4.3.6 主析取范式, 主合取范式

- 定义：若一个命题公式的析取范式为$A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_n$，其中$A_i (i = 1,2,\ldots,n)$是极小项, 则称该公式为$A$的**主析取范式**.
- 定义：若一个命题公式的合取范式为$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n$，其中$A_i (i = 1,2,\ldots,n)$是极大项, 则称该公式为$A$的**主合取范式**.

4.3.6 主析取范式

- 设公式A含命题变项p_1, p_2, …, p_n, 求公式主析取范式的步骤:
  - (1)求A的析取范式$A'=B_1 \lor B_2 \lor \cdots \lor B_s$, 其中$B_j$是简单合取式, $j=1,2, \ldots ,s$
  - (2)若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \land (p_i \lor \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \land p_i) \lor (B_j \land \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

  - (3)消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i \lor m_i$
  - (4)将极小项按下标从小到大排列

4.3.6 主析取范式

- 例:求$(p \to q) \to (q \land r)$的主析取范式.

4.3.6 主析取范式

- 例:求$(p \to q) \to (q \wedge r)$的主析取范式.
- 解:
  - $(p \to q) \to (q \wedge r)$
  - $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge r)$ 去掉∧∨¬以外的其他连结词
  - $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$ ¬移到命题变元前面
  - $\equiv (p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r)$ $\mathrm{A_i}$中若不包含某个命题变元p_i, 则增加
  - $\equiv (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ 展开
  - $\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$
  - $\equiv m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$ 确定从小到大的出现顺序(命题变项看为1, 命题变项的否定看为0, $\neg p \wedge q \wedge r$为011, 转为十进制数3, 写作m_3, 其他分别为m_4, m_5, m_7. 因此结果也写作$m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$)

4.3.6 主合取范式

- 设公式A含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$, 求公式主合取范式的步骤:
  - (1)求A的合取范式$A'=B_1 \land B_2 \land \cdots \lor B_s$, 其中$B_j$是简单析取式, j=1,2, … ,s
  - (2)若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \lor (p_i \land \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \lor p_i) \land (B_j \lor \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

  - (3)消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i \land M_i$
  - (4)将极大项按下标从小到大排列

4.3.6 主合取范式

- 例:求$(p \to q) \to (q \wedge r)$的主合取范式.

4.3.6 主合取范式

- 例:求$(p \to q) \to (q \wedge r)$的主合取范式.
- 解:
  - $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (q \wedge r)$ 去掉∧∨¬以外的其他连结词
  - $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)$ ¬移到命题变元前面
  - $\equiv ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee r)$ 分配律
  - $\equiv ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ 展开
  - $\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ 获得合取范式
  - $\equiv ((p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q)) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)$ $\mathrm{A_i}$中若不包含某个命题变元p_i, 则增加
  - $\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 展开
  - $\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ 幂等律
  - $\equiv M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$ 确定从小到大的出现顺序(命题变项看为0，命题变项的否定看为1，$p \vee q \vee r$为000，转为十进制数0, 写作M_0, 其他分别为M_1, M_2, M_6. 因此结果也写作$M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_6$)

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 主析取范式像真值表一样，可以表达出公式以及公式之间关系的一切信息．真值表与主析取范式(主合取范式)是描述命题公式的两种等价的不同标准形式．两者可以相互确定，由A的主析取范式(主合取范式)可以立即确定A 的真值表，由A的真值表也可以立即确定A的主析取范式(主合取范式).
- 用途1, 求公式的成真赋值与成假赋值.

- 例:$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge r)$的主析取范式$m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$, 求它的成真赋值和成假赋值.
- 解:极小项的下标的二进制表示011，100，101，111为该公式的成真赋值，而其他是它的成假赋值.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 用途2, 判断公式的类型. 设公式A中含n个命题变项,
  - A为重言式, 当且仅当A 的主析取范式含全部2^n个极小项.
  - A为矛盾式, 当且仅当A 的主析取范式不含任何极小项. 此时, 记A的主析取范式为0.
  - A为可满足式当且仅当A的主析取范式中至少含一个极小项.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 例:用公式$p \rightarrow (p \vee q)$的主析取范式$m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$判断公式的类型.
- 解:由于主析取范式含两个命题变项的全部$2^2 = 4$ 个极小项, 主析取范式中包含所有的极小项, 故该公式为重言式.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 用途3, 判断两个命题公式是否等值. 设公式A, B 共含有n个命题变项, 按n个命题变项求出A, B的主析取范式A'与B'. 若$A' = B'$, 则$A \Leftrightarrow B$, 否则$A \not\Leftrightarrow B$.

- 例:判断公式p与$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$是否等值.
- 解:这里有2个命题变项,因而极小项含2个命题变元. 因为p的主析取范式$m_2 \vee m_3$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$的主析取范式$m_2 \vee m_3$是一样的, 因此两个公式等值.

4.3.7 主析取/合取范式用途

- 由主析取范式求主合取范式: 设公式A含n 个命题变项．A 的主析取范式含s个极小项($0 < s < 2^n$)，即$A = m_{i1} \vee m_{i2} \vee \cdots \vee m_{is}$, 没出现的极小项为$m_{j1}, m_{j2}, \ldots m_{j2^n-s}$, 那么$A \Leftrightarrow M_{j1} \wedge M_{j2} \wedge \cdots M_{j2^n-s}$.

- 例: 已知公式$B \Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3$，其中$B$含3 个命题变项$p, q, r$, 求主合取范式.
- 解: 公式B的主析取范式中没出现的极小项为m_0, m_4, m_5, m_6, m_7, 因而$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$.