第4.6节 推理规则

Section 4.6: Rules of Inference

我们将学到的知识

- 命题逻辑的有效论证
- 命题逻辑的推理规则
- 使用推理规则建立论证
- 量化命题的推理规则

4.6.1 引言

- 再回顾苏格拉底的例子:
- 我们有两个前提:
  - "所有人都是凡人"
  - "苏格拉底是人"
- 我们得到结论:
  - "苏格拉底是凡人"
- 我们如何通过前提来得到结论呢

4.6.1 引言

- 我们可以将谓词逻辑中的前提(在行之上)和结论(在行之下)表示为一个参数:

$$\begin{array}{ll} & \forall x(Man(x) \rightarrow Mortal(x)) \\ & Man(Socrates) \\ \hline \therefore & Mortal(Socrates) \end{array}$$

- 我们很快就会看到这是一个有效的**论证**.

4.6.1 有效论证

- 我们将展示如何在两个阶段构建有效的参数; 首先是命题逻辑, 然后是谓词逻辑. 推理规则是构造有效论证的基本构件.
  - 命题逻辑
    - 推理规则
  - 谓词逻辑
    - 命题逻辑的推理规则以及处理变量和量词的附加推理规则

4.6.2 命题逻辑中的论证

- 命题逻辑中的论证是一系列命题．除最终命题之外的所有命题都称为**前提**, 最后的陈述是**结论**.
- 一个论证是有效的, 如果所有的前提为真蕴含, 则结论为真.

- 论证形式是一连串涉及命题变元的复合命题．无论什么命题被代入其命题变元, 如果前提为真, 结论为真, 则该论证形式是有效的.

- 当$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$是永真式．带有前提$p_1, p_2, \ldots, p_n$，结论为$q$的论证形式就是有效的.

4.6.3 命题逻辑的推理规则1:假言推理

- 永真式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 称为**假言推理**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学” 和“正在下雪”为真，那么“我要学离散数学”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则2:取拒式

- $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ 称为**取拒式**(或称拒取式)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- 例:p表示"正在下雪" q表示"我要学离散数学" 假设条件语句"如果正在下雪, 我要学离散数学"和"我没有学习离散数学"为真, 那么"没有下雪"为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则3:假言三段论

- $((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$称为**假言三段论**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

- 例:p表示"正在下雪" q表示"我要学离散数学" r表示"我会得到成绩A" 假设条件语句"如果正在下雪，我要学离散数学" 和"如果我学习离散数学, 我会得到成绩A"为真, 那么"如果下雪, 我会得到成绩A"为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则4:析取三段论

- $(\neg p \wedge (p \ \vee q)) \rightarrow q$ 称为**析取三段论**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- 例:p表示"我要学离散数学" q表示"我要学习英语" 假设条件语句"我要学习离散数学，或者我要学习英语"和"我不会学离散数学"为真，那么"我要学习英语"为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则5:附加律

- $p \rightarrow (p \vee q)$ 称为**附加律**

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学”为真，那么“我要学习离散数学，或者我要学习英语”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则6:化简律

- $(p \wedge q) \rightarrow q$ 称为**化简律**

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

- 也可以是$(p \wedge q) \rightarrow p$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学和英语”为真, 那么“我要学习离散数学”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则7:合取律

- $((p) \land (q)) \rightarrow (p \land q)$ 称为**合取律**(或称合取引入规则)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \land q \end{array}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” 假设条件语句“我要学习离散数学”和“我要学英语”为真，那么“我要学习离散数学和英语”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则8:消解律

- $((\neg p \lor r) \land (p \lor q)) \to (q \lor r)$称为**消解律**.
- 在AI中有重要的作用, 被广泛使用在Prolog语言中. $q \lor r$称为消解式

$$\begin{array}{l} \neg p \lor r \\ p \lor q \\ \hline \therefore q \lor r \end{array}$$

- 例:p表示“我要学离散数学” q表示“我要学习英语” r表示“我要学习数据库”假设语句“我不会学习离散数学, 或者我要学习英语”和“我要学离散数学, 或者我要学习数据库”为真, 那么“我要学习英语, 或者我要学习数据库”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则9:构造性二难推理

- $((p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land (p \lor r)) \rightarrow (q \lor s)$称为**构造性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \lor r \\ \hline \therefore q \lor s \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” s表示“我会看一场电影”. 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学”，“如果我得到成绩A, 我会看一场电影”, 和“天正在下雪, 或者我得到成绩A”都为真, 那么“我学习离散数学, 或者我看一场电影”为真.

4.6.3 命题逻辑的推理规则10:破坏性二难推理

- $((p \rightarrow q) \land (r \rightarrow s) \land (\neg q \lor \neg s)) \rightarrow (\neg p \lor \neg r)$称为**破坏性二难推理**

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \lor \neg s \\ \hline \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$$

- 例:p表示“正在下雪” q表示“我要学离散数学” r表示“我会得到成绩A” s表示“我会看一场电影”. 假设条件语句“如果正在下雪，我要学离散数学”，“如果我得到成绩A，我会看一场电影”, 和“我没有学习离散数学, 或者没有看电影”都为真, 那么“天没有下雪, 或者我没有得到成绩A”为真.

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 多个前提时，通常需要用到多个前面提及的推理规则来证明一个论证是有效的.
- 使用推理规则建立论证，其中前提为$A_1, A_2, \cdots, A_k$，结论为B. 常用的构造证明的方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)**

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:从命题$p \wedge (p \rightarrow q)$, 证明$q$是一个结论.

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:从命题$p\land(p \to q)$, 证明q是一个结论.
- 解:

步骤	理由
1. $p\land(p \to q)$	前提引入
2. p	化简律, 用1
3. $p \to q$	化简律, 用1
4. q	假言推理, 用2和3

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:根据以下前提(前四行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第五行):
  - “今天下午不是晴天, 比昨天还要冷.”
  - “只有天气晴朗, 我们才会去游泳.”
  - “如果我们不去游泳, 那么我们将乘独木舟旅行.”
  - “如果我们乘独木舟旅行, 那么我们将在日落之前到家.”
  - “我们将在日落之前回家.”

【基础知识：只有才, 后推前】

4.6.4 使用推理规则建立论证

- 例:根据以下前提(前四行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第五行):
  - “今天下午不是晴天, 比昨天还要冷.”
  - “只有天气晴朗, 我们才会去游泳.”
  - “如果我们不去游泳, 那么我们将乘独木舟旅行.”
  - “如果我们乘独木舟旅行, 那么我们将在日落之前到家.”
  - “我们将在日落之前回家.”
- 解:
  - 定义命题变元. p: “今天下午天气晴朗” r: “我们会去游泳” t: “我们将在日落之前回家” q: “今天比昨天更冷” s: “我们将乘独木舟旅行”
  - 翻译以上语句前提为: $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$, 结论为t.
  - 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 如下所示:

4.6.4 使用推理规则建立论证

已知$\neg p \wedge q, r \rightarrow p, \neg r \rightarrow s, s \rightarrow t$,结论为$t$

- 解(续):

步骤	理由
1.$\neg p \wedge q$	前提引入
2.$\neg p$	化简律, 用1
3.$r \rightarrow p$	前提引入
4.$\neg r$	拒取, 用2和3
5.$\neg r \rightarrow s$	前提引入
6.s	假言推理, 用4和5
7.$s \rightarrow t$	前提引入
8. t	假言推理, 用6和7