{0}^{T}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{E}{\omega^2T}\left(1-\mathrm{j}\omega T-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\right),\ \omega\neq 0 \tag{1}$$

由于$F(\mathrm{j}\omega)$的分母中含ω，说明$\omega\neq 0$。$\omega=0$时的傅里叶变换需单独计算：

$$F(0)=\int_0^T\left(E-\frac{E}{T}\right)t\,\mathrm{d}t=\frac{ET}{2} \tag{2}$$

整理(1)(2)后得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{ET}{2}, & \omega=0\\ \dfrac{E}{\omega^2T}\left(1-\mathrm{j}\omega T-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\right), & \omega\neq 0\end{cases}$$

c. 图中信号波形的表达式为：

$$f(t)=E\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right),\ t\in(0,T)$$

傅里叶变换公式：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^T E\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

由欧拉公式可知：

$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right)$$

将上述关系代入傅里叶变换表达式后可得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_0^T\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{2\mathrm{j}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}}{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)t}}{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)}\right]\Bigg|_0^T$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2\pi ET\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}-1\right)}{\omega^2T^2-4\pi^2},\ \omega\neq\pm\frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

由于$F(\mathrm{j}\omega)$的分母中含$\omega^2T^2-4\pi^2$，说明$\omega\neq\pm\frac{2\pi}{T}$。$\omega=\pm\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换需单独计算。

$\omega=\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换：

$$F\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}\right)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_0^T\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{T}t}\right)\mathrm{d}t=\frac{ET}{2\mathrm{j}} \tag{2}$$

$\omega=-\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换：

$$F\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}\right)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_0^T\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{T}t}-1\right)\mathrm{d}t=-\frac{ET}{2\mathrm{j}} \tag{3}$$

整理(1)(2)(3)后得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{ET}{2\mathrm{j}}, & \omega=\dfrac{2\pi}{T}\\ -\dfrac{ET}{2\mathrm{j}}, & \omega=-\dfrac{2\pi}{T}\\ \dfrac{2\pi ET\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}-1\right)}{\omega^2T^2-4\pi^2}, & \omega\neq\pm\dfrac{2\pi}{T}\end{cases}$$

d. 图中信号波形的表达式为：

$$f(t)=E\sin(\frac{2\pi}{T}t)\text{，}\ t\in(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$$

傅里叶变换公式：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}E\sin(\frac{2\pi}{T}t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

由欧拉公式可知：

$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$$

将上述关系代入傅里叶变换表达式后可得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{2\mathrm{j}}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)t}}{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}-\omega\right)}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)t}}{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}+\omega\right)}\right]\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\frac{4\pi ET\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2T^2-4\pi^2},\ \ \omega\neq\pm\frac{2\pi}{T}\qquad(1)$$

由于$F(\mathrm{j}\omega)$的分母中含$\omega^2T^2-4\pi^2$，说明$\omega\neq\pm\frac{2\pi}{T}$。$\omega=\pm\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换需单独计算。

$\omega=\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换：

$$F\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}\right)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{T}t}\right)\mathrm{d}t=\frac{ET}{2\mathrm{j}}\qquad(2)$$

$\omega=-\frac{2\pi}{T}$时的傅里叶变换：

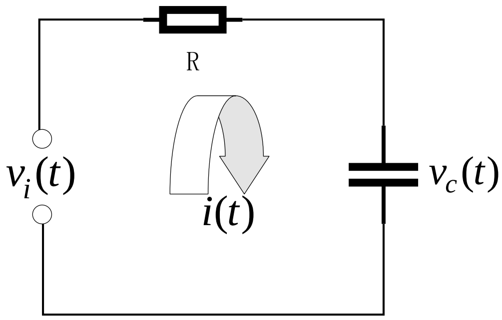
$$F\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}\right)=\frac{E}{2\mathrm{j}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{T}t}-1\right)\mathrm{d}t=-\frac{ET}{2\mathrm{j}}\qquad(3)$$

整理(1)(2)(3)后得：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\dfrac{ET}{2\mathrm{j}}, & \omega=\dfrac{2\pi}{T}\\ -\dfrac{ET}{2\mathrm{j}}, & \omega=-\dfrac{2\pi}{T}\\ \mathrm{j}\dfrac{4\pi ET\sin\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2T^2-4\pi^2}, & \omega\neq\pm\dfrac{2\pi}{T}\end{cases}$$

3-2.2

解：



1）首先求输入的傅里叶级数，再由分压原理求电容端的量。

输入的周期信号表达式为：

$$f(t)=\frac{2E}{T}t，t\in(0,\frac{T}{2})$$

其中周期为T，基波频率$\omega_1=\frac{2\pi}{T}=2000\pi(\mathrm{rad/s})$。

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{d}t=\frac{2E}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\mathrm{d}t=\frac{E}{4}\tag{1}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_1t)\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\cos(n\omega_1t)\,\mathrm{d}t=\frac{E[(-1)^n-1]}{(n\pi)^2}\tag{2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_1t)\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}}t\sin(n\omega_1t)\,\mathrm{d}t=\frac{E(-1)^{n-1}}{n\pi}\tag{3}$$

所以电压$v_i(t)$的直流分量$v_{i0}=a_0=0.25\mathrm{v}$。

基波分量幅度$v_{i1}=\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\approx0.377\mathrm{v}$。

五次谐波幅度$v_{i5}=\sqrt{{a_5}^2+{b_5}^2}\approx0.064\mathrm{v}$。

因为电容的容抗为$\frac{1}{\mathrm{j}\omega c}$，由分压原理可知，电容端分得的电压与输入电压比满足：

$$\rho(\omega)=\frac{v_c}{v_i}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega c}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega c}+R}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega Rc+1}$$

记v_{c0}，v_{c1}和v_{c5}分别为电容对直流分量、基波和五次谐波分量所得得分压，上式中的ω分别为：0，ω_1和$5\omega_1$，代入上式可计算出：

$$v_{c0} = v_{i0} \times \rho(0) = 0.25\text{v}$$
$$v_{c1} = v_{i1} \times \rho(\omega_1) \approx 0.319\text{v}$$
$$v_{c5} = v_{i5} \times \rho(5\omega_1) \approx 0.019\text{v}$$

2）对直流分量，有$\rho(0) = 1$。

对基波分量，有$\rho(\omega_1) \approx 0.847$。

对五次谐波分量，有$\rho(5\omega_1) \approx 0.303$。

可见，上述比值随频率增加而减小，说明该电路可让低频通过，高频衰减。

信号与系统第 4 周作业答案

4.1

解：

(1) $tf(2t)$

由尺度变换性质$f(at)\xrightarrow{F}\frac{1}{|a|}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{a})$，得：

$$f(2t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{2})$$

由频域微分性质$(-\mathrm{j}t)^n f(t)\xrightarrow{F}F_1^{(n)}(\mathrm{j}\omega)$，得：

$$(-\mathrm{j}t)f(2t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{2})}{\mathrm{d}\omega}$$

由线性性质整理得：

$$tf(2t)\xrightarrow{F}\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{\mathrm{d}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{2})}{\mathrm{d}\omega}$$

(2) $(t-2)f(t)$

$$(t-2)f(t)=tf(t)-2f(t)$$

由频域微分和线性性质得：

$$tf(t)\xrightarrow{F}\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

$$2f(t)\xrightarrow{F}2F_1(\mathrm{j}\omega)$$

故：

$$(t-2)f(t)\xrightarrow{F}\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}-2F_1(\mathrm{j}\omega)$$

(3) $t\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

由时域微分性质$f^{(n)}(t)\xrightarrow{F}(\mathrm{j}\omega)^n F_1(\mathrm{j}\omega)$，得：

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{F}(\mathrm{j}\omega)F_1(\mathrm{j}\omega)$$

由频域微分性质得：

$$(-\mathrm{j}t)\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{F}\frac{\mathrm{d}[(\mathrm{j}\omega)F_1(\mathrm{j}\omega)]}{\mathrm{d}\omega}$$

由线性性质整理得：

$$t\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{F}-F_1(\mathrm{j}\omega)-\omega\frac{\mathrm{d}F_1(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

(4)　$f(1-t)$

$$f(1-t)=f[-(t-1)]$$

由尺度变换性质得：

$$f(-t)\xrightarrow{F}F_1(-\mathrm{j}\omega)$$

由时移性质$f(t\pm t_0)\xrightarrow{F}F_1(\mathrm{j}\omega)e^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}$，得：

$$f(1-t)=f[-(t-1)]\xrightarrow{F}F_1(-\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega}$$

(5)　$(1-t)f(1-t)$

$$(1-t)f(1-t)=f(1-t)-tf(1-t)$$

由(4)可知：

$$f(1-t)\xrightarrow{F}F_1(-\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega}$$

由频域微分性质得：

$$(-\mathrm{j}t)f(1-t)\xrightarrow{F}\frac{\mathrm{d}\left[F_1(-\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega}\right]}{\mathrm{d}\omega}$$

由线性性质整理得：

$$(1-t)f(1-t)\xrightarrow{F}-\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}[F_1(-\mathrm{j}\omega)]}{\mathrm{d}\omega}e^{-\mathrm{j}\omega}$$

(6)　$f(2t+5)$

$$f(2t+5)=f\left[2(t+\frac{5}{2})\right]$$

由尺度变换性质得：

$$f(2t)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{2})$$

由时移性质得：

$$f(2t+5)=f\left[2(t+\frac{5}{2})\right]\xrightarrow{F}\frac{1}{2}F_1(\mathrm{j}\frac{\omega}{2})e^{\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}$$

4.2

解：

$f(t)$的傅里叶变换可分解为$f_1(t)$与$f_2(t)$的傅里叶变换之和。

$$f_1(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\tau}{2}\omega)$$

$$f_2(t)=g_1(t)+g_2(t)$$

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=G_1(\mathrm{j}\omega)+G_2(\mathrm{j}\omega)$$

其中：

$$g_1(t)=\begin{cases}\frac{E}{2}\left[1+\sin\frac{\pi(t+\frac{\tau}{2})}{2t_0}\right], & -\frac{\tau}{2}-t_0\le t\le-\frac{\tau}{2}\\ \frac{E}{2}\left[-1+\sin\frac{\pi(t+\frac{\tau}{2})}{2t_0}\right], & -\frac{\tau}{2}\le t\le-\frac{\tau}{2}+t_0\end{cases}$$

$$g_2(t)=\begin{cases}-\frac{E}{2}\left[1+\sin\frac{\pi(t-\frac{\tau}{2})}{2t_0}\right], & \frac{\tau}{2}-t_0\le t\le\frac{\tau}{2}\\ \frac{E}{2}\left[1-\sin\frac{\pi(t-\frac{\tau}{2})}{2t_0}\right], & \frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}+t_0\end{cases}$$

因为$g_1(t)=-g_2(t+\tau)$，所以由时移性质：$G_1(\mathrm{j}\omega)=-G_2(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega\tau}$

$$G_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\tau}{2}-t_0}^{\frac{\tau}{2}+t_0}g_2(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

令$t=x+\frac{\tau}{2}$

$$G_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-t_0}^{t_0}g_2(x+\frac{\tau}{2})e^{-\mathrm{j}\omega x}e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}x$$

此时我们观察到$g_2\left(-x+\frac{\tau}{2}\right)=-g_2\left(x+\frac{\tau}{2}\right)$，$g_2\left(x+\frac{\tau}{2}\right)$是奇函数

$$g_2\left(x+\frac{\tau}{2}\right)=\begin{cases}-\frac{E}{2}\left[1+\sin\left(\frac{\pi x}{2t_0}\right)\right], & -t_0\le x\le 0\\ \frac{E}{2}\left[1-\sin\left(\frac{\pi x}{2t_0}\right)\right], & 0\le x\le t_0\end{cases}$$

故

$$G_2(\mathrm{j}\omega)=e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\int_{-t_0}^{t_0}g_2(x+\frac{\tau}{2})[\cos(\omega x)-\mathrm{j}\sin(\omega x)]\mathrm{d}x$$

$$=-2\mathrm{j}e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\int_0^{t_0}\frac{E}{2}\left[1-\sin\left(\frac{\pi x}{2t_0}\right)\right]\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{j}Ee^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\left[\int_0^{t_0}\sin(\omega x)-\sin\left(\frac{\pi x}{2t_0}\right)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\mathrm{j}Ee^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\left[\frac{1-\cos(\omega x)}{\omega}\Big|_0^{t_0}-\frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2t_0}+\omega\right)x\right]-\cos\left[\left(\frac{\pi}{2t_0}-\omega\right)\mathrm{d}x\right]\right]$$

$$=-\mathrm{j}E\left[\frac{1-\cos(\omega t_0)}{\omega}-\frac{\omega\cos(\omega t_0)}{\left(\frac{\pi}{2t_0}\right)^2-\omega^2}\right]e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$$

代入$t_0=\frac{1}{2}k\tau$

$$G_2(\mathrm{j}\omega)=-\mathrm{j}E\left[\frac{1-\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\omega}-\frac{\omega\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2-\omega^2}\right]e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$$

所以

$$G_1(\mathrm{j}\omega) = -G_2(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega\tau} = \mathrm{j}E\left[\frac{1-\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\omega} - \frac{\omega\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2}\right]e^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$$

所以

$$F_2(\mathrm{j}\omega) = G_1(\mathrm{j}\omega) + G_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$= -\mathrm{j}E\left[\frac{1-\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\omega} - \frac{\omega\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2}\right]\left(-e^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$= -\mathrm{j}E\left[\frac{1-\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\omega} - \frac{\omega\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2}\right]\left[-\mathrm{j}\omega\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]$$

所以

$$F(\mathrm{j}\omega) = F_1(\mathrm{j}\omega) + F_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$= \tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left[E - \omega E\left[\frac{1-\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\omega} - \frac{\omega\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2}\right]\right]$$

$$= E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right) + \frac{\omega^2\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{k\tau}\right)^2 - \omega^2}\right]$$

$$= E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left[\frac{\cos\left(\frac{k\omega\tau}{2}\right)}{1-\left(\frac{k\omega\tau}{\pi}\right)^2}\right]$$

频谱图如下所示：

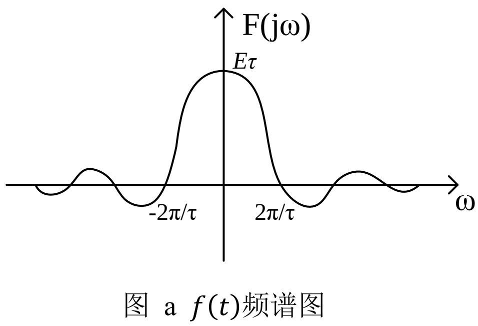


图 a $f(t)$频谱图

观察表达式

$$f(t)=\begin{cases} E & \left(|t|<\frac{\tau}{2}-t_0\right) \\ \frac{E}{2}\left[1-\sin\frac{\pi(|t|-\frac{\tau}{2})}{k\tau}\right] & \left(\frac{\tau}{2}-t_0\leq|t|\leq\frac{\tau}{2}+t_0\right)\end{cases}$$

当$k=0$时，$t_0=0$，$f(t)$是矩形脉冲信号：

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\tau}{2}\omega)$$

当$k=1$时，$\tau=2t_0$，$\frac{\tau}{2}-t_0=0$，$f(t)$只剩下升余弦脉冲部分：

$$F(\mathrm{j}\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\left[\frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2}\right]$$

信号与系统第 5 周第 1 次作业答案

5-1.1

解：

首先求单位冲激响应$h(t)$：

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(\mathrm{j}\omega)]=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(-1+\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}\right)$$

由典型信号的傅里叶变换可知：

$$\begin{cases}\mathcal{F}[\delta(t)]=1\\ \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)]=\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}，\ \alpha>0\end{cases}$$

故：

$$h(t)=-\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

接着求单位阶跃响应$r_u(t)$：

因为$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$，所以：

$$\begin{aligned}r_u(t)&=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}-\delta(\tau)+2\mathrm{e}^{-\tau}u(\tau)d\tau\\&=-u(t)+2u(t)\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}d\tau\\&=(1-2\mathrm{e}^{-t})u(t)\end{aligned}$$

最后求激励为$\mathrm{e}^{-t}u(t)$时的零状态响应$r_{zsr}(t)$：

$$r_{zsr}(t)=e(t)*h(t)$$

由时域卷积定理可知：

$$R(\mathrm{j}\omega)=E(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$$

再由典型信号的傅里叶变换可得：

$$E(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]=\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$$

$$R(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)}=\frac{-3}{2+\mathrm{j}\omega}+\frac{2}{1+\mathrm{j}\omega}$$

所以：

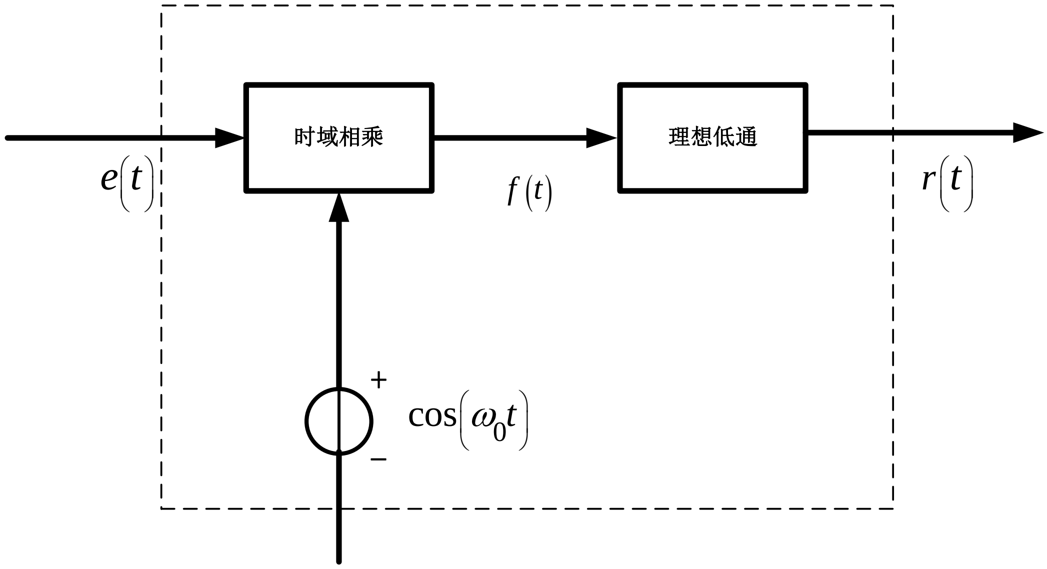
$$r_{zsr}(t)=\mathcal{F}^{-1}[R(\mathrm{j}\omega)]=(-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

综上：

$$\begin{cases}h(t)=-\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)\\ r_u(t)=(1-2\mathrm{e}^{-t})u(t)\\ r_{zsr}(t)=(-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t})u(t)\end{cases}$$

5-1.2

解：



设$e(t)$经过时域相乘后所得结果为$f(t)$。

1) 当激励为冲激信号$\delta(t)$时：

$$e(t)=\delta(t)$$

$$f(t)=\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$$

$h_i(t)$是$\delta(t)$的响应，则：

$$h(t)=h_i(t)$$

$$=\mathcal{F}^{-1}[H_i(\mathrm{j}\omega)]$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{[u(\omega+2\Omega)-u(\omega-2\Omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\right\}$$

由典型信号的傅里叶变换可知：

$$\mathcal{F}[Sa(\Omega t)]=\frac{\pi}{\Omega}[u(\omega+\Omega)-u(\omega-\Omega)]$$

所以：

$$h(t)=\frac{2\Omega}{\pi}Sa[2\Omega(t-t_0)]$$

2) 当激励信号为$Sa^2(\Omega t)\cos(\omega_0 t)$时：

$$e(t)=Sa^2(\Omega t)\cos(\omega_0 t)$$

$$f(t)=Sa^2(\Omega t)\cos^2(\omega_0 t)$$

$$=\frac{1}{2}[Sa^2(\Omega t)+Sa^2(\Omega t)\cos(2\omega_0 t)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[Sa^2(\Omega t)+\frac{1}{2}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}+\frac{1}{2}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}Sa^2(\Omega t)+\frac{1}{4}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}+\frac{1}{4}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}$$

设：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[Sa^2(\Omega t)]$$

则有：

$$G[\mathrm{j}(\omega-2\omega_0)]=\mathcal{F}\left[Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$$

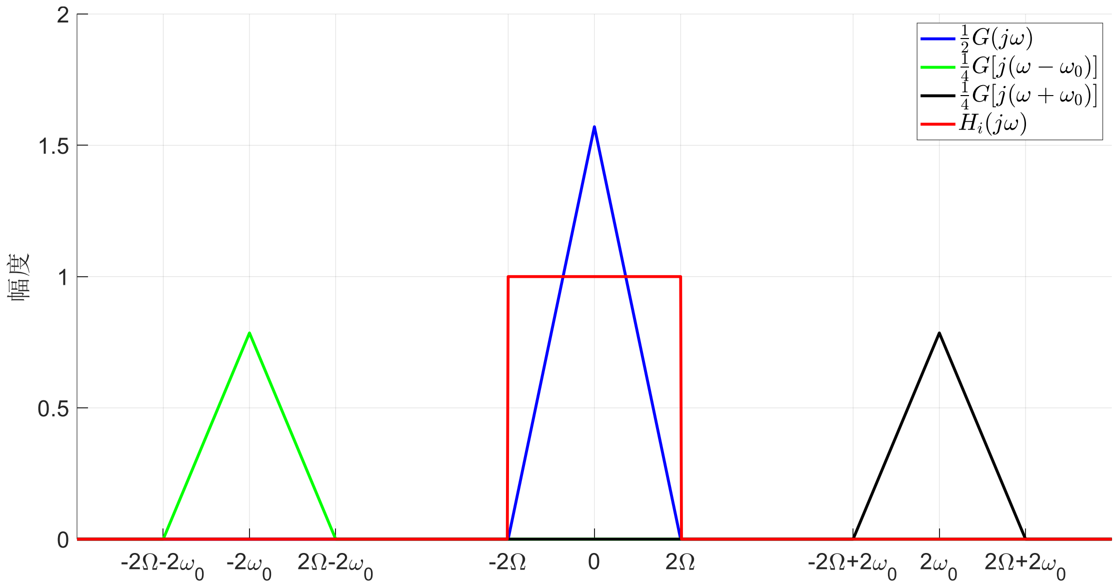
$$G[\mathrm{j}(\omega+2\omega_0)]=\mathcal{F}\left[Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$$

其中：

$$\begin{cases}G(\mathrm{j}\omega), & \omega\in(-2\Omega,\ 2\Omega)\\ G[\mathrm{j}(\omega-2\omega_0)], & \omega\in(-2\Omega+2\omega_0,\ 2\Omega+2\omega_0)\\ G[\mathrm{j}(\omega+2\omega_0)], & \omega\in(-2\Omega-2\omega_0,\ 2\Omega-2\omega_0)\end{cases}$$

由于$H(\mathrm{j}\omega)$的通带为$(-2\Omega，2\Omega)$，且$\omega_0 \gg \Omega$，所以$G[\mathrm{j}(\omega - 2\omega_0)]$和$G[\mathrm{j}(\omega + 2\omega_0)]$不会出现在滤波器的通带内。

示意图如下：



所以：

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}G(\mathrm{j}\omega)\right] = \frac{1}{2}Sa^2(\Omega t)$$

3) 当激励信号为$Sa^2(\Omega t)\sin(\omega_0 t)$时：

$$e(t) = Sa^2(\Omega t)\sin(\omega_0 t)$$

$$f(t) = Sa^2(\Omega t)\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2}[Sa^2(\Omega t)\sin(2\omega_0 t)]$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{j}}\left[Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} - Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{1}{4\mathrm{j}}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} - \frac{1}{4\mathrm{j}}Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}$$

同 2)，$\mathcal{F}\left[Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$和$\mathcal{F}\left[Sa^2(\Omega t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right]$不会出现在滤波器的通带内，此时滤波器的通带内没有任何信号的频域波形。

$$r(t) = 0$$

4) 我们可以把整个系统拆分为两个子系统：理想低通滤波器和时域相乘部分。因为理想低通滤波器是 LTI 系统，若时域相乘部分也是 LTI 系统，则两个系统串联是 LTI 系统，反之则不是。所以只需判断时域相乘部分的线性时不变性。

线性：

当激励为$e_1(t)$时，设时域相乘结果为$f_1(t)$。

$$f_1(t) = T[e_1(t)] = e_1(t)\cos(\omega_0 t)$$

当激励为$e_2(t)$时，设时域相乘结果为$f_2(t)$。

$$f_2(t) = T[e_2(t)] = e_2(t)\cos(\omega_0 t)$$

因为：

$$\begin{aligned} T[ae_1(t) + be_2(t)] &= [ae_1(t) + be_2(t)]\cos(\omega_0 t) \\ &= af_1(t) + bf_2(t) \end{aligned}$$

所以时域相乘子系统是线性的，整个系统是线性的。

时不变：

当激励为$e(t)$时，设时域相乘结果为$f_1(t)$。

$$f_1(t) = e(t)\cos(\omega_0 t)$$

且$f_1(t - t_0) = e(t - t_0)\cos[\omega_0(t - t_0)]$

当激励为$e(t - t_0)$时，设时域相乘结果为$f_2(t)$。

$$f_2(t) = e(t - t_0)\cos(\omega_0 t)$$

而$f_1(t - t_0) \neq f_2(t)$。

所以时域相乘子系统是时变的，整个系统是时变的。

综上，该系统是线性系统，但不是时不变系统。

信号与系统第 5 周第 2 次作业答案

5-2.1

解：

1) $f(t)=e^{-2}e^{-(t-2)}u(t-2)$

由典型信号的拉普拉斯变换可知：

$$\mathcal{L}[e^{-t}u(t)]=\frac{1}{s+1}$$

再由时移性质得：

$$\mathcal{L}\left[e^{-(t-2)}u(t-2)\right]=\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

所以：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)]=e^{-2}\mathcal{L}\left[e^{-(t-2)}u(t-2)\right]=\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1}}\text{，}\ \mathbf{Re}(\boldsymbol{s})>-\mathbf{1}$$

2) $f(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$

由 1)可知：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)]=\frac{e^{-2s}}{s+1}}\text{，}\ \mathbf{Re}(\boldsymbol{s})>-\mathbf{1}$$

3) $f(t)=e^{2}e^{-t}u(t)$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)]=e^{2}\mathcal{L}[e^{-t}u(t)]=\frac{e^{2}}{s+1}}\text{，}\ \mathbf{Re}(\boldsymbol{s})>-\mathbf{1}$$

4) $f(t)=\sin[2(t-1)+2]\,u(t-1)$

$$=\cos(2)\sin[2(t-1)]\,u(t-1)+\sin(2)\cos[2(t-1)]\,u(t-1)$$

由典型信号的拉普拉斯变换可知：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\sin(2t)\,u(t)] = \frac{2}{s^2+2^2} \\ \mathcal{L}[\cos(2t)u(t)] = \frac{s}{s^2+2^2} \end{cases}$$

再由时移性质得：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{\sin[2(t-1)]\,u(t-1)\} = \frac{2e^{-s}}{s^2+2^2} \\ \mathcal{L}\{\cos[2(t-1)]\,u(t-1)\} = \frac{se^{-s}}{s^2+2^2} \end{cases}$$

所以：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)] = \cos(2)\,\mathcal{L}\{\sin[2(t-1)]\,u(t-1)\}}$$

$$\boldsymbol{+\sin(2)\,\mathcal{L}\{\cos[2(t-1)]\,u(t-1)\}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{[2\cos(2) + s\sin(2)]e^{-s}}{s^2+4}}\text{，}\ \mathbf{Re}(\boldsymbol{s}) > \mathbf{0}$$

5) $f(t) = (t-1)u(t-1) - (t-1)u(t-2)$

$$= (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-2)$$

由典型信号的拉普拉斯变换可得：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \end{cases}$$

再由时移性质得：

$$\begin{cases} \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] = \frac{e^{-s}}{s^2} \\ \mathcal{L}[(t-2)u(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s^2} \\ \mathcal{L}[u(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s} \end{cases}$$

所以：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] + \mathcal{L}[(t-2)u(t-2)]}$$

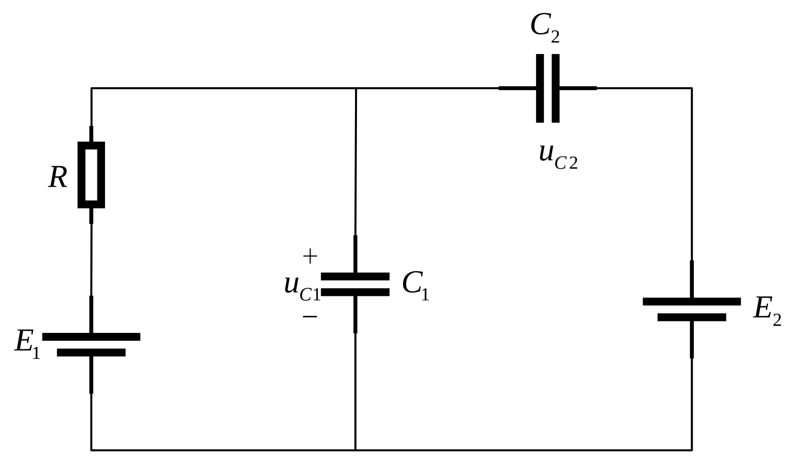
$$\boldsymbol{+\mathcal{L}[u(t-2)]}$$

$$= \frac{(e^{s} - 1 - s)e^{-2s}}{s^{2}}，\mathrm{Re}(s) > 0$$

5-2.2

解：

当$t < 0$时，等效电路为：



此时电路处于稳态，电容视作断路，图中电流处处为 0，电阻R的电压为 0。

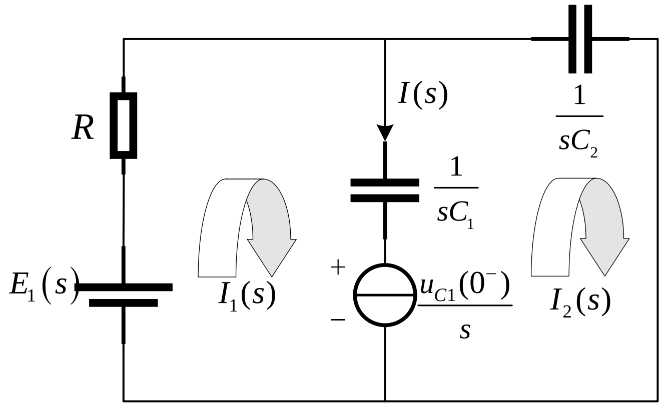
由图可得：

$$\begin{cases} u_{c1} = E_1 \\ u_{c1} + u_{c2} = E_2 \end{cases}$$

将$E_1 = E_2 = 1\ \mathrm{V}$代入得：

$$\begin{cases} u_{c1}(0^-) = 1\ \mathrm{V} \\ u_{c2}(0^-) = 0\ \mathrm{V} \end{cases}$$

当$t \geq 0$时，其 S 域等效电路为：



设左侧回路电流为$I_1(s)$，右侧回路电流为$I_2(s)$。

由图可得：

$$\begin{cases}\left(R+\frac{1}{sC_1}\right)I_1(s)-\frac{1}{sC_1}I_2(s)=\frac{E_1}{s}-\frac{u_{c1}(0^-)}{s}\\-\frac{1}{sC_1}I_1(s)+\left(\frac{1}{sC_1}+\frac{1}{sC_2}\right)I_2(s)=\frac{u_{c1}(0^-)}{s}\end{cases}$$

将$E_1=1\,\mathrm{V}$，$R=1\,\Omega$，$C_1=C_2=1\,\mathrm{F}$，$u_{c1}(0^-)=1\,\mathrm{V}$代入上式得：

$$\begin{cases}\left(1+\frac{1}{s}\right)I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)=0\\-\frac{1}{s}I_1(s)+\frac{2}{s}I_2(s)=\frac{1}{s}\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}I_1(s)=\frac{1}{2s+1}\\I_2(s)=\frac{s+1}{2s+1}\end{cases}$$

C_1在 S 域的电流和电压分别为：

$$I(s)=I_1(s)-I_2(s)=\frac{-s}{2s+1}=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{2}}$$

$$U_{c1}(s)=I(s)\frac{1}{sC_1}+\frac{u_{c1}(0^-)}{s}=\frac{-s}{2s+1}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s}=\frac{-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}+\frac{1}{s}$$

最后通过拉普拉斯逆变换得：

$$i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

$$u_{c1}(t)=\mathcal{L}^{-1}[U_{c1}(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}+\frac{1}{s}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)+u(t)$$

$$=\left[1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right]u(t)$$

信号与系统第 6 周第一次作业答案

6-1

解：

(a) 画出 s 域等效电路：

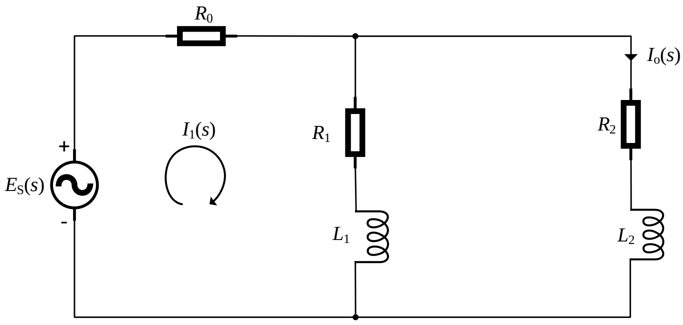


图 1 s 域等效电路

列写网孔方程：

$$\begin{cases} (R_0+R_1+L_1s)I_1(s)-(R_1+L_1s)I_{\mathrm{o}}=E_s(s) \\ -(R_1+L_1s)I_1(s)+(R_1+R_2+L_1s+L_2s)I_{\mathrm{o}}(s)=0 \end{cases}$$

整理得：

$$I_{\mathrm{o}}(s)=\frac{s+60}{(s+110)(s+20)}E_s(s)$$

所以系统函数为：

$$H(s)=\frac{I_{\mathrm{o}}(s)}{E_s(s)}=\frac{s+60}{(s+110)(s+20)} \tag{1}$$

其中，零点：-60，极点：-110、-20，零极点分布图如下所示：

图 2 (a)零极点分布图 (b)系统频响函数向量表示

表格 1 幅频特性

ω	$-\infty$	……	0	……	∞
$\lvert H(j\omega)\rvert$	0	（递增）	$\frac{3}{110}$	（递减）	0

表格 2 相频特性

ω	$-\infty$	……	0	……	∞
$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\frac{\pi}{2}$	（递减）	0	（递减）	$-\frac{\pi}{2}$

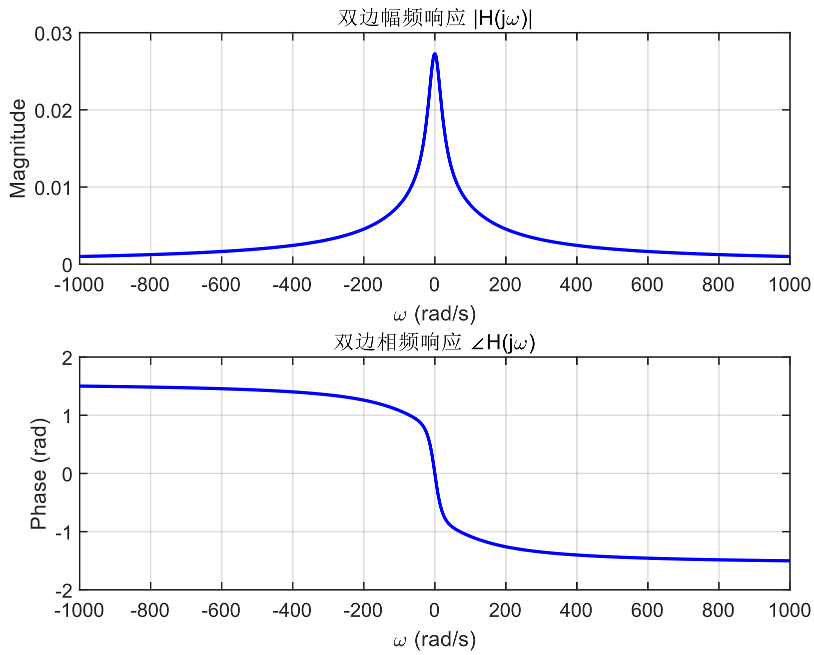


图 3 幅频相频特性曲线

由(1)可设，$y(t)=(p+60)f(t)$，$x(t)=(p^2+130p+2200)f(t)$

即 $f''=x(t)-130f'-2200f$，级联模拟框图如下所示：

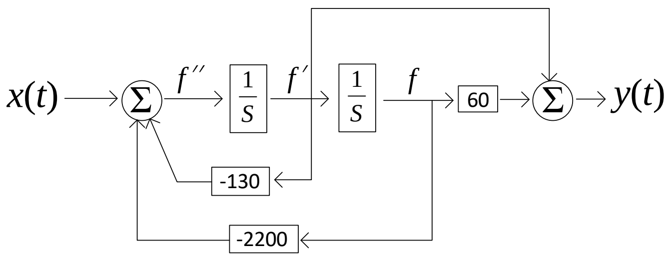


图 4 级联模拟框图

(b) 画出 s 域等效电路：

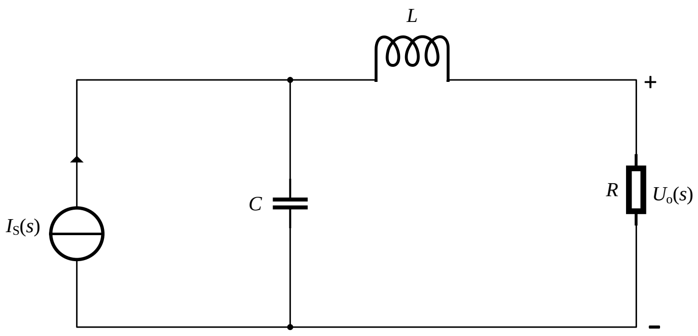


图 5 s 域等效电路

列写 s 域 KCL 方程：

$$I_s(s)=\frac{U_o(s)}{R}+\frac{\frac{U_o(s)}{R}(R+sL)}{\frac{1}{sC}}$$

整理得：

$$I_s(s)=\frac{1+sC(sL+R)}{R}U_o(s)$$

故系统函数为：

$$H(s)=\frac{U_o(s)}{I_s(s)}=\frac{1}{(s+1)^2} \tag{2}$$

系统有 2 阶极点：-1，零极点图如下所示：

图 6 (a)零极点分布图 (b)系统频响函数向量表示

表格 3 幅频特性

ω	$-\infty$	……	0	……	∞
$\lvert H(j\omega)\rvert$	0	（递增）	1	（递减）	0

表格 4 相频特性

ω	$-\infty$	……	0	……	∞
$\lvert H(j\omega)\rvert$	π	（递减）	0	（递减）	$-\pi$

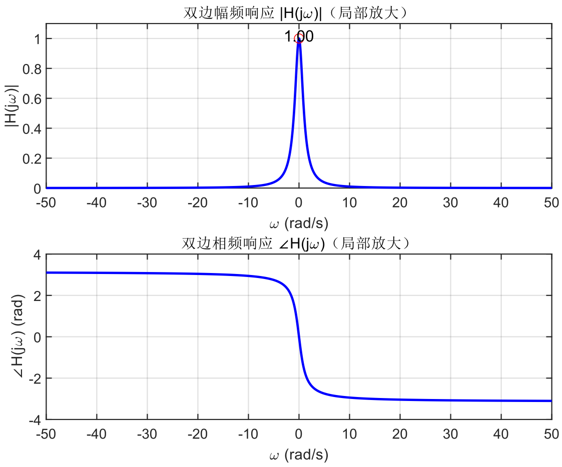


图 7 幅频相频特性曲线

由(1)可设，$y(t)=f(t)$，$x(t)=(p^2+2p+1)f(t)$

即 $f''=x(t)-2f'-f$，级联模拟框图如下所示：

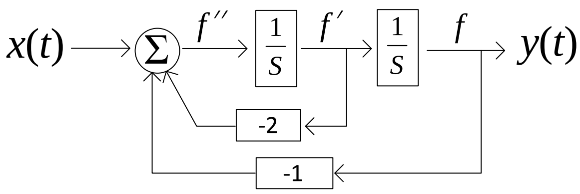


图 8 级联模拟框图

信号与系统第 6 周第二次作业答案

6-2

解：

1) $x(n) = nu(n)$

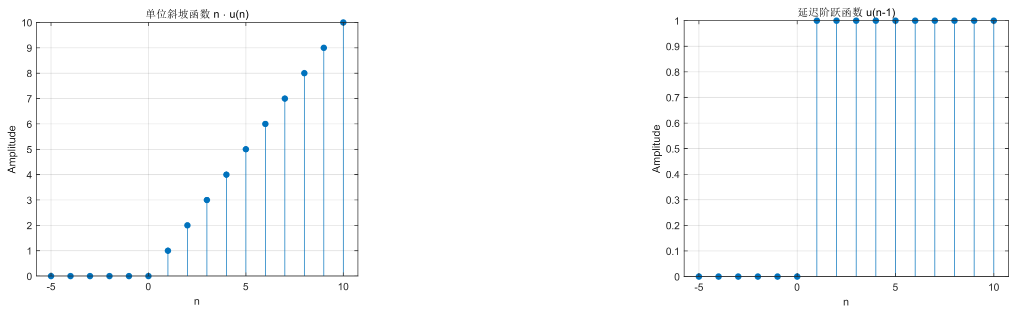
以单位样值信号表示：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} k\delta(n-k)$$

一阶后向差分：

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) = nu(n) - (n-1)u(n-1)$$

$$= n\delta(n) + u(n-1) = u(n-1)$$



(a) (b)

图 1 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

2) $x(n) = -nu(-n)$

以单位样值信号表示：

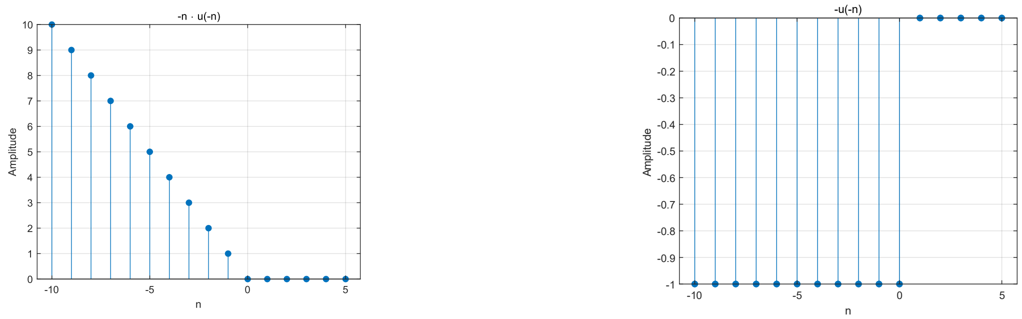
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{0} (-k)\delta(n-k)$$

一阶后向差分：

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= -nu(-n) - (-n+1)u(-n+1)$$

$$= \delta(n-1) - u(-n+1) = -u(-n)$$



(a) (b)

图 2 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

3) $x(n) = 2^{-n}u(n)$

以单位样值信号表示：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\delta(n-k)$$

一阶后向差分：

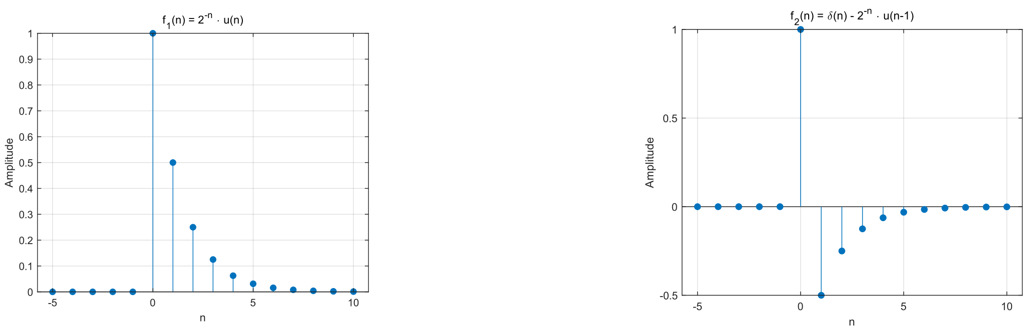
$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= 2^{-n}u(n) - 2^{-(n-1)}u(n-1)$$

$$= 2^{-n}[u(n) - u(n-1)] - 2^{-n}u(n-1)$$

$$= 2^{-n}\delta(n) - 2^{-n}u(n-1)$$

$$= \delta(n) - 2^{-n}u(n-1)$$



(a) (b)

图 3 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

4) $x(n) = (-\frac{1}{2})^{-n}u(n)$

以单位样值信号表示：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\delta(n-k)$$

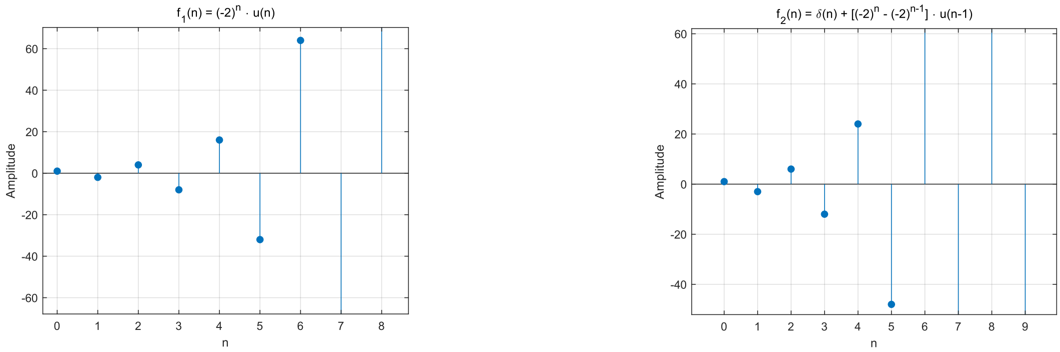
一阶后向差分：

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= (-2)^n u(n) - (-\frac{1}{2})^{-(n-1)}u(n-1)$$

$$= (-2)^n\delta(n) + (-2)^n u(n-1) - (-2)^{n-1}u(n-1)$$

$$= \delta(n) + [(-2)^n - (-2)^{n-1}]u(n-1)$$



(a) (b)

图 4 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

5) $x(n) = -(\frac{1}{2})^n u(-n)$

以单位样值信号表示：

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{0} -(\frac{1}{2})^k\delta(n-k)$$

一阶后向差分：

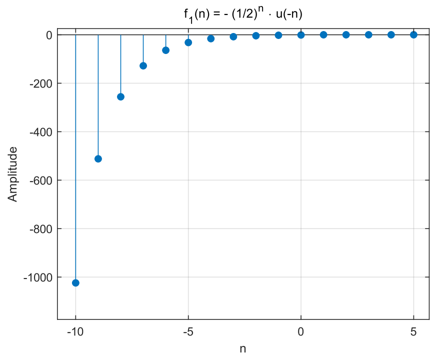
$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(-n+1)$$

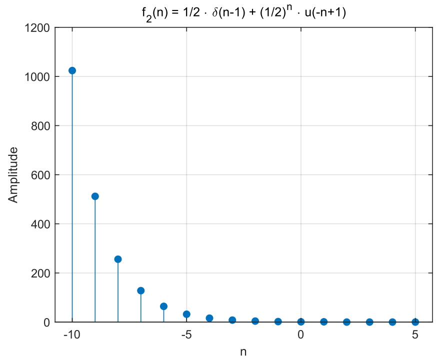
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(n-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\delta(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1)$$



(a)



(b)

图 5 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

6) $x(n) = (\frac{1}{2})^{n+1} u(n+1)$

以单位样值信号表示：

$$x(n) = \sum_{k=-1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{k+1} \delta(n-k)$$

一阶后向差分：

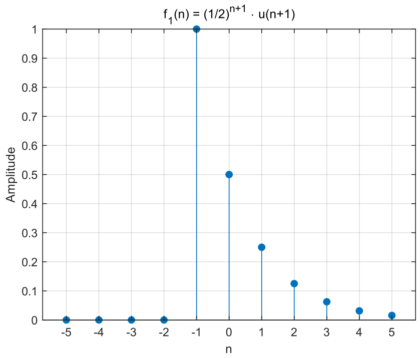
$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$= (\frac{1}{2})^{n+1} u(n+1) - (\frac{1}{2})^n u(n)$$

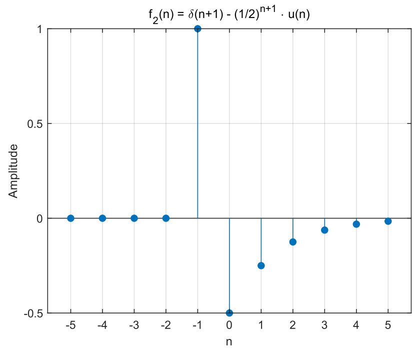
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u(n) + \delta(n+1) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$= \delta(n+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u(n)$$

$$= \delta(n+1) - (\frac{1}{2})^{n+1} u(n)$$



(a)



(b)

图 6 (a)原图，(b)一阶后向差分序列图

观察与发现：

从一阶后向差分的定义，与其序列和原图的比较发现，一阶后向差分图像表示了原图当前时刻与前一时刻的“变化率”，其物理意义可类比连续信号的导数。以第一小问作为例子，这是一个单调递增、增长速率为 1 的单位斜坡序列$x(n) = nu(n)$，其一阶后向差分图像是一个单位阶跃函数$u(n-1)$，表示从$n = 1$开始，序列的变化量恒定为 1。

信号与系统第 7 周第 1 次作业答案

7-1.1

解：

该系统的微分方程为：

$$RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t)$$

取近似$y(t)\approx y(n)$，前向差分公式为：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\approx\frac{1}{T_s}[y(n)-y(n-1)]$$

代入可得：

$$RC\left[\frac{y(n)-y(n-1)}{T_s}\right]+y(n)=x(n)$$

整理得：

$$y(n)=\frac{RC}{RC+T_s}y(n-1)+\frac{T_s}{RC+T_s}x(n)$$

接下来证明系统的线性时不变性。

设$a=\frac{RC}{RC+T_s}$，$b=\frac{T_s}{RC+T_s}$，两者均为常数。

线性：

设激励为$x_1(n)$时，响应为$y_1(n)$，激励为$x_2(n)$时，响应为$y_2(n)$，则：

$$y_1(n)-ay_1(n-1)=bx_1(n)$$
$$y_2(n)-ay_2(n-1)=bx_2(n)$$

当激励$x(n)=cx_1(n)+dx_2(n)$时（其中c，d均为常数），设响应为$y(n)$，则：

$$y(n)-ay(n-1)=b[cx_1(n)+dx_2(n)]$$

若激励为$x(n)=cx_1(n)+dx_2(n)$时，能推导出$y(n)=cy_1(n)+dy_2(n)$，则系统是线性的。

$$\begin{aligned}&b[cx_1(n)+dx_2(n)]\\&=cbx_1(n)+dbx_2(n)\\&=c[y_1(n)-ay_1(n-1)]+d[y_2(n)-ay_2(n-1)]\\&=cy_1(n)+dy_2(n)-a[cy_1(n-1)+dy_2(n-1)]\\&=y(n)-ay(n-1)\end{aligned}$$

所以系统是线性的。

时不变性：

设激励为$x(n)$时，响应为$y(n)$，则有：

$$y(n)-ay(n-1)=bx(n) \qquad ①$$

对上式右边激励延时n_0得$bx(n-n_0)$。

对左边响应延时n_0得$y(n-n_0)-ay(n-1-n_0)$。

若$y(n-n_0)-ay(n-1-n_0)=bx(n-n_0)$成立，则系统是时不变的。

对①式中n换元可得

$$y(n-n_0)-ay(n-1-n_0)=bx(n-n_0)$$

所以系统是时不变的。

综上，该系统是线性时不变系统。

将$R=1\,\Omega$、$C=1\,\mathrm{F}$代入微分方程可得：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t)$$

其等效s域方程为：

$$sY(s)+Y(s)=X(s)$$

系统函数$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s+1}$。

当激励$x(t)=u(t)$时：

$$X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\\&=u(t)-\mathrm{e}^{-t}u(t)\\&=(1-\mathrm{e}^{-t})u(t)\end{aligned}$$

将$R=1\,\Omega$、$C=1\,\mathrm{F}$、$x(n)=u(n)$代入差分方程可得：

$$y(n)=\frac{10}{11}y(n-1)+\frac{1}{11}u(n)$$

由于系统初始时处于零状态，故系统的零输入响应$y_{zi}(n)=0$。

再求系统的零状态响应$y_{zs}(n)$。

确定单位样值信号输入系统$y(n)-\frac{10}{11}y(n-1)=\frac{1}{11}\delta(n)$引起的状态改变：

$$y(-1)=0，y(0)=\frac{1}{11}$$

齐次方程$y(n)-\frac{10}{11}y(n-1)=0$的解为：

$$y_h(n)=c\left(\frac{10}{11}\right)^n$$

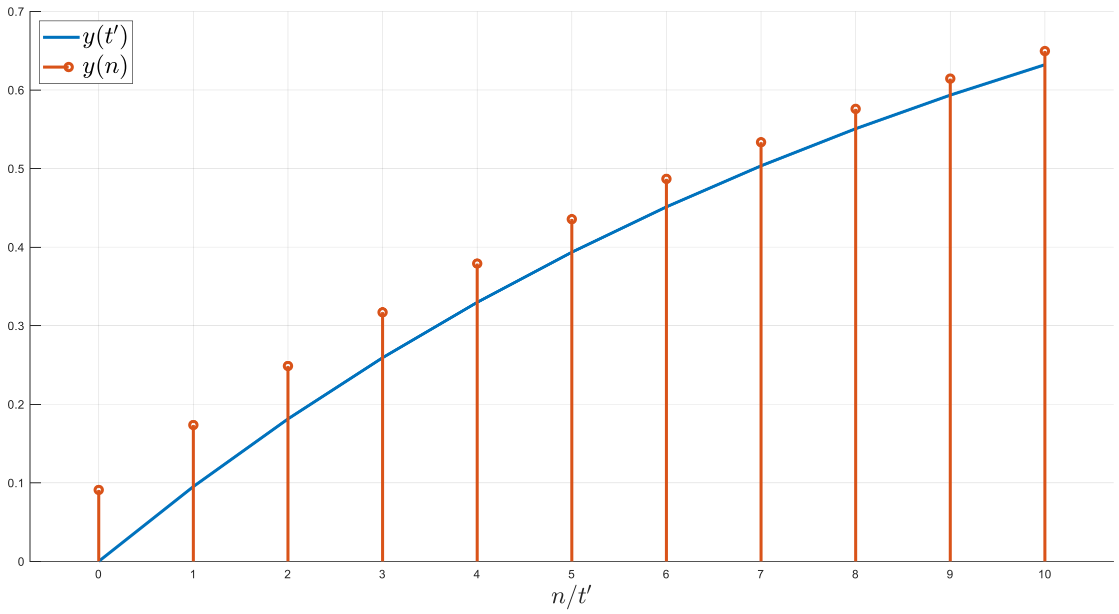
代入初始条件得$c=\frac{1}{11}$。

则：

$$h(n)=\frac{1}{11}\left(\frac{10}{11}\right)^n u(n)$$

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=x(n)*h(n)\\&=u(n)*\frac{1}{11}\left(\frac{10}{11}\right)^n u(n)\\&=\left[1-\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}\right]u(n)\end{aligned}$$

图像如下：



若采取向后差分：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{1}{T_s}[y(n+1) - y(n)]$$

系统的差分方程为：

$$RC\left[\frac{y(n+1) - y(n)}{T_s}\right] + y(n) = x(n)$$

整理得：

$$y(n+1) = \frac{RC - T_s}{RC} y(n) + \frac{T_s}{RC} x(n)$$

将$R = 1\ \Omega$、$C = 1\ \mathrm{F}$、$x(n) = u(n)$代入差分方程可得：

$$y(n+1) = \frac{9}{10} y(n) + \frac{1}{10} u(n)$$

由于系统初始时处于零状态，故系统的零输入响应$y_{zi}(n) = 0$。

再求系统的零状态响应$y_{zs}(n)$。

确定单位样值信号输入系统$y(n+1) - \frac{9}{10} y(n) = \frac{1}{10}\delta(n)$引起的状态改变：

$$y(0) = 0，y(1) = \frac{1}{10}$$

齐次方程$y(n+1) - \frac{9}{10} y(n) = 0$的解为：

$$y_h(n) = c\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

代入初始条件得$c = \frac{1}{10}$。

则：

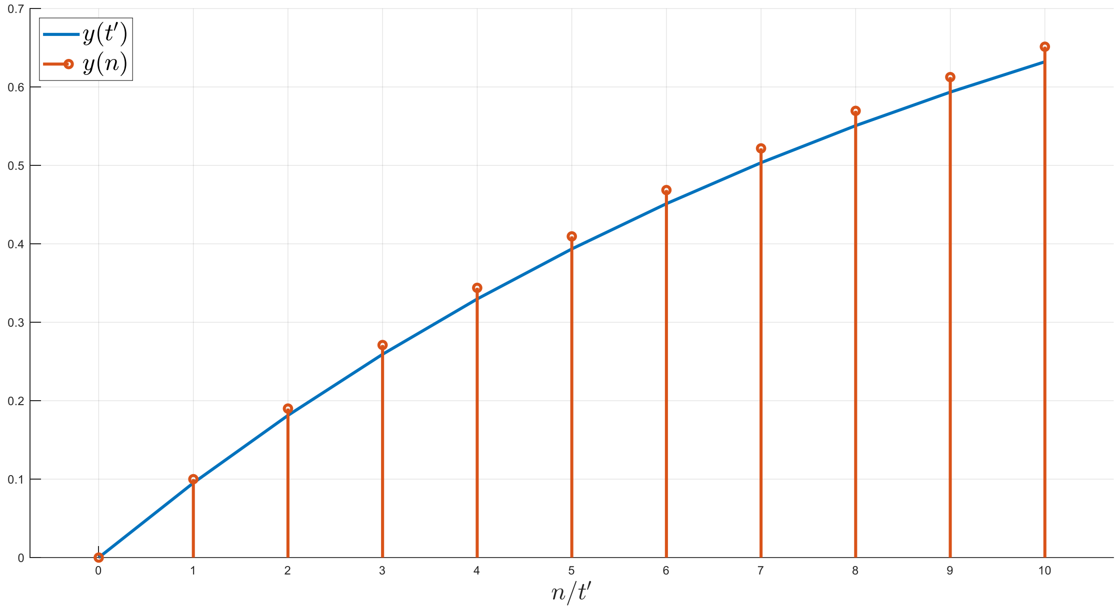
$$h(n) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} u(n)$$

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n)$$

$$= u(n) * \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} u(n)$$

$$= \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n}\right] u(n)$$

图像如下：



7-1.2

解：

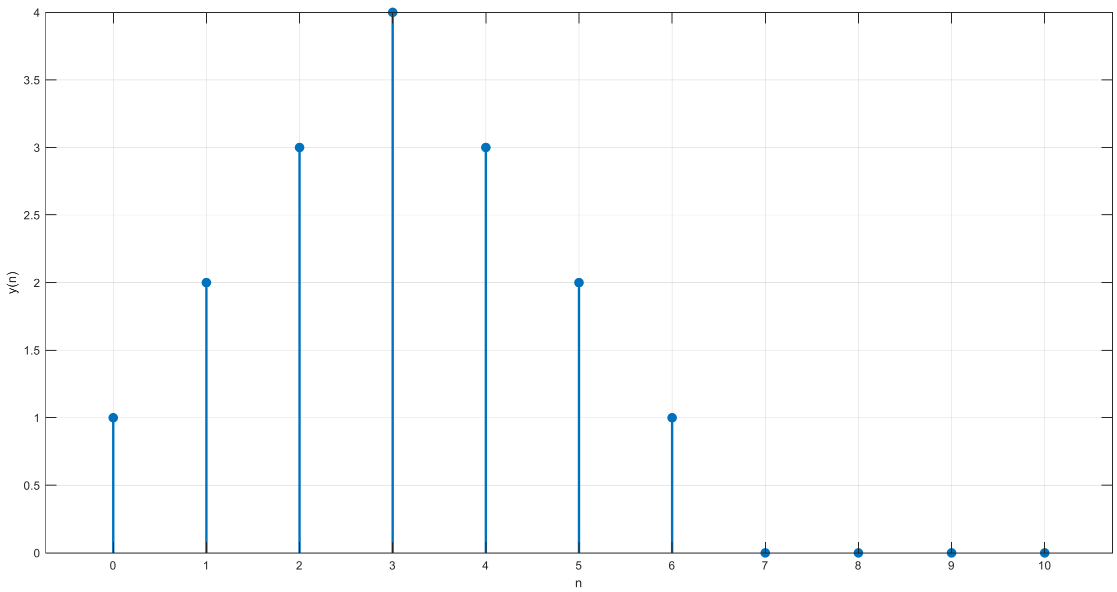
1) $x(n) = u(n) - u(n-4)$，$h(n) = u(n) - u(n-4)$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$
$$= [u(n) - u(n-4)] * [u(n) - u(n-4)]$$
$$= u(n) * u(n) - 2u(n) * u(n-4) + u(n-4) * u(n-4)$$
$$= (n+1)u(n) - 2(n-3)u(n-4) + (n-7)u(n-8)$$

有限长序列卷积可用表格法：

$h(n)$ \ $x(n)$	1	1	1	1			
1	1	1	1	1			
1		1	1	1	1		
1			1	1	1	1	
1				1	1	1	1
$y(n)$	1	2	3	4	3	2	1

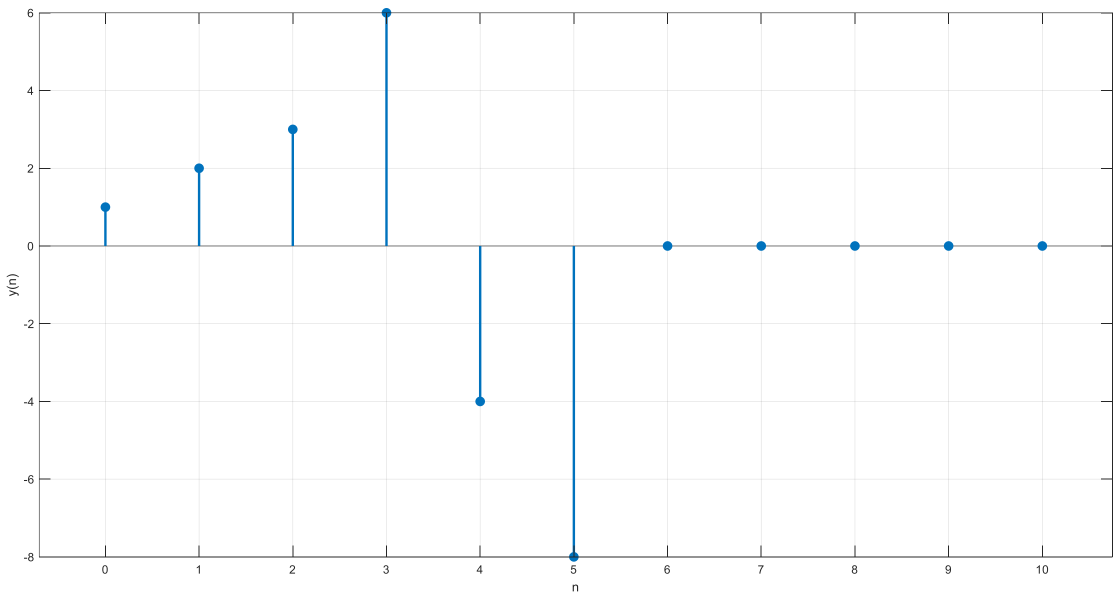
图像如下：



2) $x(n) = 2^n[u(n) - u(n-4)]$，$h(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= 2^n[u(n) - u(n-4)] * [\delta(n) - \delta(n-2)] \\ &= 2^n u(n) * \delta(n) - 2^n u(n) * \delta(n-2) - 2^n u(n-4) * \delta(n) \\ &\quad + 2^n u(n-4) * \delta(n-2) \\ &= 2^n[u(n) - u(n-4)] + 2^{n-2}[-u(n-2) + u(n-6)] \end{aligned}$$

图像如下：

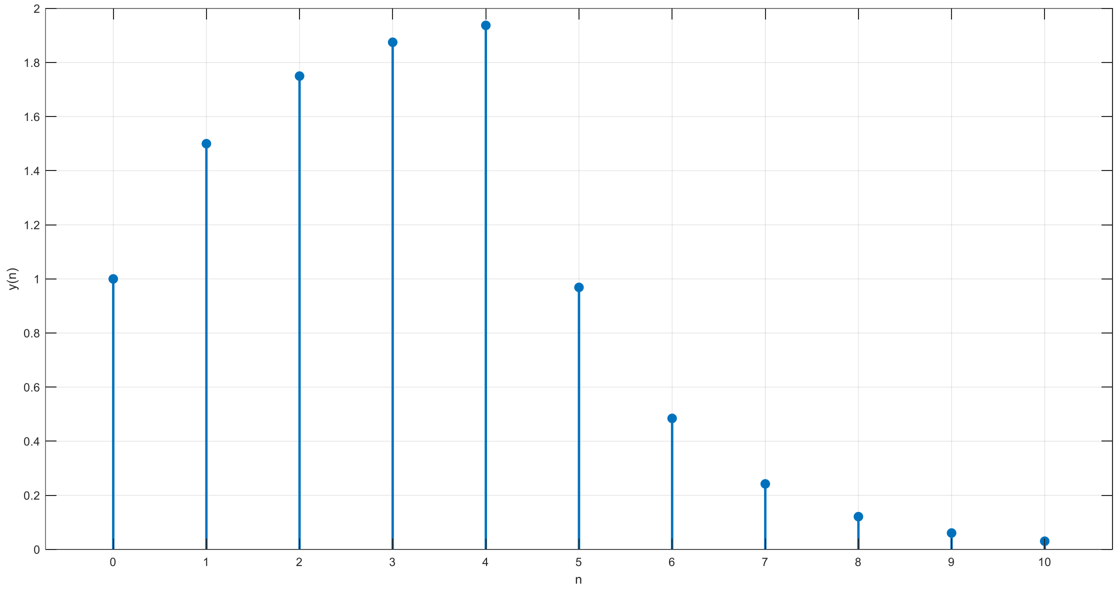


3) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，$h(n) = u(n) - u(n-5)$

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * [u(n) - u(n-5)] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * u(n-5) \end{aligned}$$

$$=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n)-\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\right]u(n-5)$$

图像如下：



信号与系统第 7 周第 2 次作业答案

7-2.1

解：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$

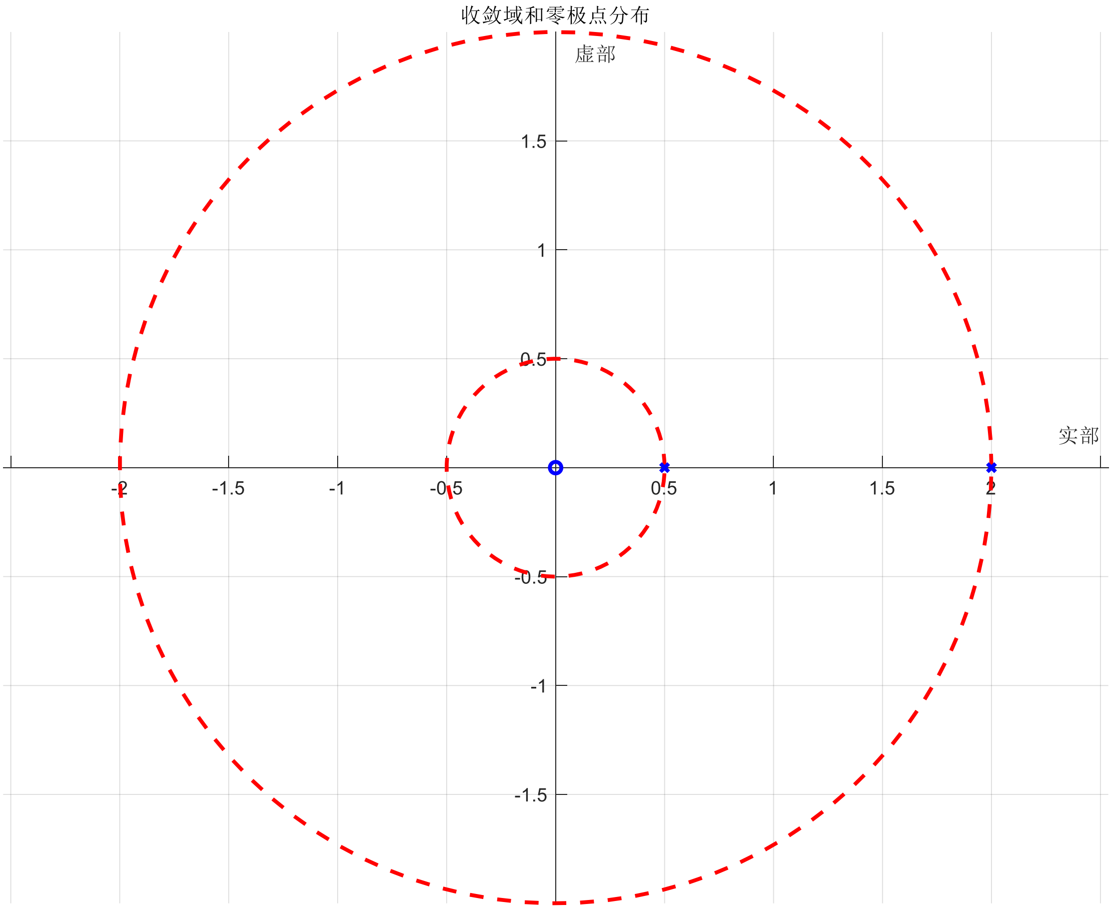
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{3z}{(2-z)(2z-1)}$$

易知零点为$z=0$，极点为$p_1=\frac{1}{2}$，$p_2=2$。

对于左边序列$\frac{\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z}$，收敛域为 $\left|\frac{z}{2}\right|<1$，对于右边序列$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，收敛域为$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$。故$X(z)$的收敛域为$\frac{1}{2}<|z|<2$。

收敛域和零极点分布图如下：



7.-2.2

解：

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=0}^{n=+\infty} y(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{k=0}^{n} x(k) z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n=+\infty} x(k) \sum_{n=k}^{+\infty} z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n=+\infty} \frac{x(k) z^{-k}}{1 - z^{-1}} \\
&= \frac{zX(z)}{z-1}
\end{aligned}
$$

设$X(z)$的收敛域为$R_{x-} < |z| < R_{x+}$，其中$R_{x-} < R_{x+}$。

易知$\frac{z}{z-1}$的收敛域为：$|z| > 1$。

两者相乘，收敛域应取其交集。

若$R_{x+} \le 1$，交集为空，则$Y(z)$的收敛域为空集。

若$R_{x+} > 1$，$Y(z)$的收敛域为：

$$\max(R_{x-}, 1) < |z| < R_{x+}$$

信号与系统第 8 周作业答案

8.1

解：

$$H(z)=\frac{2z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}=a+z\left[\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{C}{(z-1)}\right]$$

上式中，a，A、B、C 均为常数。

$$H(z)=\frac{-6z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{8z}{(z-1)}$$

系统极点$z_1=\frac{1}{2}$（2 重），$z_2=1$。

1) $|z|>1$，序列为右边序列

由常规 z 变换知：

$$\frac{z}{z-a}\overset{z}{\leftrightarrow}a^n u(n),\qquad \frac{az}{(z-a)^2}\overset{z}{\leftrightarrow}na^n u(n)$$

故

$$h(n)=\left[8-6\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(n)$$

2) $|z|<\frac{1}{2}$，序列为左边序列

$$\frac{z}{z-a}\overset{z}{\leftrightarrow}-a^n u(-n-1),\qquad \frac{az}{(z-a)^2}\overset{z}{\leftrightarrow}-na^n u(-n-1)$$

故

$$h(n)=-8u(-n-1)+6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(-n-1)$$

$$=\left[-8+6\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(-n-1)$$

3) $\frac{1}{2}<|z|<1$，序列为双边序列，其中$\frac{-6z}{z-\frac{1}{2}}$，$\frac{-z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$对应右边序列，$\frac{8z}{(z-1)}$对应左边序列。

$$\frac{z}{z-1}\overset{z}{\leftrightarrow}u(-n-1),\qquad \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\overset{z}{\leftrightarrow}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\overset{z}{\leftrightarrow}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

故

$$h(n)=-8u(-n-1)-(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$$

不难看出，以上三种收敛域情形下的单位样值响应序列都不满足绝对可和（表达式中都含有常数项），所以系统不稳定。

8.2

解：

$$y(n)+3y(n-1)=x(n)$$

对方程两边同时进行 z 变换：

$$Y(z)+3z^{-1}[Y(z)+y(-1)z]=X(z)$$

因为系统是因果系统，所以$y(-1)=0$，故：

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1+3z^{-1}}$$

1) 当$x(n)=\delta(n)$时，$X(z)=1$

$$H(z)=Y(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}=\frac{z}{z+3}$$

故

$$h(n)=Z^{-1}[H(z)]=(-3)^{n}u(n)$$

2) 当$x(n)=(n+n^2)u(n)$时，解法一：

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

此时

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1+3z^{-1}}=\frac{2z^3}{(z+3)(z-1)^3}$$

$$=a+z\left[\frac{A}{z+3}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{(z-1)^3}\right]$$

其中，a，A，B，C，D 均为常数。

$$Y(z)=-\frac{9}{32}\times\frac{z}{z+3}+\frac{1}{2}\times\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{7}{8}\times\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{9}{32}\times\frac{z}{z-1}$$

因为是因果序列，故

$$y_{zs}(n)=-\frac{9}{32}(-3)^n u(n)+\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}u(n)+\frac{7}{8}nu(n)+\frac{9}{32}u(n)$$

$$=\frac{1}{32}[-9(-3)^n+8n^2+20n+9]u(n)$$

解法二：

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{2z^2}{(z-1)^3}$$

由卷积定理可知，时域卷积，频域相乘，即

$$y(n)=x(n)*h(n)\leftrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$$

故

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2z^2}{(z-1)^3}\times\frac{z}{z+3}$$

$$Y(z)=\ -\frac{9}{32}\times\frac{z}{z+3}+\frac{1}{2}\times\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{7}{8}\times\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{9}{32}\times\frac{z}{z-1}$$

因为是因果序列，故

$$y_{\mathrm{zs}}(n)=\frac{1}{32}[-9(-3)^n+8n^2+20n+9]u(n)$$