常系数线性非齐次的递推关系

- 定义:形如$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$的递推关系叫做**常系数线性非齐次递推关系**, 其中c_1, c_2, …, c_k是实数, $F(n)$是只依赖于n且不恒为0的函数.
- 递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$叫做**相伴的齐次递推关系**.

常系数线性非齐次的递推关系

- 例：以下都是常系数线性非齐次的递推关系．求其对应的相伴齐次递推关系
  - $a_n = a_{n-1} + 2^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$
  - $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$

常系数线性非齐次的递推关系

- 例: 以下都是常系数线性非齐次的递推关系. 求其对应的相伴齐次递推关系
  - $a_n = a_{n-1} + 2^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$
  - $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$
- 解:以上递归关系分别对应的相伴的齐次递推关系为:
  - $a_n = a_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  - $a_n = 3a_{n-1}$
  - $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 关于**常系数线性非齐次的递推关系**的一个关键事实是，每个解都是一个特解与相伴的线性齐次递推关系的一个解的和，如下所述:

- 定理5:如果$\{a_n^{(p)}\}$是常系数线性非齐次的递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$的一个解，那么每个解都是$\boldsymbol{\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}}$的形式，其中$\{a_n^{(h)}\}$是相伴的线性齐次递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的一个解.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 3a_{n-1} + 2n$的所有解, 其中$a_1 = 3$.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 3a_{n-1} + 2n$的所有解, 其中$a_1 = 3$.
- 解:
  - 相伴的线性齐次方程为$a_n = 3a_{n-1}$, 它的解是$a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, 其中α是常数.
  - 我们现在找一个特解. 因为$F(n) = 2n$是n的一次多项式, 所以一个合理的尝试就是n的线性函数, 比如$p_n = cn + d$, 其中c和d为常数.
  - 为确定是否存在这样的解, 假设$p_n = cn + d$是一个解. 那么带入原方程就变为$cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$.
  - 变换后可得$(2 + 2c)n + (2d - 3c) = 0$. 从而$cn + d$是一个解当且仅当$2 + 2c = 0$且 $2d - 3c = 0$. 解该方程组可得$c=-1$ 和 $d=-3/2$. 因此$a_n^{(p)} = -n - 3/2$是一个特解.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 解(续):
  - 根据定理5, 所有的解都是下列形式$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha 3^n$, 其中$\alpha$是常数.
  - 为了找出具有$a_1 = 3$, 得到的通解公式中令$n = 1$. 我们得到$3 = -1 - 3/2 + 3\alpha$, 所以可得$\alpha = 11/6$.
  - 所以我们要找的解为$a_n = -n - 3/2 + (11/6)\ 3^n$.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 2a_{n-1} + 1$的所有解, 其中$a_1 = 1$ (汉诺塔).

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 2a_{n-1} + 1$的所有解, 其中$a_1 = 1$ (汉诺塔).
- 解:
  - 相伴的线性齐次方程为$a_n = 2a_{n-1}$, 它的解是$a_n^{(h)} = \alpha 2^n$, 其中α是常数.
  - 我们现在找一个特解. 因为$F(n) = 1$是n的0次多项式, 所以一个合理的尝试就是$p_n = c$, 其中c为常数.
  - 为确定是否存在这样的解, 假设$p_n = c$是一个解. 那么带入原方程就变为$c = 2c + 1$. 变换后可得$c=-1$. 因此$a_n^{(p)} = -1$是一个特解.
  - 所有解的形式$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha 2^n - 1$, 其中$\alpha$是常数.
  - 为了找出具有$a_1 = 1$, 得到的通解公式中令$n = 1$. 我们得到$1 = \alpha 2^1 - 1$, 所以可得$\alpha = 1$.
  - 所以我们要找的解为$a_n = 2^n - 1$.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$的所有解.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:求$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$的所有解.
- 解:
  - 相伴的线性齐次方程为$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$,它的解是$a_n^{(h)} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$，其中$\alpha_1$,$\alpha_2$是常数.
  - 我们现在找一个特解. 因为$F(n) = 7^n$，所以一个合理的尝试就是$a_n^{(p)} = C \cdot 7^n$，其中C为常数.
  - 为确定是否存在这样的解，将它带入方程后变为$C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n$.
  - 变换后可得$20C=49$. 从而可得$C=49/20$. 因此$a_n^{(p)} = 49/20 \cdot 7^n$是一个特解.
  - 所有解的形式$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + 49/20 \cdot 7^n$,其中$\alpha_1$,$\alpha_2$是常数.

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 当$\boldsymbol{F(n)}$**是**$\boldsymbol{n}$**的多项式与一个常数的**$\boldsymbol{n}$**次幂之积时，特解形式**如下所述:
- 定理6: 如果$\{a_n\}$满足线性非齐次的递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$是实数．且$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n^1 + b_0)\ s^n$, 其中$b_0, b_1, \ldots, b_t$, s是实数.

1)当s不是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根，存在一个特解:

$$\boldsymbol{(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n^1 + p_0)\ s^n}$$

2)当s是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根时，且重数是m，存在一个特解:

$$\boldsymbol{n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n^1 + p_0)\ s^n}$$

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:当$F(n) = 3^n$, $F(n) = n3^n$, $F(n) = n^2 2^n$, $F(n) = (n^2 + 1)3^n$, 线性非齐次递推关系$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$+$F(n)$的特解形式分别是多少?

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:当$F(n)=3^n$, $F(n)=n3^n$, $F(n)=n^2 2^n$, $F(n)=(n^2+1)3^n$, 线性非齐次递推关系$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}+F(n)$的特解形式分别是多少?
- 解:相伴的线性齐次递推关系$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}$，它的特征方程r^2-6r+9=(r-3)(r-3)=0，解为一个2重的单根3.
  - $F(n)=3^n$时, 特解的形式为$p_0 n^2 3^n$;
  - $F(n)=n3^n$时, 特解的形式为$n^2(p_1 n^1+p_0)3^n$;
  - $F(n)=n^2 2^n$时, 特解的形式为$(p_2 n^2+p_1 n^1+p_0)2^n$;
  - $F(n)=(n^2+1)3^n$时, 特解的形式为$n^2(p_2 n^2+p_1 n^1+p_0)3^n$;

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:a_n表示前n个正整数的和, 即$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$. 也就是a_n满足关系$a_n = a_{n-1} + n$. 其中a_1 =1. 求该递推关系的所有解

【备注:易出错的题】

求解常系数线性非齐次的递推关系

- 例:a_n表示前n个正整数的和, 即$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$. 也就是a_n满足关系$a_n = a_{n-1} + n$. 其中a_1 =1. 求该递推关系的所有解
- 解:
  - 相伴的线性齐次递推关系$a_n = a_{n-1}$, 它的解是$a_n^{(h)} = c(1)^n = c$. 其中c是常数.
  - 根据定理, $F(n)=n=n(1)^n$且$s=1$是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的1阶根, 所以特解为$n(p_1 n^1 + p_0)=p_1 n^2+p_0 n$.
  - 代入递推关系可得$p_1 n^2 + p_0 n = p_1(n-1)^2 + p_0(n-1) + n$. 化简后可得$p_0=p_1=1/2$. 因此$a_n^{(\mathrm{p})} = 1/2n^2+1/2n = \frac{n(n+1)}{2}$.
  - 所有解为$a_n^{(h)} + a_n^{(\mathrm{p})} = c+ n(n+1)/2$. 根据$a_1$ =1, 可得c=0. 因此$a_n= n(n+1)/2$.

【备注:易出错的题】