3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:求$e_1 + e_2 + e_3 = 17$的解的个数, 其中e_1, e_2, e_3都是非负整数, 且$3 \le e_1 \le 6$, $3 \le e_2 \le 6$, $4 \le e_3 \le 7$.

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:求$e_1 + e_2 + e_3 = 17$的解的个数, 其中e_1, e_2, e_3都是非负整数, 且$3 \le e_1 \le 6$, $3 \le e_2 \le 6$, $4 \le e_3 \le 7$.
- 解:具有以上限制的解的个数是$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$中展开式$x^{17}$的系数. 这是因为我们在乘积中得到等于$x^{17}$的项是通过在第一个和中取项$x^{e_1}$，在第二个和中取项$x^{e_2}$, 在第三个和中取项$x^{e_3}$, 其中幂指数$e_1$, e_2, e_3满足$e_1 + e_2 + e_3 = 17$和给出的限制. 很容易看出x^{17}的系数是6(4,6,7表示第一项中取x^4, 第二项中取x^6, 第三项中取x^7; 5,5,7; 5,6,6; 6,4,7; 6,5,6; 6,6,5), 因此存在6个解.

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k =1+C(n,1)x+ C(n+1,2)x^2+\cdots$$

3.4.3 计数问题和生成函数

- 另一种计算方式:
  - $(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7)=x^{10}(1+x+x^2+x^3)^3$
  - 求展开式x^{17}的系数, 那么相当于求$(1+x+x^2+x^3)^3$展开式x^7的系数.
  - $(1+x+x^2+x^3)^3=\frac{(1-x^4)^3}{(1-x)^3}=\frac{(1-3x^4+3x^8-x^{12})}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{-3x^4}{(1-x)^3}+\frac{3x^8}{(1-x)^3}+\frac{-x^{12}}{(1-x)^3}$
    - 其中$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,2)x^k$. 我们要找的是$x^7$的系数，即$k=7$, 因此$c(2+7,2)=36$.
    - 其中$\frac{-3x^4}{(1-x)^3}=-3x^4\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,k)x^k=-3x^4\sum_{k=0}^{\infty} c(2+k,2)x^k$. 我们要找的是$x^3$的系数, 即$k=3$, 因此$-3*c(2+3,2)$=-30.
  - 其他剩余的2项不可能出现x^7的项，因此最后结果为36-30=6.

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:将9块相同的饼干分给3个不同的孩子，如果每个孩子至少收到2块最多不超过4块饼干, 那么有多少种不同的分配方式?

3.4.3 计数问题和生成函数

- 例:将9块相同的饼干分给3个不同的孩子，如果每个孩子至少收到2块最多不超过4块饼干, 那么有多少种不同的分配方式?
- 解:具有以上限制的解的个数是$(x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4)\ (x^2+x^3+x^4)$中展开式$x^9$的系数. 很容易看出$x^9$的系数是7(234; 243; 324; 333; 342; 423; 432), 因此存在7个解.

3.4.3 计数问题和生成函数

- 另一种计算方式:
  - $(x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4)=x^6(1+x+x^2)^3$
  - 那么相当于求 $(1+x+x^2)^3$展开式x^3的系数.
  - $(1+x+x^2)^3=\frac{(1-x^3)^3}{(1-x)^3}=\frac{(1-3x^3+3x^6+x^9)}{(1-x)^3}$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+x+x^2+\cdots+x^n$$

  - $\frac{(1-3x^3+3x^6+x^9)}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{-3x^3}{(1-x)^3}+\frac{3x^6}{(1-x)^3}+\frac{x^9}{(1-x)^3}$
  - 其中$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}c(2+k,k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}c(2+k,2)x^k$

$$\frac{1}{(1-x)^{\boxed{n}}}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k=1+C(n,1)x+C(n+1,2)x^2+\cdots$$

  - 我们要找的是x^3的系数，即第一项$k=3$，因此$c(2+3,2)=10$；第二项，$k=0$，因此$c(2+0,2)=1$
  - 其他剩余的2项不可能出现x^3的项，因此最后结果为10-3*1=7.

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 例:使用生成函数求解递推关系$a_k = 3a_{k-1,}\ k = 1,2,3\ldots,a_0 = 2$

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 例:使用生成函数求解递推关系$a_k = 3a_{k-1,}\ k = 1,2,3\ldots,a_0 = 2$
- 解:
  - 设$G(x)$是序列$\{a_k\}$的生成函数，即$G(x)$=$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
  - 则$xG(x)$=$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$=$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$
  - 那么$G(x)$-3$xG(x)$=$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k-3\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$
  - =$a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$-$\sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1} x^k$
  - =$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k$
  - =a_0=2
  - 在上述求解过程中, $G(x)$-3$xG(x)$= 2
  - 因此, $G(x)$=$\frac{2}{1-3x}$

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 解(续):
  - $G(x) = \frac{2}{1-3x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \times 3^k x^k$

$$\frac{1}{1-\boxed{ax}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$$

  - 所以递推关系$a_k = 2 \times 3^k$

3.4.4 使用生成函数求解递推关系

- 使用生成函数求解关于$\{a_n\}$的递推方程, 主要步骤:
  - 1, 先设定序列$\{a_n\}$的生成函数$G(x)$;
  - 2, 利用递推方程的依赖关系导出关于生成函数$G(x)$的方程(可以是一次方程, 二次方程, 二元一次方程, 微分方程等不同的形式);
  - 3, 通过求解方程得到$G(x)$的函数表达式;
  - 4, 将$G(x)$展开成幂级数, 其中x^n项系数就是a_n.

3.4.5 使用生成函数证明恒等式

- 例:使用生成函数证明$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$其中$n$为正整数

$$(1+\boxed{x})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$$
$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$$

3.4.5 使用生成函数证明恒等式

- 例:使用生成函数证明$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$其中$n$为正整数
- 解:
  - 根据二项式定理$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$，$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2n-k} 1^k$，注意到$k=n$时，$C(2n,n)$是$(1+x)^{2n}$中$x^n$的系数.
  - 另一方面, $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = [C(n,0) + C(n,1)x + \cdots + C(n,n)x^n]^2$
  - 在上等式中x^n的系数为$C(n,0)C(n,n) + C(n,1)C(n,n-1) + C(n,2)C(n,n-2) + \ldots + C(n,n)C(n,0) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$，因为$C(n,n-k) = C(n,k)$.
  - 由于$C(2n,n)$和$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$都表示$(1+x)^{2n}$中x^n的系数, 所以他们一定相等.
  - 得证.

$$(1+\boxed{x})^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$$