华中科技大学计算机与科学技术学院 2024~2025 第一学期

“离散数学（二）”期中考试试卷

考试方式 闭卷 考试日期 2024-10-16 考试时长 50 分钟

专业班级 _____ 学 号 _____ 姓 名 _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分	总分人	核对人
分值	20	10	10	20	10	10	20	100		
得分										

解答内容不得超过装订线

1. 分别计算 $3^{963} \mod 35$ 以及 $17! \mod 19$ 的值。（20 分）

参考答案：

因为 gcd(3,35)=1，且 φ(35)=24，则 $3^{963} \mod 35=3^3 \mod 35=27$；

因为 19 为质数，先计算 18 mod 19 的逆元为-1，再在 18! (mod 19)=-1 (mod 19)两端同时乘上 18 mod 19 的逆元，即-1，可得 17! (mod 19)=1 (mod 19)

2. 求线性同余式 $35x \equiv 10 \mod 50$ 的所有解。（10 分）

参考答案：

化简上述同余式得 $7x \equiv 2 \mod 10$，再求 7 mod 10 的逆元为 3，因此 $x \equiv 6 \mod 10$，即 x=6+10k，这里 k 是任意整数，即 x=6,16,26,36,…,-4,-14,-24,…

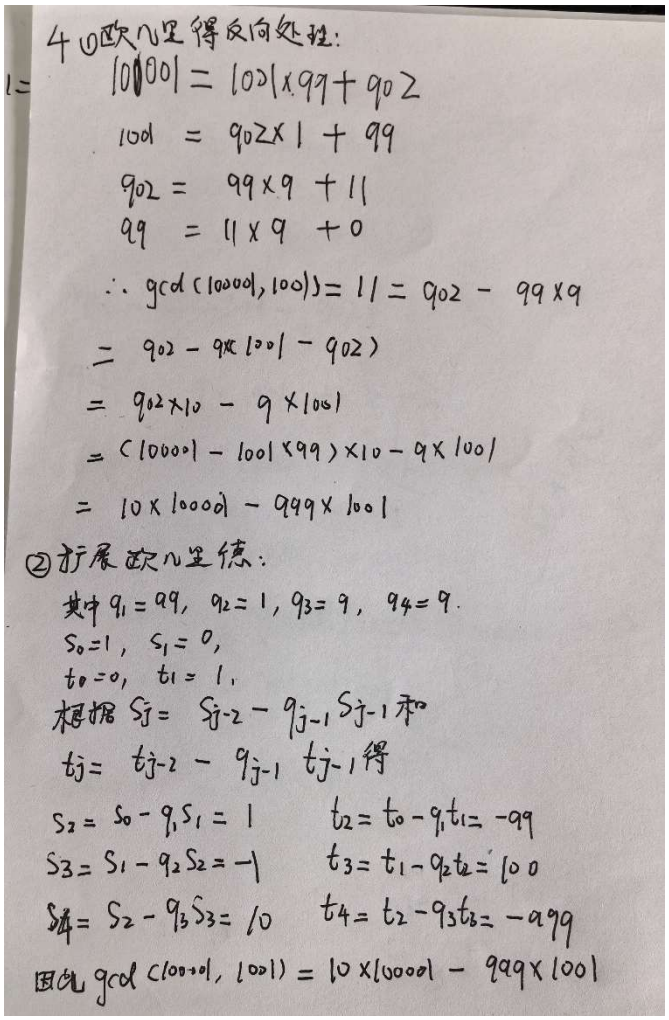
3. 将整数 5 允许重复地**有序**拆分成三个非负整数的方案有几个？要求写出具体求解过程。（10 分）

参考答案：

求 x1+x2+x3=5，其中 x1,x2 和 x3 均为非负整数的解个数，允许重复的组合，即 C(3+5-1,2)=C(7,2)=21 个方案。

4. 分别使用欧几里得算法反向处理，以及扩展欧几里得算法把 gcd(100001, 1001) 表示成 100001 和 1001 的线性组合。 **(20 分)**

参考答案：



5. 美国邮政服务局(USPS)出售的汇票由 11 位数字 x1,x2,…,x11 标识。前十位数字标识汇票，x11 是校验数位，满足 x11=x1+x2+…+x10 mod 9。针对以下以这十位数字开头的数，查找 USPS 汇票的校验码。(1)

7555618873。（2）3289744134。（10 分）

参考答案:

（1）（7+5+5+5+6+1+8++8+7+3）mod 9=1

（2） 0

6. 证明：当 p 是质数且 e 是正整数时，欧拉函数 φ(p^e)=p^{e-1}(p-1)，这里欧拉函数 φ(n)表示小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的个数。（10 分）

参考答案：

与 p^e 不互质的数有 p,2p,3p,4p,…p^e ，这里最后一个数 p^e 可以表示成 p^{e-1}*p，所以共有 p^{e-1} 个数与 p^e 不互质；此外小于或等于 p^e 的正整数有 p^e 个，因此 φ(p^e)= p^e - p^{e-1}= p^{e-1}(p-1)，举例而言，φ(8)= φ(2^3)=4*1=4，即 1,3,5,7 四个数。

7. RSA 密码系统，N=55，k=13，t=54。(1) k作为私钥，求明文t对应的密文。（2）k作为公钥，求密文t对应的明文。（20 分）

参考答案：

(1) $N = 55 = 5 * 11$. 因此$(p-1)(q-1)$=40. $13 * e \equiv 1(mod\ 40)$, 那么e=37. 要加密，$C = 54^{37}\ mod\ 55$. 计算可得$C = 54$.

(2)$N = 55 = 5 * 11$. 因此$(p-1)(q-1)$=40. 13 模$(p-1)(q-1)$的逆为d. 即$d * 13 \equiv 1(mod\ 40)$, 可以得d=37. 要解密，$M = 54^{37}\ mod\ 55$. 计算可得$M = 54$.

解答内容不得超过装订线