4.5.2 量词的顺序

- 例:
  - 1) $P(x,y)$表示“$x+y=y+x$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\forall y P(x,y)$, $\forall y\forall x P(x,y)$的真值.
  - 2) $Q(x,y)$表示“$x+y=0$” 论域U表示实数. 求解$\forall x\exists y Q(x,y)$, $\exists y\forall x Q(x,y)$的真值.

4.5.2 量词的顺序

- 例:
  - 1) $P(x,y)$表示"$x+y=y+x$" 论域U表示实数. 求解$\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall y\forall xP(x,y)$的真值.
  - 2) $Q(x,y)$表示"$x + y = 0$" 论域U表示实数. 求解$\forall x\exists yQ(x,y)$, $\exists y\forall xQ(x,y)$的真值.
- 解:
  - 1) $\forall x\forall yP(x,y)$和$\forall y\forall xP(x,y)$有相同的真值, 为真.
  - 2) $\forall x\exists yQ(x,y)$为真, 它表示对于每一个实数x都存在一个实数y使得$x+y=0$. 但$\exists y\forall xQ(x,y)$为假，它表示存在一个实数y，使得对每一个实数x都满足$x+y=0$. 但是实际上不管y取什么值，只存在一个x值能够满足$x+y=0$，所以$\exists y\forall xQ(x,y)$为假.

4.5.2 两个变量的量化式

- 总结以上规则为:

语句	何时为真?	何时为假?
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	对每一对x, y, $P(x,y)$均为真	存在一对x, y,使得$P(x,y)$为假
$\forall x \exists y P(x,y)$	对每一个x, 都存在一个y, 使得$P(x,y)$为真	存在一个x, 使得$P(x,y)$对每一个y总为假
$\exists x \forall y P(x,y)$	存在一个x, 使得$P(x,y)$对所有y总为真	对每一个x, 都存在一个y, 使得$P(x,y)$为假
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	存在一对x, y, 使得$P(x,y)$为真	对每一对x, y, $P(x,y)$均为假

4.5.3 嵌套量词到语句的翻译

- 例:翻译以下嵌套量词为自然语句: $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$, 其中$C(x)$表示“$x$有一台电脑”，$F(x,y)$表示“$x$和$y$是朋友”，论域$U$是学校全体学生的集合.
- 解: 学校的每个学生, 或者有一台电脑, 或有一个有一台电脑的朋友.

- 例:翻译以下嵌套量词为自然语句：$\exists x \forall y \forall z((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y,z))$
- 解: 有个学生, 他的朋友之间都不是朋友.

4.5.4 数学语句到谓词逻辑的翻译

- 例: 翻译以下语句成逻辑表达式“两个正整数的和总是正数”.
- 解:
  - 重写语句，让隐含的量词和论域更明显：“对每两个整数，如果它们都是正的，那么它们的和是正数.”
  - 引入变量x和y, 明确论域. “对所有的正整数x和y, $x+y$是正数.”
  - 因此,$\forall x\forall y((x>0)\land(y>0)\rightarrow (x+y>0))$, 其中两个变量的论域都是全体整数.

- 解2:
  - $\forall x\forall y(x+y>0)$, 其中两个变量的论域都是正整数.

4.5.5 自然语言到逻辑表达式的翻译

- 例：翻译以下语句为逻辑表达式“有一位女士搭乘过世界上每条航线上的一个航班”.
- 解:
  - $P(w,f)$表示“w乘坐过航班f”, 变量w的论域U是所有女性, 变量f的论域U是所有的空中航班
  - $Q(f,a)$表示“f是航线a上的一个航班”, 变量a的论域U是所有的航线
  - 因此, 语句可以翻译成：$\exists w \forall a \exists f(P(w,f) \land Q(f,a))$
- 解2:
  - $R(w,f,a)$表示“w乘坐航线a上的航班f”
  - 因此, 语句可以翻译成: $\exists w \forall a \exists f P(w,f,a)$

4.5.5 自然语言到逻辑表达式的翻译

- 在自然语言翻译时选择明显的谓词表达.
- 例1: “兄弟是兄弟姐妹”
- 解: $\forall x \forall y (B(x,y) \rightarrow S(x,y))$
- 例2: “兄弟会是对称的”
- 解: $\forall x \forall y (B(x,y) \rightarrow B(y,x))$
- 例3: “每个人都爱一个人”
- 解: $\forall x \exists y L(x,y)$
- 例4: “有人被大家所爱”
- 解: $\exists y \forall x L(x,y)$
- 例5: “有人爱一个人”
- 解: $\exists x \exists y L(x,y)$
- 例6: “每个人都爱自己”
- 解: $\forall x L(x,x)$

备注:这儿是简写,省略了域以及命题函数表达的含义

4.5.6 嵌套量词的否定

- 带嵌套量词语句的否定，可以通过连续地应用单个量词语句的否定规则得到.

- 例：量词表达语句“没有一个女士已搭乘过世界上每一条航线上的航班”
- 解:
  - 回忆$\exists w \forall a \exists f(P(w,f) \land Q(f,a))$表达的是“有一位女士搭乘过世界上每个航线上的一个航班”, 因此:$\neg \exists w \forall a \exists f(P(w,f) \land Q(f,a))$
  - 连续应用德摩根律将否定移入连续的量词内:

备注: 前面例题已提及$P(w,f)$表示“w乘坐过航班f”, $Q(f,a)$表示“ f是航线a上的一个航班”
$\exists w \forall a \exists f(P(w,f) \land Q(f,a))$表达的是“有一位女士搭乘过世界上每个航线上的一个航班”

4.5.6 嵌套量词的否定

- $\neg\exists w \forall a \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$
- $\forall w \neg\forall a \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$ 德摩根律作用于∃
- $\forall w \exists a \neg\exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$ 德摩根律作用于∀
- $\forall w \exists a \forall f \neg(P(w,f) \wedge Q(f,a))$ 德摩根律作用于∃
- $\forall w \exists a \forall f (\neg P(w,f) \vee \neg\, Q(f,a))$ 德摩根律作用于∧
- 因此最后这个语句表示"对于每个女士, 存在一条航线, 使得对所有的航班, 这位女士要么没有搭乘过, 要么该航班不在这条航线上"

备注: 前面例题已提及$P(w,f)$表示"w乘坐过航班f", $Q(f,a)$表示" f是航线a上的一个航班"
$\exists w \forall a \exists f (P(w,f) \wedge Q(f,a))$表达的是"有一位女士搭乘过世界上每个航线上的一个航班"

4.5.7 关于量词的一些问题

- 思考一下我们能改变量词的顺序吗?

- 例:这是否是等价的? $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
- 解: 是的. 左右具有相同的真值, x和y的顺序无关紧要.

- 例:这是否是等价的? $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \forall x P(x, y)$
- 解: 不是. 对于P的一些命题函数, 左侧和右侧可以具有不同的真值. 对于$P(x, y)$, 尝试"$x + y = 0$", 其中U是实数. 选择x和y值的顺序很重要. 前者表示对每个实数x都存在一个实数y使得$x + y = 0$, 真值为真. 后者表示存在一个实数y使得对每个实数x都存在$x + y = 0$, 真值为假.

4.5.7 关于量词的一些问题

- 可以在逻辑连词上分发量词吗?

- 例:这是一个有效的等价吗? $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$
- 解:是的! 无论$P(x)$和$Q(x)$表示什么命题函数，左侧和右侧将始终具有相同的真值.

- 例:这是一个有效的等价吗? $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \equiv \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
- 解:不是! 左侧和右侧可以具有不同的真值. 对于$P(x)$选择“x是鱼”，对于$Q(x)$选择“x具有鳞片”，论域是所有动物. 然后左边是假的，因为有些鱼没有鳞片(比如鳗鱼). 但是右边是正确的，因为不是所有的动物都是鱼.

第4.6节 推理规则

Section 4.6: Rules of Inference

我们将学到的知识

- ❑命题逻辑的有效论证
- ❑命题逻辑的推理规则
- ❑使用推理规则建立论证
- ❑量化命题的推理规则

4.6.1 引言

- 再回顾苏格拉底的例子:
- 我们有两个前提:
  - “所有人都是凡人”
  - “苏格拉底是人”
- 我们得到结论:
  - “苏格拉底是凡人”
- 我们如何通过前提来得到结论呢

4.6.1 引言

- 我们可以将谓词逻辑中的前提(在行之上)和结论(在行之下)表示为一个参数:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(Man(x) \rightarrow Mortal(x)) \\ & Man(Socrates) \\ \hline \therefore & Mortal(Socrates) \end{array}$$

- 我们很快就会看到这是一个有效的**论证**.

4.6.1 有效论证

- 我们将展示如何在两个阶段构建有效的参数; 首先是命题逻辑, 然后是谓词逻辑. 推理规则是构造有效论证的基本构件.
  - 命题逻辑
    - 推理规则
  - 谓词逻辑
    - 命题逻辑的推理规则以及处理变量和量词的附加推理规则

4.6.2 命题逻辑中的论证

- 命题逻辑中的论证是一系列命题．除最终命题之外的所有命题都称为**前提**, 最后的陈述是**结论**.
- 一个论证是有效的, 如果所有的前提为真蕴含, 则结论为真.

- 论证形式是一连串涉及命题变元的复合命题．无论什么命题被代入其命题变元, 如果前提为真, 结论为真, 则该论证形式是有效的.

- 当$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$是永真式．带有前提$p_1, p_2, \ldots, p_n$，结论为$q$的论证形式就是有效的.

4.6.3 命题逻辑的推理规则1:假言推理

- 永真式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 称为**假言推理**

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow q \\
p \\
\hline
\therefore q
\end{array}
$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学” 和“正在下雪”为真，那么“我要学离散数学”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则2:取拒式

- $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ 称为**取拒式**(或称拒取式)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- 例:p表示"正在下雪" q表示"我要学离散数学" 假设条件语句"如果正在下雪, 我要学离散数学"和"我没有学习离散数学"为真, 那么"没有下雪"为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则3:假言三段论

- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$称为**假言三段论**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学” 和“如果我学习离散数学, 我会得到成绩A”为真, 那么“如果下雪, 我会得到成绩A”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则4:析取三段论

- $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ 称为**析取三段论**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- 例:p表示"我要学离散数学" q表示"我要学习英语" 假设条件语句"我要学习离散数学，或者我要学习英语"和"我不会学离散数学"为真，那么"我要学习英语"为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则5:附加律

- $p \to (p \lor q)$ 称为**附加律**

$$\frac{p}{\therefore p \lor q}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学”为真，那么“我要学习离散数学，或者我要学习英语”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则6:化简律

- $(p \wedge q) \rightarrow q$ 称为**化简律**

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

- 也可以是$(p \wedge q) \rightarrow p$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学和英语”为真, 那么“我要学习离散数学”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则7:合取律

- $((p) \land (q)) \to (p \land q)$ 称为**合取律**(或称合取引入规则)

$$
\begin{array}{l}
p \\
q \\
\hline
\therefore p \land q
\end{array}
$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学”和“我要学英语”为真，那么“我要学习离散数学和英语”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则8:消解律

- $((\neg p \vee r) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (q \vee r)$称为**消解律**.
- 在AI中有重要的作用, 被广泛使用在Prolog语言中. $q \vee r$称为消解式

$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ p \vee q \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” r表示“我要学习数据库”假设语句“我不会学习离散数学, 或者我要学习英语”和“我要学离散数学, 或者我要学习数据库”为真, 那么“我要学习英语, 或者我要学习数据库”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则9:构造性二难推理

- $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \rightarrow (q \vee s)$称为**构造性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” s表示“我会看一场电影”．假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学”，“如果我得到成绩A，我会看一场电影”，和“天正在下雪，或者我得到成绩A”都为真，那么“我学习离散数学，或者我看一场电影”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则10:破坏性二难推理

- $((p \to q) \land (r \to s) \land (\neg q \lor \neg s)) \to (\neg p \lor \neg r)$称为**破坏性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ \neg q \lor \neg s \\ \hline \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” s表示“我会看一场电影”. 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学”，“如果我得到成绩A，我会看一场电影”, 和“我没有学习离散数学, 或者没有看电影”都为真, 那么“天没有下雪, 或者我没有得到成绩A”为真.

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 多个前提时，通常需要用到多个前面提及的推理规则来证明一个论证是有效的.
- 使用推理规则建立论证，其中前提为$A_1, A_2, \cdots, A_k$，结论为B. 常用的构造证明的方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)**

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:从命题$p \wedge (p \to q)$, 证明q是一个结论.

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:从命题$p\wedge(p \rightarrow q)$, 证明q是一个结论.
- 解:

步骤	理由
1. $p\wedge(p \rightarrow q)$	前提引入
2. p	化简律, 用1
3. $p \rightarrow q$	化简律, 用1
4. q	假言推理, 用2和3

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:根据以下前提(前四行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第五行):
  - “今天下午不是晴天, 比昨天还要冷.”
  - “只有天气晴朗, 我们才会去游泳.”
  - “如果我们不去游泳, 那么我们将乘独木舟旅行.”
  - “如果我们乘独木舟旅行, 那么我们将在日落之前到家.”
  - “我们将在日落之前回家.”

【基础知识：只有才, 后推前】

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:根据以下前提(前四行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第五行):
  - "今天下午不是晴天, 比昨天还要冷."
  - "只有天气晴朗, 我们才会去游泳."
  - "如果我们不去游泳, 那么我们将乘独木舟旅行."
  - "如果我们乘独木舟旅行, 那么我们将在日落之前到家."
  - "我们将在日落之前回家."
- 解:
  - 定义命题变元. p: "今天下午天气晴朗" r: "我们会去游泳" t: "我们将在日落之前回家" q: "今天比昨天更冷" s: "我们将乘独木舟旅行"
  - 翻译以上语句前提为: $\neg p \land q,\ r \rightarrow p,\ \neg r \rightarrow s,\ s \rightarrow t$, 结论为$t$.
  - 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 如下所示:

4.6.4 使用推理规则建立论证

已知$\neg p \wedge q, r \to p, \neg r \to s, s \to t$,结论为$t$

- 解(续):

步骤	理由
1.$\neg p \wedge q$	前提引入
2.$\neg p$	化简律, 用1
3.$r \to p$	前提引入
4.$\neg r$	拒取, 用2和3
5.$\neg r \to s$	前提引入
6.s	假言推理, 用4和5
7.$s \to t$	前提引入
8. t	假言推理, 用6和7