第2.3节 排列与组合

Section 2.3: Permutations and Combinations

知识要点

1 排列

2 组合

排列

- 定义:集合中不同元素的排列，是对这些元素一种有序的安排. 对一个集合S中r个元素的有序安排称为***r*排列**. 一个n元素的r排列记作$P(n,r)$.
- 要点:**可区分物体**，**有先后顺序**，每个物体都**不会重复地被选中**. 使用乘积法则能求出$P(n,r)$.
- 注意$P(n,0) = 1$, 因为恰好有一种方法来排列0个元素.
- $n = r$时的排列称为S的全排列

- 例:令$S = \{1,2,3\}$, 3,1,2是S的一个3排列; 3,2是S的一个2排列. S的所有2排列有:1,2; 1,3; 2,1; 2,3; 3,1; 3,2. 因此$P(3,2) = 6$.

排列

- 定理:具有n个不同元素的集合的r排列数是$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$, 其中$n$和$r$都是正整数, 且$1 \leq r \leq n$.

- 证:这个排列的第一个元素可以有n种方法，因为集合中有n个元素. 排列的第二个元素可以有n-1种方法，因为集合中在第一次选择以后还剩下n-1个元素. 以此类推，直到选择第r个元素时有$(n - (r - 1)) = n - r + 1$种方法. 根据乘法法则，存在$n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$个$r$排列.

排列

- 推论:如果n和r都是整数, 且$0 \leq r \leq n$, 则

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 证:
  - 当$r=0$时, 公式显然成立.
  - 当$1 \leq r \leq n$时, 由定理有$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$, 得证.

排列

- 推论:元素依次排成一个圆圈的排列称为**环排列**(或称循环排列). S的r环排列数等于$P(n,r)/r$

- 证:
  - 假设排列的r个元素分别是a_1, a_2, a_3,…, a_r, 将a_1接在a_r的后边就组成一个环排列. 只要相邻关系不变, 这r个元素中的任何一个作为**线排列**(或称线性排列)的首元素, 首尾相连所构成的环排列都相同.
  - 因此, 环排列数是线排列数的$1/r = P(n,r)/r$

排列

- 例:在100个不同的人中有多少种方法选出一个一等奖得主，一个二等奖得主, 一个三等奖得主?
- 解:不管哪个人得奖，方法都是从100个人中有序地选择3个人，即表示100个元素的集合的3排列$P(100,3) = 100*99*98 = 970200$.

排列

- 例:假定你需要访问8个不同的城市. 第一个城市已经指定, 其他剩余的7个城市的访问可以任意次序进行. 那么总共有多少种可能访问次序?
- 解:因为第一个城市已经确定, 所以城市之间的可能的路径数是7个城市的排列数$P(7,7) = 7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$.