排列

- 例:字母ABCDEFGH 有多少种排列包含串ABC?
- 解:因为ABC必须成组出现可以当做一个对象来看待，我们通过找6个对象，ABC, D, E, F, G, H的排列数. 它们可以按任意的次序出现，所以$P(6,6)=6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$种排列，其中必定包含串ABC.

排列

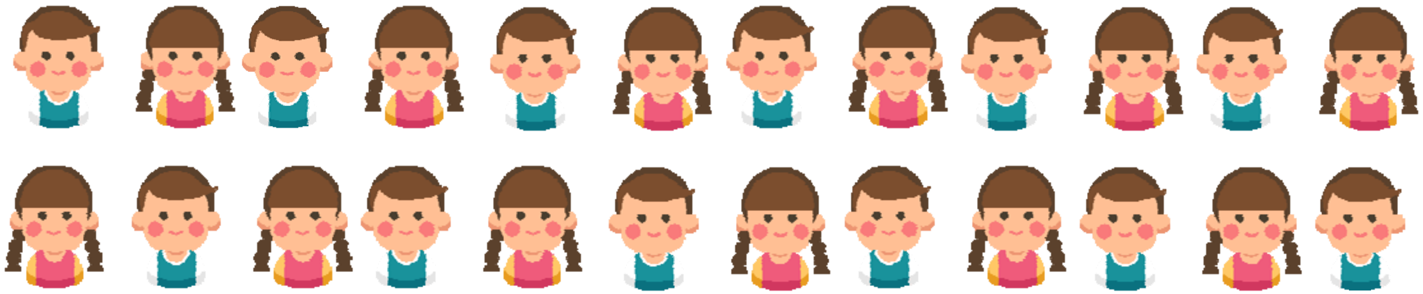
- 例:懂排列的孙悟空．从孙行者到者行孙，再到行者孙. 请问还可能有多少个类似的名字?
- 解:由孙、行、者三个汉字组成的3排列共有P(3,3)=3!=6种不同的排名方式．所以还可能有3！-3=3个名字.

排列

- 例:有6名女生和6名男生坐成一排，每个人的旁边都可以随便坐，那么共有多少种方式?
- 解:具体座位没有任何限制，相当于共12个人排列着坐，所以共有$P(12,12)=12!=479001600$种坐法.

排列

- 例:有6名女生和6名男生坐成一排, 每个人的旁边都只能坐异性, 那么共有多少种方式?
- 解:具体座位有限制, 包括以下两大种类坐法



因此共有2∗6!∗6!=1036800种方式.

排列

- 例：从1到9的数字中取7个数构成一个排列，要求5和6不相邻，求总的方案数是多少?
- 解:
  - 不加任何限制的排列数为P (9，7)=181440
  - 5和6相邻的排列数：有6种放置方法使得5后面是6，而反过来也一样．因此排列数为2*6* P (7,5)= 30240
  - 因 此， 最 终 方 案 数 为 总 排 列 数 减 去 5 和 6 相 邻 的 排 列 数 =181440-30240=151200

排列

- 例：有10个人围坐一个圆桌，其中有两个人不愿意挨着坐，求多少种不同的座位方法?
- 解:
  - 所有人围成一个圆桌的排列数=$P(10,10)$/10= 362880
  - 两个人挨着，那么将这两个人看做一个整体，插入剩下的8个人的空=2*8!=80640
  - 因此，座位方法数=总排列数-两个人挨着的排列数=362880-80640=282240

组合

- 定义:集合元素的一个***r*组合**是从这个集合中无序地选择r个元素．一个r组合是这个集合的一个r个元素的子集．具有n个不同元素的集合的r组合数记作$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$，并且称为二项式系数(后续章节将学习这个记号).
- 条件:**可区分的物体**, **没有先后顺序**, 每一个元素同样**不会被重复地**被选择.
- 注意$C(n,0) = 1$, 因为恰好有一种方法来选择0个元素.

组合

- 例:令S是集合{a, b, c, d}. 那么{a, c, d}是一个3组合, 它和组合{d, c, a}, {a,d,c}, {c,a,d}, {c,d,a}, {d,a,c}是一样的, 因为集合中的元素的顺序没有关系. S的2组合共有{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}种, 所以$C(4,2) = 6$.

组合

- 定理:设n是正整数，r是满足$n \ge r \ge 0$的整数，n元素的集合的r组合数为$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

- 证:我们如果要得到该集合的r排序的话，我们可以先构成集合的r组合，然后再排序每个r组合中的元素(这可以用$P(r,r)$种方法来做)．因此$P(n,r)=C(n,r)*P(r,r)$. 所以可以推出:

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{P(r,r)}=\frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

推论: $P(n,r)=C(n,r)\ *r!$

【备注：0!=1】

组合

- 例:从一副52张标准牌中选择5张，共有多少种不同的方法？从一副52张标准牌中选择47张, 共有多少种不同的方法?
- 解:
  - 选5张, 这5张的次序不受限制, 所以$C(52,5)=\frac{52!}{5!47!}=2598960$
  - 类似地, 选47张, 其次序不受限制, 所以$C(52,47)=\frac{52!}{47!5!}=2598960$
- 思考:$C(n,r)$和$C(n,n-r)$和什么关系呢?

组合

- 推论:设n和r是满足$r \leq n$的非负整数, 那么$C(n,r) = C(n,n-r)$
- 证:根据定理我们可以计算

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{\big(n-(n-r)\big)!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

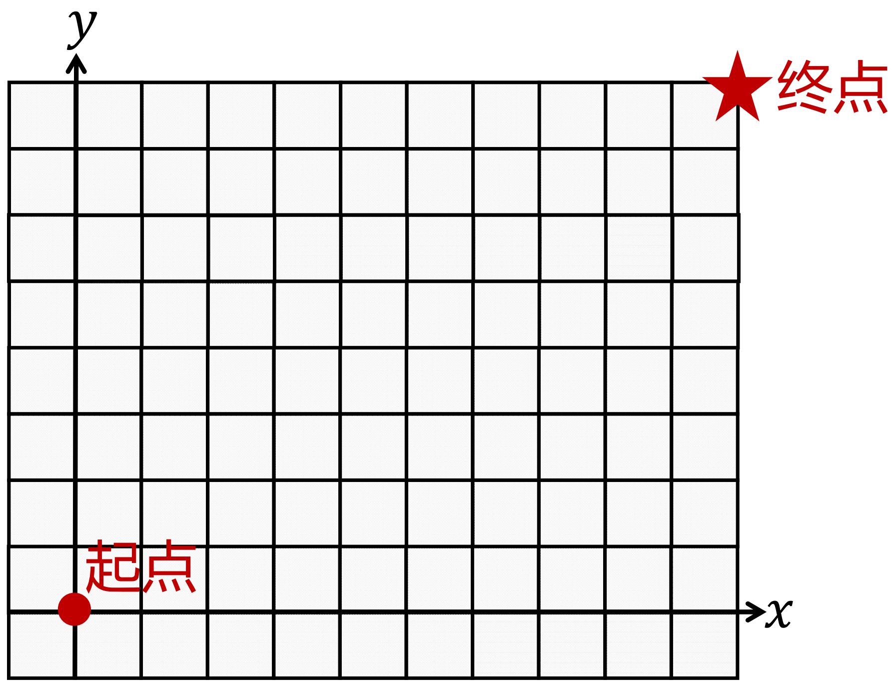
因此, $C(n,r) = C(n,n-r)$

组合

- 例:有多少种方式从10个选手的网球队中选择5个选手?
- 解:从10个元素集合的5组合数给出，根据定理可得$C(10,5)=\frac{10!}{5!5!}=252$

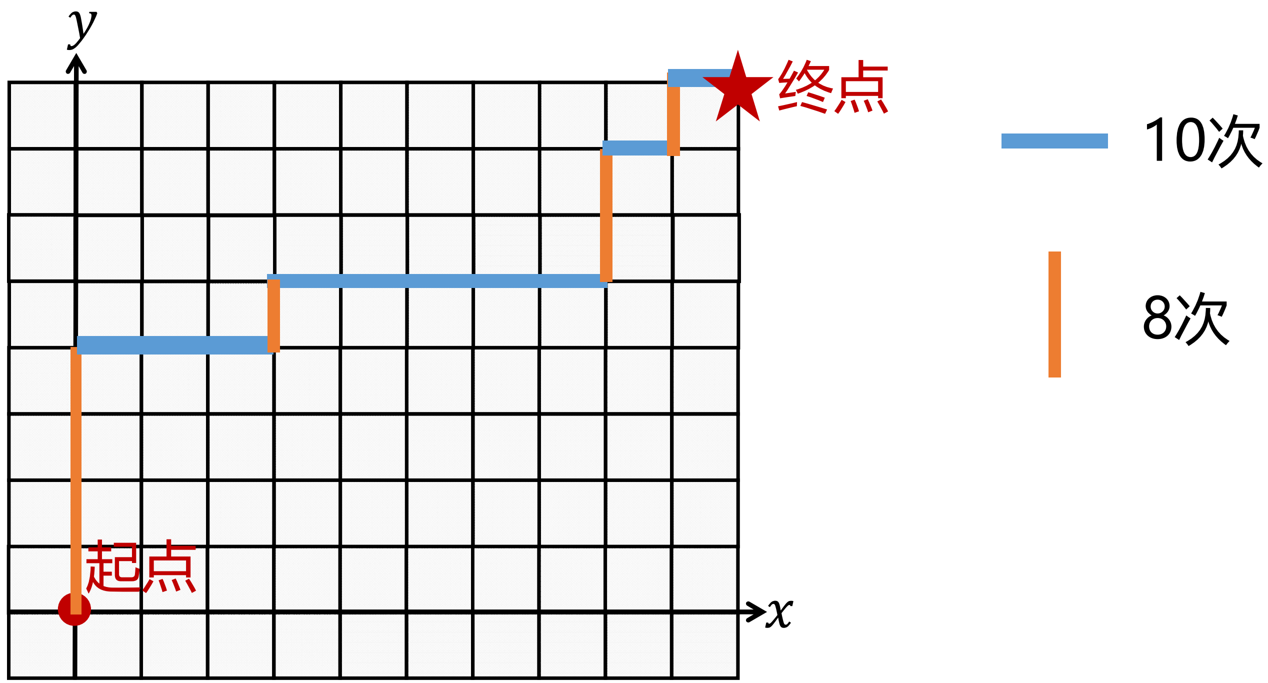
组合

- 例:如下图中从(0,0)点出发沿着x轴或者y轴的正方向每步走一个单位，最终走到(10,8)点，有多少种路径?



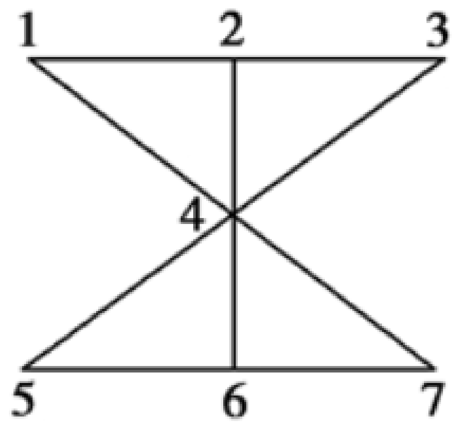
组合

- 解:例如如下方式走，其中y轴正方向走8次，x轴正方向走10次，所以共计有$C(10+8,8)=43758$条路径.



排列与组合

- 例:把3盆带不同序号的红玫瑰和4盆带不同序号的白玫瑰摆放到下图的1-7的位置上，其中三盆红玫瑰不能放在一条直线上，请问共有多少种方式?



- 解:当不考虑限制时共有$P(7,7)=7!=5040$种方式. 这其中三盆红玫瑰放在一条直线上的方法共有$5*3!*4!=720$种. 因此，满足要求的方法数共有5040-720=4320种.

排列与组合

- 例:(差额选举)某班级班委进行换届选举, 从已产生的甲乙丙丁四人中选出三位分别担任班长, 副班长, 学习委员. 并且要求上一届班长甲不能连任原职, 则换届后不同的任职结果有多少种?
- 解:任职结果分两种情况考虑
  - 若选出的三人中没有甲时, 那么有$P(3,3)$=6种情况;
  - 若选出的三人中有甲时, 那么还需要再从剩下的乙丙丁三人中选出两人. 甲只能从副班长, 学习委员中选出一个任职, 而剩下的两人排列确定剩下的两职位, 因此有$C(3,2)*C(2,1)*P(2,2)=$12种情况;
  - 综上, 共有6+12=18种不同情况.