

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

T F

1 0

第4.5节 嵌套量词

Section 4.5: Nested Quantifiers

我们将学到的知识

- 嵌套量词
- 量词的顺序
- 数学语句到嵌套量词的翻译
- 嵌套量词到自然语句的翻译
- 汉语语句到逻辑表达式的翻译
- 嵌套量词的否定

4.5.1 嵌套量词

- 在语句中嵌套量词很常见, 在计算机科学和数学领域也很重要.
- 例: “每一个实数 x , 都有一个实数 y , 使得 $x + y = 0$ ”可表示为 $\forall x \exists y (x + y = 0)$, 其中 x 和 y 的论域都是实数.
- 常见的四种嵌套量词:
 - 1) $\forall x \forall y P(x, y)$
 - 2) $\forall x \exists y P(x, y)$
 - 3) $\exists x \forall y P(x, y)$
 - 4) $\exists x \exists y P(x, y)$

4.5.1 嵌套量词

□ 为了确定 $\forall x \forall y P(x, y)$ 是否为真, 循环查找 x 的所有值

- 在每个循环步骤中, 循环查找 y 的值
- 对于某些 x 和 y , $P(x, y)$ 为假, 那么 $\forall x \forall y P(x, y)$ 为假, 全部终止
- $\forall x \forall y P(x, y)$ 为真, 只有当外层循环执行查找完所有的 x 值

□ 为了确定 $\forall x \exists y P(x, y)$ 是否为真, 循环查找 x 的所有值

- 在每个循环步骤中, 循环查找 y 的值
- 当找到一对 x 和 y 让 $P(x, y)$ 为真, 那么内层循环结束
- 如果没有找到 y 能让 $P(x, y)$ 为真, 那么 $\forall x \exists y P(x, y)$ 为假
- $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真, 只有当外层循环执行查找完所有的 x 值

4.5.1 嵌套量词

- 为了确定 $\exists x \forall y P(x, y)$ 是否为真, 循环查找 x 的所有值
 - 在每个循环步骤中, 循环查找 y 的值
 - 对于某个 x , 对所有 y 的值, $P(x, y)$ 为真, 那么 $\exists x \forall y P(x, y)$ 为真, 全部终止
 - 如果循环执行完也总碰不到这样的 x 值, $\exists x \forall y P(x, y)$ 为假

- 为了确定 $\exists x \exists y P(x, y)$ 是否为真, 循环查找 x 的所有值
 - 在每个循环步骤中, 循环查找 y 的值
 - 当找到一对 x 和 y 让 $P(x, y)$ 为真, $\exists x \exists y P(x, y)$ 为真, 终止.
 - 那么循环结束也碰不到这样的值, $\exists x \exists y P(x, y)$ 为假

- 如果变量的论域是无限的, 那么这个过程不能真正执行.

4.5.2 量词的顺序

□例：论域 U 为实数， $P(x, y)$ 表示“ $x \cdot y = 0$ ”求 $\forall x \forall y P(x, y)$ ， $\forall x \exists y P(x, y)$ ， $\exists x \forall y P(x, y)$ ， $\exists x \exists y P(x, y)$ 的真值。

□解：

- $\forall x \forall y P(x, y)$ 为假
- $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真
- $\exists x \forall y P(x, y)$ 为真
- $\exists x \exists y P(x, y)$ 为真

4.5.2 量词的顺序

□例:论域 U 为不为0的实数, $P(x, y)$ 表示“ $x/y = 1$ ” 求 $\forall x \forall y P(x, y)$, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y)$ 的真值.

□解:

- $\forall x \forall y P(x, y)$ 为假
- $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真
- $\exists x \forall y P(x, y)$ 为假
- $\exists x \exists y P(x, y)$ 为真