第2.6节 生成排列和组合

Section 2.6: Generating Permutations and Combinations

知识要点

1 生成排列

2 生成组合

生成排列

- 我们主要研究的是具有数字的集合.
- **两个n位数排列的先后顺序比较**: n个元素集合的所有排列按照如下顺序，生成n个最小正整数的排列；然后用对应的元素替换这些整数. 我们以{1,2,3,4,…,n}的排列集合上的字典顺序为基础. 因此，排列$a_1a_2\ldots a_n$在$b_1b_2\ldots b_n$的生成排列的前面，当$1\le k\le n$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …, $a_{k-1}=b_{k-1}$,并且$a_k<b_k$.
- 备注: 两个排列都有n位数.

- 例:集合{1,2,3}的两个排列123,132哪个在前面?
- 解:这两个排列第一位相同,123的第二位的数字是2，小于132的第二位数字3，所以123在132的前面.

生成排列

- **给定一个排列$a_1a_2\ldots a_n$，按照字典顺序构造下一个排列**:
- 当$a_{n-1} < a_n$ 时，交换a_{n-1}和a_n位置，就得到下一个更大的排列;
- 当$a_{n-1} > a_n$ 时，那么看排列的最后3个整数.
  - 如果$a_{n-2} < a_{n-1}$，将这三个数重新排列.将
    - $a_{n-2} < a_n$，先把a_n放在位置n-2，然后剩下两个数按递增顺序放在n-1和n位置.
    - $a_{n-2} > a_n$，先把a_{n-1}放在位置n-2，然后剩下两个数按递增顺序放在n-1和n位置.
  - 如果$a_{n-2} > a_{n-1}$，那么需要查看最后四个数重新排列，方法类似上面.....

- 例 :234156的下一个排列是234165，234165的下一个排列是234516，234561的下一个排列是234615，362541的下一个排列是364125.

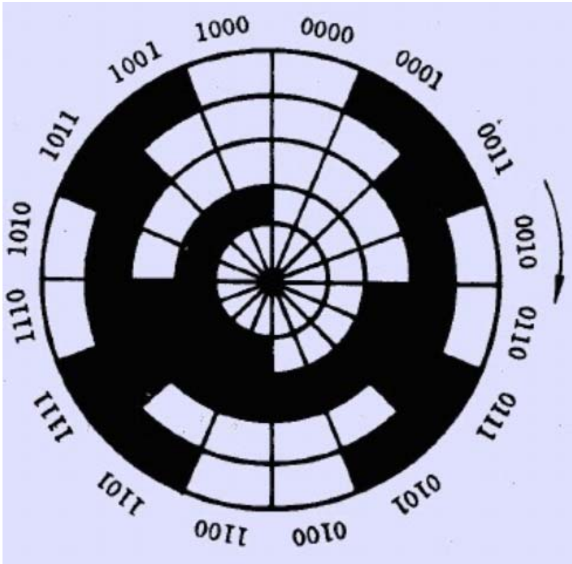
生成排列

- **按照字典顺序生成1,2,3,...,n的n!个排列**: 由最小的排列(123...n) 开始, 连续使用n!-1次生成下一个最大排列, 就能得到所有的排列.

- 例:按照字典顺序生成整数1,2,3的排列.
- 解:第一个排列是123, 下一个为132, 然后213, 接着231, 再然后312, 最后321. 所以按照字典顺序生成的排列是123, 132, 213, 231, 312, 321.

生成组合

- 一个组合就是一个子集. 我们利用$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$和$n$位的位串之间的对应关系.



- 如果a_k在子集中，那么对应的位串在位置k上为1；如果a_k不在子集中，那么对应的位串在位置k上为0.

生成组合

- **找下一个组合**：在每一步找下一个最大的二进制展开式时，先确定从右边开始第一个不是1的位置，然后把这个位置右边的所有1变为0，并且将这第一个0(从右边数)变为1.

- 例:找出1000100111的下一个最大的位串.
- 解:下一个为1000101000

生成组合

- **生成集合{1,2,3,…,n}的r组合**. 在字典排序下$a_1a_2…a_r$后面的下一个r组合的生成方法:
  - 首先, 从序列中找到$a_i \neq n - r + i$的最后元素a_i, 用a_i+1代替a_i;
  - 然后, 对应j=i+1,i+2, …,r, 用a_i+j-i来代替a_j.
  - 综上, 下一个r组合为a_1, a_2,…, $\boldsymbol{a_i}(\boldsymbol{a_i} = a_i + 1)$, $\boldsymbol{a_i} + 1, \boldsymbol{a_i} + 2$, …

【备注: 书上有误. 课后自行验证以上方法】

- 例:找出集合{1,2,3,4,5,6}在{1,2,5,6}的下一个最大4组合.
- 解:a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=6. n=6, r=4. 从这个组合的最右边开始找到的第一个$a_i \neq n - r + i$. 其中a_4=6=6-4+4, a_3=5=6-4+3, 但a_2=2≠6-4+2. 所以新的4组合中a_2=a_2+1=3, 然后a_3=a_2+3-2=4, a_4=a_2+4-2=5. 因此下一个最大4组合为{1,3,4,5}.

本章总结

- **乘积法则**:一个过程由两个子任务构成，那么完成这个过程的方式数是完成第一个任务的方式数和完成第一个任务后再做第二个任务的方式数之积.
- **求和法则**:如果两个任务不能同时做，那么用这种或者那种方式完成任务的总方式数是完成这两种任务的方式之和.
- **减法法则**:一个任务可以通过n_1种或者n_2种两类方式完成，完成这个任务的方式数是$n_1 + n_2$再减去两类方式中相同的方式.
- **除法法则**:如果一个任务能由一个可以用n种方式完成的过程实现,对于每种完成任务的方式w，在n种方式中正好d种与之对应，那么完成这个任务的方法数为n/d.

本章总结

- **鸽巢原理**：比k多的物体放入k个盒子，一定存在一个盒子包含了至少2个物体.
- **广义鸽巢原理**：N个物体放入k个盒子，一定存在一个盒子包含了至少$\lceil N/k \rceil$ 个物体.
- ***r*-排列**:$P(n,r) = n!/(n-r)!$
- ***r*-组合**:$C(n,r) = n!/\left(r!\,(n-r)!\right)$
- **二项式定理**：

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}y^j = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

本章总结

- **允许重复的排列**：一个具有n元素集合有n^r排列.
- **允许重复的组合**：一个具有n元素集合有$c(n+r-1,r)$个r组合.