# 补充

- 给定推理的**前提**为$A_1, A_2, \cdots, A_k$, **结论**为$B$的写法形式也可以如下表示:$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$, 称B是$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$的逻辑结果(或称$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$蕴涵$B$).

# 4.7.3 间接证明法-反证法证明p→q

- 例:反证法证明对于整数$n$, 如果$n^2$为奇数, 则$n$为奇数.

# 4.7.3 间接证明法-反证法证明p→q



- 例:反证法证明对于整数$n$, 如果$n^2$为奇数, 则$n$为奇数.
- 解:
  - 假设$n$为偶数. 那么存在一个整数$k$，使得$n = 2k$. 公式两边取平方可得$n^2=4k^2=2(2k^2)$, 因此$n^2$为偶数.
  - 我们已经证明了$n$是偶数, 那么$n^2$也为偶数. 通过反证法, 对于整数$n$, 如果$n^2$为奇数, 那么$n$为奇数.

# 4.7.4 间接证明法-归谬法

- 困囚困境:

  冯梦龙《古今笑史·塞语部》: **徐孺子**,南昌人,11岁与太原**郭林宗**游,稚与之还家.林宗庭中有一树，欲伐去之,云: “为宅之法,正如方口,口中有木,困字不详” 余曰:“为宅之法,正如方口,口中有人,囚字何殊? ”郭无以难.

- 归谬证明法是另外一种常用的间接证明法.

- 【**归谬证明法**】为了证明$p$为真, 先假设$\neg p$为真. 证明对于某个命题$r$, $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$为真. 就能证明$p$为真.

- 备注:或称归谬法. 用到析取三段论:

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow (r \wedge \neg r) \\ \neg(r \wedge \neg r) \\ \hline \therefore p \end{array}$$

# 4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

- 【**条件语句的归谬证明**】：
  - 1、条件语句的反证改写为归谬证明：为证明$p \to q$（等价的逆否命题$\neg q \to \neg p$)为真. 证明时，先假定$p$和$\neg q$都为真，然后证明出$\neg p$也为真. 导出矛盾$p \land \neg p$.
  - 2、条件语句的直接证明改写为归谬证明：为了证明$p \to q$为真，先假定$p$和$\neg q$都为真，然后证明出$q$也为真. 这样导出矛盾$q \land \neg q$.

# 4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology，HUST

- 例:使用归谬证明法证明如果$3n + 2$是奇数, 则$n$是奇数.

# 4.7.4 间接证明法-归谬法证明p→q

- 例:使用归谬证明法证明如果$3n+2$是奇数, 则$n$是奇数.
- 解:
  - 假设$p$表示$3n+2$是奇数. $q$表示$n$是奇数. 用归谬证明需要假设$p$和$\neg q$都为真. 即$3n+2$是奇数, $n$是偶数.
  - 因为$n$是偶数，那么存在整数$k$，使得$n = 2k$．从而，$3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$. 根据偶数的定义, $3n+2$是偶数.
  - 因此$p$为真，$\neg p$也为真，导出矛盾$p \wedge \neg p$．从而得证如果$3n+2$是奇数，则$n$是奇数.

# 4.7.5 证明p→q

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 【**平凡证明**】如果已知$q$为真, 那么$p \rightarrow q$ 也为真.
- 例1: "如果下雨, 那么1=1."
- 例2: 设$P(n)$是"如果$a$和$b$是满足$a \geq b$的正整数, 则$a^n \geq b^n$", 其中论域是所有非负整数集合, 证明$P(0)$为真.
- 证明: 命题$P(0)$是"如果$a \geq b$, 则$a^0 \geq b^0$" 因为$a^0 = b^0$=1, 所以条件语句"如果$a \geq b$, 则$a^0 \geq b^0$"中结论为真. 综上, $P(0)$为真.

# 4.7.5 证明p→q

华中科技大学 计算机科学与技术学院 School of Computer Science &Technology, HUST

- 【**空证明**】如果已知$p$为假, 那么$p \to q$为真.
- 例1: “如果我既贫穷又富有, 那么2 + 2 = 5.”
- 例2: 证明命题$P(0)$为真，其中$P(\mathrm{n})$ 是“如果n>1，则$n^2 > \mathrm{n}$”论域是所有整数集合.
- 证明: 命题$P(0)$是"如果0>1，则$0^2 > 0$”，使用空证明来证$P(0)$为真, 前提0>1为假, 所以$P(0)$为真.

# 4.7.6 证明双条件命题的定理



- 【**等价证明法**】 为证明一个双条件命题的定理，即$p \leftrightarrow q$，需要同时证明$p \rightarrow q$和$q \rightarrow p$都为真.
- 扩展思考: 证明$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow p_3 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_n$，只需要证明$(p_1 \rightarrow p_2) \land (p_2 \rightarrow p_3) \land \ldots \land (p_n \rightarrow p_1)$为真.

# 4.7.6 证明双条件命题的定理

- 例:证明如果$n$是整数, 则$n$是奇数当且仅当$n^2$是奇数.
- 解:我们前面已经证明过$p \to q$以及$q \to p$. 因此得出结论$p \leftrightarrow q$.
  - 假设$n$是奇数. 那么存在整数$k$, $n = 2k + 1$.
  - 公式两边取平方可以得到$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1$, 其中$r$为整数, $r = 2k^2 + 2k$. 根据奇数的定义, $n^2$是奇数.
  - 因此, 我们证明$n$是奇数, 那么$n^2$也是奇数.

  - 假设$n$为偶数. 那么存在一个整数$k$，使得$n = 2k$. 公式两边取平方可得$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, 因此$n^2$为偶数.
  - 我们已经证明了$n$是偶数, 那么$n^2$也为偶数. 通过反证法, 对于整数$n$, 如果$n^2$为奇数, 那么$n$为奇数.

# 第4.7节 证明导论总结

- 常见条件语句p→q的证明方法:
- 1、直接证明法
- 2、间接证明法
  - 反证法
  - 归谬证明法