

# 第3章 高级计数

崔金华

邮箱: [jhcui@hust.edu.cn](mailto:jhcui@hust.edu.cn)

主页: <https://csjhcui.github.io/>

办公地址: 华中科技大学南一楼东406 室



致谢: 课件主要参考《Discrete Mathematics and its application》(Seventh Edition) Kenneth H. Rosen 和《离散数学》(第2版) 屈婉玲, 耿素云, 张立昂版本的相关课件, 特此致谢!!!

# Contents

---

## 提纲

4

### 递推关系

Recurrence Relations

5

### 求解线性递推关系

Solving Linear Recurrence Relations

6

### 分治算法和递推关系

Divide-and-Conquer Algorithms and Recurrence Relations

7

### 生成函数

Generating Functions

8

### 容斥及其应用

Inclusion-Exclusion and its Applications



# 第3.1节递推关系的应用

Section 3.1: Applications of Recurrence Relations

# 知识要点

1

斐波那契数

2

汉诺塔

3

位串计数

4

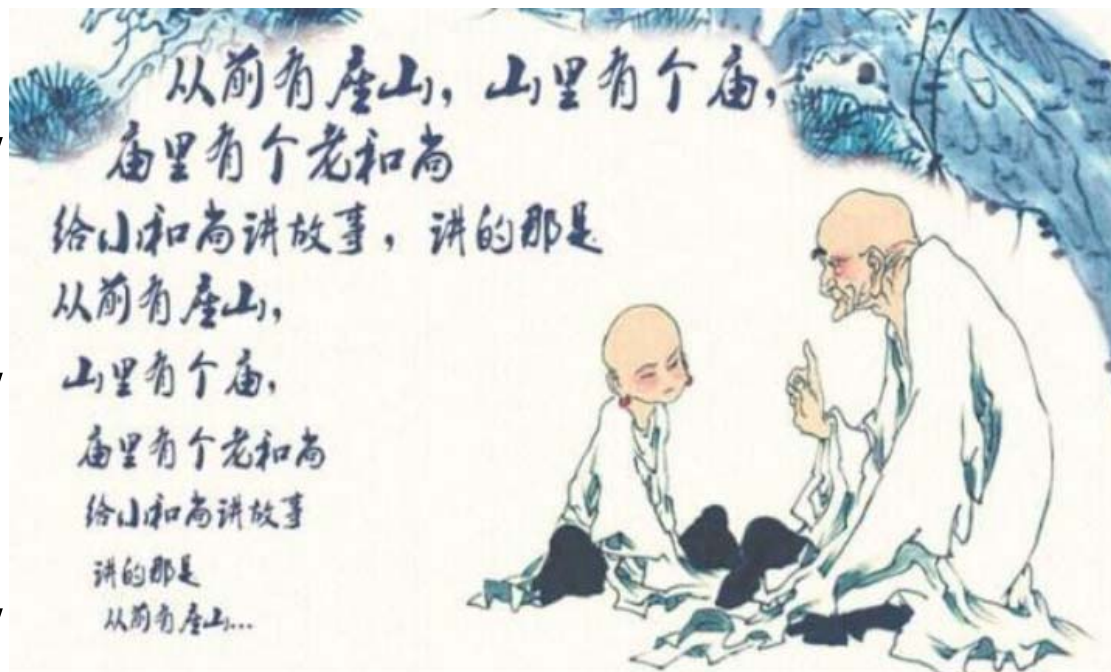
编码字的枚举

5

卡特兰数

# 递推关系

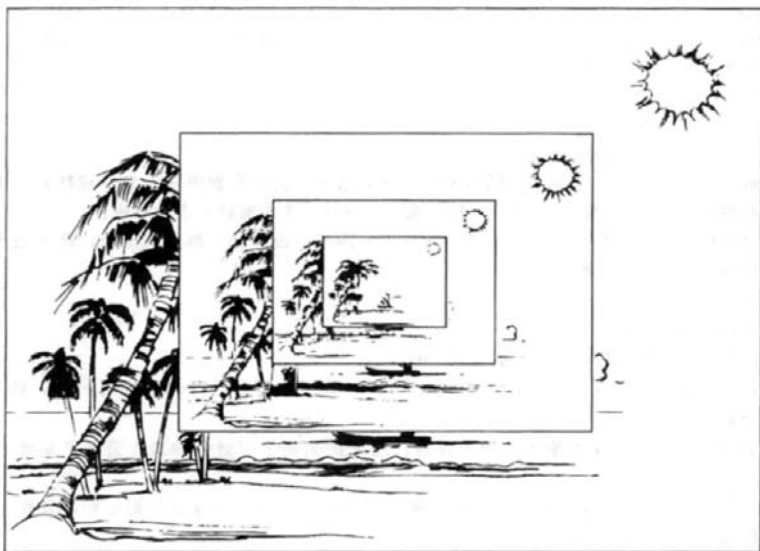
- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- 从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚，在给小和尚讲故事，讲的什么呢？
- .....



【基础知识：递推关系】

# 递推关系

- 有时候难以用明确的方式来定义一个对象. 但用这个对象来定义它自身也许是一件容易的事情.
- 例如, 从前有座山的故事. 再比如下图, 首先给出一幅原图, 然后实现再前面一幅图画的中央递归地放上更小的图画这样一个过程.



德罗斯特效应:  
一张照片的某一部分  
和整张照片相同, 其  
实只是一种递归的视  
觉形式



# 递推关系

- **递推关系**: 一个序列的递推定义指定了一个或多个初始的项以及一个由前项确定后项的规则. 这个从前项求后项的规则就称为递推关系. 如果一个序列的项满足递推关系, 则这个序列就叫做递推关系的解.
- **递归函数**, 递归定义以非负整数集合作为其定义域的函数, 包括两个步骤:
  - 基础步骤: 规定这个函数在0处的值;
  - 递归步骤: 给出从较小的整数处的值来求出当前的值得的规则.
- 例: 假定  $f$  是用  $f(0)=3$ ,  $f(n+1)=2f(n)+3$  来递归地定义的. 那么,  $f(1)=2f(0)+3=9$ ,  $f(2)=2f(1)+3=21$ ,  $f(3)=2f(2)+3=45$ , .....








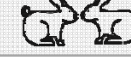












# 兔子和斐波拉契数

- 在很多应用题中, 我们可以通过使用递推关系构造各种问题的模型. 例如岛上的兔子问题, 汉诺塔的移动次数等等.
- 例: 一对刚出生的兔子(一公一母)放到一个无人岛上. 每对兔子出生两个月以后才开始繁殖后代, 每对兔子每个月繁殖一对兔子. 假设兔子不会死去,  $n$ 个月后该无人岛上的兔子将会有多少?
- 解:
  - 用  $f_n$  表示  $n$  个月后兔子的总数. 我们将证明  $f_n, n=1,2,3,\dots$  是 **斐波拉契序列** ( $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ) 的项. 如下图所示, 我们可以找出  $n$  个月后关于岛上的兔子的递推关系:



# 兔子和斐波拉契数

□解(续):

月	已有的至少两个月的兔子对数	已有的小于两月的兔子对数	当前月新生的兔子对数	现有兔子对数	新生兔子对数	总对数
1				1	0	1
2				1	0	1
3				1	1	2
4				2	1	3
5	 		 	3	2	5
6	  	 	  	5	3	8

现有兔子数=上个月的总兔子数      新生兔子数=上上个月的总兔子数

- 用递推关系建立兔子数量的模型. 在第一个月末 $f_1=1$ . 由于这对兔子在第二个月没有繁殖, 所以 $f_2=1$ . 为找到 $n$ 个月后兔子数, 要把前一个月的兔子数 $f_{n-1}$ 加上新生的数量, 而这个新生数量等于 $f_{n-2}$ .

# 兔子和斐波拉契数

---

□解(续):

- 因为每对两个月大的兔子都生一对兔子. 所以序列 $\{f_n\}$ 满足递推关系  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3$ , 和初始条件  $f_1 = 1, f_2 = 1$ . 由于这个递推关系和初始条件唯一的确定了该序列, 所以 $n$ 个月后兔子的总数由第 $n$ 个斐波那契数给出, 等于  $f_n$ .
- 例如,  $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8$