¬ ∧ ∨ → ↔

T F

1 0

第4.3节 命题等价式

Section 4.3: Propositional Equivalences

我们将学到的知识

- 重言式, 矛盾式, 可能式
- 逻辑等价
- 构造逻辑等价式
- 命题的可满足性
- 范式, 主析取范式, 主合取范式

4.3.1 重言式, 矛盾式, 可能式

- 一个真值永远为真的复合命题, 称为**永真式**, 或者重言式.
  - 例如: $p \lor \neg p$
- 一个真值永远为假的复合命题, 称为**矛盾式**.
  - 例如: $p \land \neg p$
- 既不是永真式, 也不是矛盾式的复合命题, 称为**可能式**.
  - 例如$p, \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$	$p \land \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F
可能式	可能式	永真式	矛盾式

4.3.2 逻辑等价式

- 在所有情况下都有相同真值的两个复合命题p，q，那么它们是**逻辑等价**的.
  - $p \leftrightarrow q$是重言式, 那么p和q是逻辑等价的.
  - 我们写为$p \Leftrightarrow q$或者$p \equiv q$来表示p和q是逻辑等价的.
  - 当真值表中, p和q的真值一样, 那么我们说p和q是逻辑等价的.
- 例:以下真值表说明$\neg p \vee q$和$p \rightarrow q$是逻辑等价的.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

两列的值都相同

- 因此: **条件命题的逻辑等价式, $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$**

4.3.2 德.摩根律

Augustus De Morgan
(奥古斯塔.德.摩根)
1806-1871

- 最重要的逻辑等价式: **德.摩根律**
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

- 真值表证明了德.摩根律的正确性

p	q	¬p	¬q	(p∨q)	¬(p∨q)	¬p∧¬q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

两列的值都相同

4.3.2 重要的等价式

- 其他常见的逻辑等价式:
- 恒等律: $p \wedge \mathrm{T} \equiv p$, $p \vee \mathrm{F} \equiv p$
- 支配律: $p \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$, $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$
- 幂等律: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- 双重否定律: $\neg(\neg p) \equiv p$
- 否定律: $p \vee \neg p \equiv \mathrm{T}$, $p \wedge \neg p \equiv \mathrm{F}$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

- 其他常见的逻辑等价式(续):
- 交换律: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- 结合律: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
  (结合律可扩展更多个命题)
- **分配律**: $(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- **德.摩根律**:$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
  (德.摩根律可扩展更多个命题)
- **吸收律**: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

- 条件命题的逻辑等价式:
- $\boldsymbol{p \to q \equiv \neg p \vee q}$
- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
- $p \vee q \equiv \neg p \to q$
- $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
- $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
- $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
- $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
- $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.2 重要的等价式

- 双条件命题的逻辑等价式:
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \neg q \leftrightarrow \neg p$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

例:

$$
\begin{aligned}
&\neg(p \leftrightarrow q) \\
\equiv\ &\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\
\equiv\ &\neg(p \rightarrow q) \vee \neg(q \rightarrow p) \\
\equiv\ &\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \\
\equiv\ &(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \\
\equiv\ &(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q)) \\
\equiv\ &p \leftrightarrow \neg q
\end{aligned}
$$

特别提示：必须牢记这些等价式，这是继续学习的基础

4.3.4 构建新的逻辑等价式

- 我们在以上等价式的基础上，构建其他新的逻辑等价式．为了证明$A \equiv B$, 我们可以以A为开始, B为结束来构造一系列的逻辑等价.
  - $A \equiv A_1$
  - $A_1 \equiv A_2$
  - ……
  - $A_n \equiv B$
- 能这样做的原因是复合命题中的一个命题可以用与它逻辑等价的复合命题替换而不改变原复合命题的真值.

4.3.4 证明逻辑等价

- 例: 证明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$是重言式
- 解:
  - $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ 由德.摩根律
  - $\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ 由德.摩根律
  - $\equiv \neg p \vee \neg q \vee p \vee q$ 由结合律
  - $\equiv \neg p \vee p \vee \neg q \vee q$ 由交换律
  - $\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$ 由结合律
  - $\equiv \mathrm{T} \vee \mathrm{T}$ 由否定律
  - $\equiv \mathrm{T}$ 由支配律

4.3.5 命题的可满足性

- 一个复合命题称为**可满足的**，如果存在一个对其变元的真值赋值使其为真．当不存在这样的赋值时，即复合命题对所有变元的真值赋值都是假, 则复合命题称为**不可满足的**.
- 一个复合命题是不可满足的，当且仅当它的否定对所有变元的真值赋值都是真的, 也就是说当且仅当它的否定是重言式.

4.3.5 命题的可满足性

- 例: 确定下面的复合命题的可满足性:

  $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$

  $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

  $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

- 解:
  - 可满足. 分配T给p, q, r.
  - 可满足的. 分配T给p, F给q.
  - 不可满足的. 检查每一个可能的赋值, 没有一个能使命题为真.

4.3.5 可满足性的应用

- 在机器人学、集成电路设计等领域中，许多问题都可以用命题的可满足性来建立模型.
- 数独是一个9×9的表格，其中由9个3×3的子表格组成. 这81个小方格将由1,2, …, 9的数值填充. 每一行，每一列，每一个子表格中由不同的数字组成. 例如下图的数独.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

4.3.5 可满足性的应用

- 已经有许多基于逻辑和数学的策略来求解数独谜题．这儿讨论一种借助计算机来求解的方法，它基于谜题建模为一个命题可满足性问题.
- 假设$p(i,j,n)$表示一个命题，在第i行第j列数值为n的命题．总共有9×9×9=729这样的命题．比如$p(5,1,6)$为真．但是$p(5,j,6)$为假，当j=2,3,…9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

4.3.5 可满足性的应用

- 对于每个小方格中给定数值, $p(i,j,n)$表示第i行第j列给定数值n.
- 1) 每一行都包含了每种数值:

$$\bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9}p(i,j,n)$$

  - 首先, 要断言第i行包含数n, 构成$\bigvee_{j=1}^{9}p(i,j,n)$
  - 然后, 要断言第i行包含所有n个数, 将n的所有9个可能值的析取式做合取, 得到$\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9}p(i,j,n)$
  - 最后, 要断言每一行都包含了每一个数, 将所有的9行做合取, 得到$\bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{j=1}^{9}p(i,j,n)$
- 2) 每一列都包含了每种数值:

$$\bigwedge_{j=1}^{9}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{9}p(i,j,n)$$

4.3.5 可满足性的应用

- 3) 每个3 x 3 的子表格中包含了每个数值:

$$\bigwedge_{r=0}^{2}\bigwedge_{s=0}^{2}\bigwedge_{n=1}^{9}\bigwedge_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p(3r+i,3s+j,n)$$

  - 为什么是该表达公式？留着课后同学们自行思考

- 4) 每一个空格都不会填写超过一个数值. 当$n \neq n'$, 数值取值为1到9之间的数, 那么

$$p(i,j,n) \rightarrow \neg p(i,j,n')$$

4.3.5 可满足性的应用

- 为了解决数独谜题，我们需要找到一种分配数值到729个命题中，并且让上面所有命题的合取式为真. 分配时需要满足数独的要求条件.

- 方案一：真值表可以用来决定一个复合命题的可满足性. 但是对于这种问题,计算机解决起来会太过复杂.
- 其他方案：现在已有许多研究工作致力于让这个数独的可解释性问题能够更实际的操作.

4.3.6 范式

- **范式**是命题公式的规范形式, 分为**析取范式**和**合取范式**.
- 命题公式A如果可以等价写为$A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_n$, 其中$A_i (i = 1,2,\ldots,n)$是命题变元或其否定形式的合取式, 则称该公式为A的**析取范式**.

- 例:判断以下是否为析取范式.

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$p \wedge (p \vee q)$$

- 解: 第一个是析取范式，第二个不是析取范式.

4.3.6 范式

- 命题公式A如果可以等价写为$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n$, 其中$A_i(i = 1,2, \ldots, n)$是命题变元或其否定形式的析取式, 则称该公式为A的**合取范式**.
- 例:求$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$的析取范式和合取范式.
- 解:
- 析取范式:
  - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r$ 去掉∧∨¬以外的其他连结词
  - $\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$ ¬移到命题变元前面
- 合取范式:
  - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r \equiv \neg((p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee r$ 去掉∧∨¬以外的其他连结词
  - $\equiv ((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)) \vee r$ ¬移到命题变元前面
  - $\equiv ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee p \vee r)$ 整理

4.3.6 范式

- 定理(**范式存在定理**)：任一命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式. 但析取范式和合取范式可能不是唯一的.
- 例:求$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ 的析取范式可能为:
  - $p\vee(q\wedge r)$
  - $(p\wedge p)\vee(q\wedge r)$
  - $p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

4.3.6 极小项, 极大项

- 定义：n个命题变元$p_1, p_2, \dots p_n$的合取式/析取式，其中每个命题变元必出现且仅出现一次(本身或者否定形式)，则称合取式$p_1 \wedge p_2 \dots \wedge p_n$为**极小项**, 析取式$p_1 \vee p_2 \dots \vee p_n$为**极大项**.
- 若有n个命题变元，则有2^n个极小项和2^n个极大项．这些2^n个极小项(极大项)均互不等值.

4.3.6 极小项, 极大项

- 用m_i表示第i个极小项, 其中i是该极小项成真赋值的十进制表示.
- 用M_i表示第i个极大项, 其中i是该极大项成假赋值的十进制表示.
  - $m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.

- 例: 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项:

公式	成真赋值	名称
¬p∧ ¬q	00	$\boldsymbol{m_0}$
¬p∧q	01	$\boldsymbol{m_1}$
p∧ ¬q	10	$\boldsymbol{m_2}$
p∧q	11	$\boldsymbol{m_3}$

极大项:

公式	成假赋值	名称
p∨q	00	$\boldsymbol{M_0}$
p∨ ¬q	01	$\boldsymbol{M_1}$
¬p∨q	10	$\boldsymbol{M_2}$
¬p∨ ¬q	11	$\boldsymbol{M_3}$

其中m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$