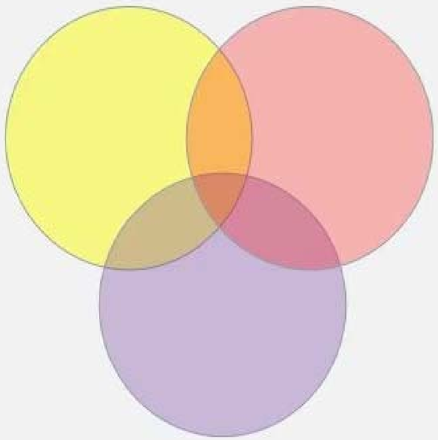


# 第3.6节 容斥原理的应用

Section 3.6: Applications of Inclusion-Exclusion

# 知识要点

1 映上函数的个数

2 错位排序

# 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 常用于求解在一个集合中的元素数，使得这些元素不具有$n$个性质$P_1$, $P_2$, $P_3$， …, $P_n$中的任何一条性质.

- 设$A_i$是具有性质$P_i$的元素的子集. 具有所有这些性质$P_1, P_2, \ldots, P_k$的元素数记为$\boldsymbol{N(P_1P_2\ldots P_k)}$. 用集合的术语写:

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = N(P_1P_2 \ldots P_k)$$

- 如果不具有$n$个性质$P_1, P_2, \ldots, P_n$中的任何一个元素数记为$\boldsymbol{N(P_1{}'P_2{}'\ldots P_n{}')}$，集合中的元素数为$N$, 那么有

$$N(P_1{}'P_2{}'\ldots P_n{}') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

# 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 根据容斥原理，

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$= N - \sum_{1\le i\le n} N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_iP_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_iP_jP_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$$

# 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 例:$x_1+x_2+x_3=11$有多少个整数解？其中$x_1$，$x_2$，$x_3$为非负整数，且$x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6.$

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n')=N-|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$
$$=N-\sum_{1\leq i\leq n} N(P_i)+\sum_{1\leq i<j\leq n} N(P_iP_j)-\sum_{1\leq i<j<k\leq n} N(P_iP_jP_k)+\ldots+(-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$$

# 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 例:$x_1+x_2+x_3=11$有多少个整数解？其中$x_1$，$x_2$，$x_3$为非负整数，且$x_1 \le 4, x_2 \le 4, x_3 \le 6$.
- 解(方法1):
  - 用生成函数来求解具有以上限制的解的个数是$(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$中展开式$x^{11}$的系数.
  - 这是因为我们在乘积中得到等于$x^{11}$的项是通过在第一个和中取项$x^{e_1}$，在第二个和中取项$x^{e_2}$, 在第三个和中取项$x^{e_3}$, 其中幂指数$e_1$, $e_2$, $e_3$满足$e_1+e_2+e_3=11$和给出的限制.
  - 它等于$\frac{(1-x^5)}{(1-x)}\frac{(1-x^5)}{(1-x)}\frac{(1-x^7)}{(1-x)}=\frac{-x^{17}+2x^{12}+x^{10}-x^7-2x^5+1}{(1-x)^3}$. 其中$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}c(2+k,k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}c(2+k,2)x^k$.
  - 综上所述，$x^k$中$k$值分别取无,无,1,4,6,11，因此最终结果等于$C$(3,2)-$C$(6,2)-$2*C$(8,2)+$C$(13,2)=3-15+2*28+78=10.

$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$

$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k$
$=1+C(n,1)x+$
$C(n+1,2)x^2+\cdots$

# 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 例:$x_1+x_2+x_3=11$有多少个整数解？其中$x_1$，$x_2$，$x_3$为非负整数，且$x_1 \le 4, x_2 \le 4,\ x_3 \le 6.$
- 解(方法2):为了使用容斥原理，令$P_1$为$x_1>4, P_2$为$x_2>4$，$P_3$为$x_3>6$. 那么整数解的个数为 $N(P_1'P_2'P_3')=N-N(P_1)-N(P_2)-N(P_3)+N(P_1P_2)+N(P_1P_3)+N(P_2P_3)-N(P_1P_2P_3)$

  以上公式中，$N$=解的个数=3元素集合的可重复的11组合=$C$(3+11-1,11)=78

  $N(P_1)$=（具有$x_1 \ge 5$解的个数）=$C$(3+6-1,6)=28

  $N(P_2)$=（具有$x_2 \ge 5$解的个数）=$C$(3+6-1,6)=28

  $N(P_3)$=（具有$x_3 \ge 7$解的个数）=$C$(3+4-1,4)=15

## 3.6.1 容斥原理的另一种形式

- 解(续):

$N(P_1P_2)$=（具有 $x_1 \geq 5, x_2 \geq 5$解的个数）=$C(3+1-1,1)=3$

$N(P_1P_3)$=（具有 $x_1 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

$N(P_2P_3)$=（具有$x_2 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

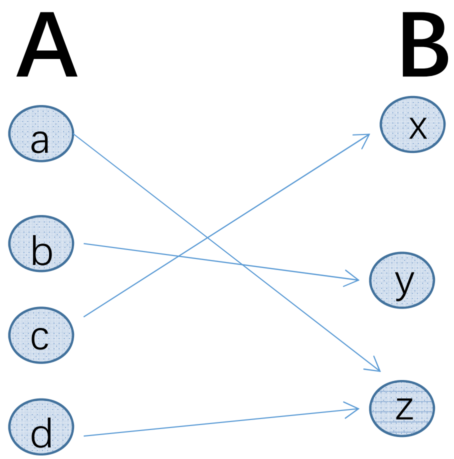
$N(P_1P_2P_3)$=（具有 $x_1 \geq 5$，$x_2 \geq 5$，$x_3 \geq 7$解的个数）=0

因此, $N(P_1'P_2'P_3')=78-28-28-15+3+0+0-0=10$

$N(P_1'P_2'...P_n')=N-|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$
$=N-\sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i)+$
$\sum_{1 \leq i<j \leq n} N(P_iP_j)-\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} N(P_iP_jP_k)+...+(-1)^n N(P_1P_2...P_n)$

# 3.6.2 映上函数的个数

- 映上函数(或满射)的回顾:
- 定义：一个从$A$到$B$的函数$f$称为映上函数，当且仅当对于每个$b \in B$，有元素$a \in A$使得$f(a) = b$




一个映上函数的示例

# 3.6.2 映上函数的个数

- 我们可以用容斥原理确定从$m$元素到$n$元素集合的映上函数的个数.

- 例:从6元素到3元素集合有多少个映上函数?

$$N(P_1'P_2'\ldots P_n')=N-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$$
$$=N-\sum_{1\le i\le n}N(P_i)+\sum_{1\le i<j\le n}N(P_iP_j)-\sum_{1\le i<j<k\le n}N(P_iP_jP_k)+\ldots+(-1)^nN(P_1P_2\ldots P_n)$$

# 3.6.2 映上函数的个数

- 我们可以用容斥原理确定从$m$元素到$n$元素集合的映上函数的个数.

- 例:从6元素到3元素集合有多少个映上函数?
- 解:
  - 假定在陪域中的元素是$b_1$, $b_2$, $b_3$. 设$P_1, P_2, P_3$分别表示$b_1$, $b_2$, $b_3$不在函数值域中的性质.
  - 一个函数是映上的，当且仅当它没有性质$P_1, P_2, P_3$. 那么,$N(P_1' P_2' P_3')=N-[N(P_1)+N(P_2)+N(P_3)]+[N(P_1P_2)+N(P_1P_3)+N(P_2P_3)]-N(P_1P_2P_3)$，其中$N$表示从6元素到3元素集合的函数总数.

# 3.6.2 映上函数的个数

- 解(续):
  - $N=3^6$, 对于定义域中的每个元素的函数值有3种选择.
  - 注意$N(P_i)$是值域中不含$b_i$的函数的个数，所以对于定义域中的每个元素的函数值有2种选择, 因此$N(P_i)\ =2^6$, 此外这种项有$C$(3,1)个.
  - 注意$N(P_iP_j)$是值域中不含$b_i$和$b_j$的函数的个数，所以对于定义域中的每个元素的函数值有1中选择, 因此$N(P_iP_j)\ =1^6$, 此外这种项有$C$(3,2)个.
  - 注意$N(P_1P_2P_3)=$ 0, 因为这个项是值域中不含$b_1$, $b_2$, $b_3$的函数的个数. 显然没有这样的函数.
  - 于是$N(P_1'P_2'P_3')=3^6 - C(3,1)\cdot 2^6 + C(3,2)\cdot 1^6 -0 = 540$.

## 3.6.2 映上函数的个数

- 定理:设$m$和$n$是正整数, 满足$m \geq n$. 那么存在

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m$$

个从$m$元素集合到$n$元素集合的映上函数.

## 3.6.2 映上函数的个数

- 例:把5项工作分给4个不同的雇员，如果每个雇员至少分配1项工作，1项工作分配给某个雇员, 问有多少种方式?

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m$$

## 3.6.2 映上函数的个数

- 例:把5项工作分给4个不同的雇员，如果每个雇员至少分配1项工作，1项工作分配给某个雇员, 问有多少种方式?
- 解:把工作分配看做是从5个工作集合到4个雇员集合的函数. 每个雇员至少得到1项工作的分配对应于从工作到雇员集合的映上函数. 因此, 存在$4^5 - C(4,1) \times 3^5 + C(4,2) \times 2^5 - C(4,3) \times 1^5 = 240$种方式来分配工作并使得每个雇员至少得到1项工作.

# 3.6.2 映上函数的个数

- 例:计算机CS2207班上有8位同学参加体能考核，已知考核出了3种结果(优, 及格, 不及格). 试问有多少种可能的结果搭配组合?

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m$$

## 3.6.2 映上函数的个数

- 例:计算机CS2207班上有8位同学参加体能考核，已知考核出了3种结果(优, 及格, 不及格). 试问有多少种可能的结果搭配组合?
- 解:

  根据题意，为8个元素到3个元素的映上函数: $3^8 - C(3,1) \times 2^8 + C(3,2) \times 1^8 = 5796$. 所以总的不同搭配组合方法数为5796.

## 3.6.2 映上函数的个数

- 例:已知8人(分别设为A,B,C,D,E,F,G,H)参加体能考核，考核结果已知有3种结果(优，及格，不及格). 而且知道A的考核结果是优. 试问有多少种可能的结果搭配组合?

# 3.6.2 映上函数的个数

- 例:已知8人(分别设为A,B,C,D,E,F,G,H)参加体能考核，考核结果已知有3种结果(优，及格，不及格)．而且知道A的考核结果是优．试问有多少种可能的结果搭配组合?
- 解:

  根据题意，除A以外的其他7个人，要么考核为3种结果(优，及格，不及格); 要么为2种结果(及格, 不及格):

  - 前一种为7个元素对3个元素的映上函数个数:$3^7-C(3,1)\times 2^7+C(3,2)\times 1^7$=1806
  - 后一种为7个元素对2个元素的映上函数个数: $2^7-C(2,1)\times 1^7$=126

  所以总的不同搭配组合方法数为1806+126=1932

# 3.6.2 映上函数的个数

- 例:首位非零且四个数字0, 1, 2, 3都出现的7位4进制数有多少个?

## 3.6.2 映上函数的个数

- 例:首位非零且四个数字0, 1, 2, 3都出现的7位4进制数有多少个?
- 解:

根据题意,{不加任何限制(0可以出现在首位)}减去{0出现在首位}的结果则为所求的方法数:

- 前一种为7个元素对4个元素的映上函数个数:$4^7-C(4,1)\times 3^7+C(4,2)\times 2^7-C(4,3)\times 1^7$=8400
- 后一种又可以进一步分为两种情况之和:
  - 1) 0出现在剩下的6位中,也就是为6个元素对4个元素的映上函数个数: $4^6-C(4,1)\times 3^6+C(4,2)\times 2^6-C(4,3)\times 1^6$=1560
  - 2) 0不出现在剩下的6位中, 也就是为6个元素对3个元素的映上函数个数: $3^6-C(3,1)\times 2^6+C(3,2)\times 1^6$=540

所以总的方法数=8400-1560-540=6300

## 3.6.3 错位排序

- 定义:**错位排序**是指排列$n$个物体，并使得没有一个物体在它的初始位置上
- 例:排列21453是否是12345的错位排序？21543是否是12345的错位排序?
- 解:
  - 排列21453是12345的错位排序, 因为没有任何一个数字在它原来的位置上.
  - 但是21543不是12345的错位排序, 因为数字4还留在它原来的位置上.

## 3.6.3 错位排序

- $D_n$表示$n$个物体的错位排列数. 比如$D_3=2$. 因为123的错位排列有231和312两种.
- 定理:$n$元素集合的错位排列数是

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

# 3.6.3 错位排序

- 证明$n$元素集合的错位排列数是$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$
- 证明:
  - 如果排列保持元素$i$不变，就设这个排列具有性质$P_i$. 那么, 错位排列数就是对于$i=1,2,\ldots, n$,没有性质$P_i$的排列数, 记为

$$D_n = N(P_1{}'P_2{}' \ldots P_n{}') = N - \sum_{1\le i\le n} N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_iP_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_iP_jP_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$$

  - 在上述公式中$N$表示$n$个元素的排列数$= n!$
  - 根据乘积法则, $N(P_i)=(n-1)!$
  - 类似地, $N(P_iP_j)=(n-2)!$
  - 一般化来说$N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_m})=(n-m)!$，相当于在排列中保持元素$i_1$，$i_2$，…，$i_m$这$m$个元素不变的排列数，那么排列中的其他$n-m$个元素的位置可以任意安排.

# 3.6.3 错位排序

- 证明(续):
  - 由于存在$C(n, m)$中方式从$n$个元素中选择$m$个元素保持这$m$个元素不变，那么有 $\sum_{1\le i\le n} N(P_i) = C(n,1)(n-1)!$
  - $\sum_{1\le i<j\le n} N(P_iP_j) = C(n,2)(n-2)!$
  - …
  - $\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n} N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_m}) = C(n, m)(n-m)!$
  - 所以，把以上等式带入 $D_n = N(P_1{'}P_2{'}\ldots P_n{'}) = N - \sum_{1\le i\le n} N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_iP_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_iP_jP_k) + \ldots + (-1)^n N(P_1P_2\ldots P_n)$

$$= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \ldots + (-1)^n C(n, n)(n-n)!$$

$$= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

# 3.6.3 错位排序

- 例(帽子认领问题):在一个餐厅里，一个新的雇员寄存$n$个人的帽子时忘记把寄存号放在帽子里. 当顾客取回他们的帽子时，这个雇员随机从剩下的帽子中选择发给顾客. 那么没有一个人收到自己帽子的概率是多少?

# 3.6.3 错位排序

- 例(帽子认领问题):在一个餐厅里，一个新的雇员寄存$n$个人的帽子时忘记把寄存号放在帽子里. 当顾客取回他们的帽子时，这个雇员随机从剩下的帽子中选择发给顾客. 那么没有一个人收到自己帽子的概率是多少?
- 解:答案就是重新排列帽子使得没有帽子在它的初始位置的方式数除以$n$个帽子的排列数$n!$, 根据定理可得

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

例如对于$2 \le n \le 7$, 该概率值如下表所示:

**TABLE 1** The Probability of a Derangement.

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n/n!$ | 0.50000 | 0.33333 | 0.37500 | 0.36667 | 0.36806 | 0.36786 |

# 本章总结

- **递推关系**:一个公式，它把序列中除了某些初始项以外的项都表示成这个序列前面的一个或者若干个项的函数
- **常系数线性齐次递推关系**:一个递推关系，除了初始项以外，它把序列的项表示成前面项的线性组合
- **常系数线性非齐次递推关系**:一个递推关系，除了初始项以外，它把序列的项表示成前面项的线性组合加上一个仅仅依赖于序标的不恒为0的函数
- **序列的生成函数**:用序列的第$n$项作为$x^n$的系数的形式幂级数
- **两个集合并集的元素个数公式**:$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- **三个集合并集的元素个数公式**: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

# 本章总结

**容斥原理:**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap a_k| - \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap a_n|$$

**从m个元素到n个元素的映上函数的个数：**

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m$$

**n个物体的错位排列数：**

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$