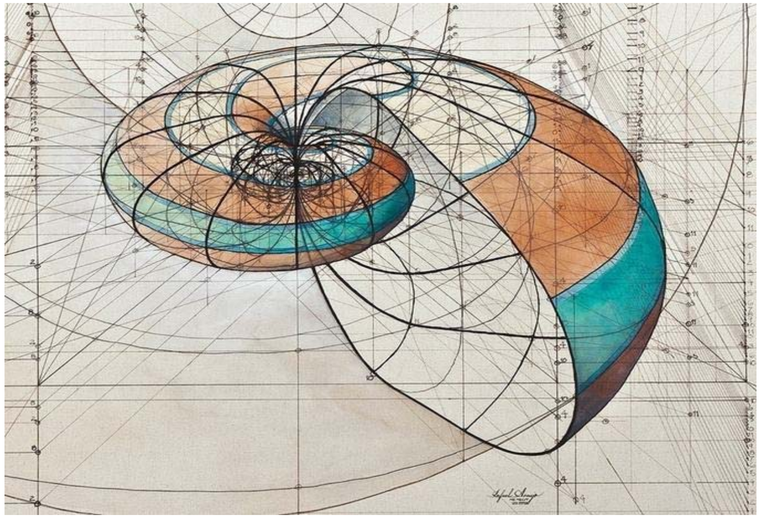

第3.2节求解线性递推关系

Section 3.2: Solving Linear Recurrence Relations

知识要点

1. 线性齐次递推关系
2. 求解常系数线性齐次递推关系
3. 求解常系数线性非齐次递推关系

线性递推关系

- 定义:一个常系数的**k阶递推关系**是形如$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的递推关系, 其中$c_1$, c_2, …, c_k是实数, 且$c_k \neq 0$.
- **阶**为k, 因为a_n由序列前面的k项来表示. k阶递推关系是**线性**的, 因为它的右边是序列前项的倍数之和.
- 这个递推关系是**齐次**的，因为所出现的各项都是a_j的倍数．序列各项的系数都是**常数**而不是依赖于n的函数.
- 满足这个定义的递推关系的序列由这个递推关系和k个初始条件$a_0 = C_0$，$a_1 = C_1, \ldots$ ，$a_{k-1} = C_{k-1}$唯一地确定(注意不是递推关系中的c_1, c_2, …, c_k).

线性递推关系

- 例: $P_n = (1.11)P_{n-1}$是1阶的线性齐次递推关系.
- 例: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$是2阶的线性齐次递推关系.
- 例: $a_n = a_{n-5}$是5阶的线性齐次递推关系.
- 例: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$不是线性的.
- 例: $H_n = 2H_{n-1} + 1$不是齐次的.
- 例: $B_n = nB_{n-1}$不是常系数.

求解常系数线性齐次递推关系

- 求解常系数线性齐次递推关系的基本方法:
- 寻找形如$a_n = r^n$的解，其中r是常数．注意$a_n = r^n$是$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的 解 当 且 仅 当 $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$
- 当等式的两边除以r^{n-k}, 然后左边减去右边可得

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} \ldots - c_{k-1} r^1 - c_k = 0$$

- 因此, 序列$\{a_n\}$以$a_n = r^n$作为解, 当且仅当r是这后一个方程的解. 这个方程叫做该递推关系的**特征方程**. 方程的解叫做该递推关系的**特征根**.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解以下递推关系的特征方程
  - $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
  - $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
  - $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-3}$
- 解:他们的特征方程分别为
  - $r^2 - r - 2 = 0$
  - $r^2 - r - 1 = 0$
  - $r^3 - 3r^2 + 2 = 0$

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对**2阶线性齐次递推关系**, 考虑**两个不相等的特征根**情况
- 定理1:设c_1和c_2是实数. 假设$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不相等的根r_1和r_2. 那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$的解，当且仅当$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$, n = 0,1,2,..., 其中α_1和α_2是常数.
- 备注:证明略. α_1, α_2在使用过程中经常与a_1, a_2混淆，建议换成其他字母代表.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例: 求解递推关系$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, 其中$a_0 = 2$, $a_1 = 7$.
- 解:
  - 该递推关系的特征方程为$r^2 - r - 2 = 0$.
  - 特征根是$r = 2$，$r = -1$．因此序列$\{a_n\}$是递推关系，当且仅当$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$, 其中$\alpha_1$,$\alpha_2$是常数.
  - 由初始条件得$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2 (-1)$
  - 求解这两个等式得$\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$.
  - 因此, 这个递推关系序列$\{a_n\}$, 其中$a_n = 3 * 2^n - (-1)^n$.

【基础知识：一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$的解为$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 或者通过配方法, 因式分解法可以求解】

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:找一个关于斐波拉契数的显示公式. $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，其中$f_0 = 0$, $f_1 = 1$.
- 解:
  - 特征方程$r^2 - r - 1 = 0$的根是$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - 因此, 根据定理可得$f_n = \alpha_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \alpha_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, 其中$\alpha_1$和$\alpha_2$是常数.
  - 初始条件$f_0 = 0$, $f_1 = 1$可确定α_1和α_2的值. $f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $f_1 = \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$
  - 求解这两个方程可得, $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
  - 因此斐波拉契数列$\{f_n\}$, 其中$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对**2阶线性齐次递推关系**，当存在**两重特征根**的情况时，定理1不再适用.
- 定理2:设c_1和c_2是实数，$c_2 \neq 0$. 假设$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$只有一个根r_0. 序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$的解，当且仅当$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n}$, 其中$n = 0,1,2,\cdots$, α_1和α_2是常数.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$，其中$a_0 = 1, a_1 = 3$.
- 解:
  - $r^2 - 4r + 4 = 0$的唯一根是$r = 2$.
  - 因此, 这个递推关系的解是$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n2^n$, 其中$\alpha_1, \alpha_2$是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 1 = \alpha_1, a_1 = 3 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 2$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$.
  - 因此, 这个具有给定初始条件的递推关系的解为$a_n = 2^n + \frac{\mathrm{n}2^{\mathrm{n}}}{2}$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$，其中$a_0 = 1, a_1 = 6$.
- 解:
  - $r^2 - 6r + 9 = 0$的唯一根是$r = 3$.
  - 因此这个递推关系的解是$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$, 其中$\alpha_1$, α_2是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 1 = \alpha_1$, $a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 3$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$.
  - 因此, 这个具有给定初始条件的递推关系的解为$a_n = 3^n + n3^n$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 针对2阶线性齐次递推关系，前面两个定理解决了特征根是否相等时的求解．现在给出$\boldsymbol{k}$**阶线性齐次递推关系的一般性结果**(注意，阶数可以大于2且**没有重根**的情况).

- 定理3:设$c_1,c_2,\ldots,c_k$是实数．假定特征方程$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$有$k$个不相等的根$r_1, r_2, \cdots, r_k$．那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的解，当且仅当

$$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n}$$

其中$n = 0,1,2, \ldots,$ 并且$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$都是常数.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, 其中$a_0$=2, a_1=5, a_2=15.
- 解:
  - 特征方程为$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$. 该一元三次方程可以写为$(r-1)(r-2)(r-3)$ =0, 他们的根是$r = 1$, $r = 2$, $r = 3$.
  - 因此这个递推关系的解是$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$, 其中$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3$, $a_2 = 15 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$.
  - 因此, 解为$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 我们叙述关于k**阶常系数线性齐次递推关系的最一般化的结果**，这里**允许特征方程有重根**.

- 定理4:设$c_1,c_2,\ldots,c_k$是实数. $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$有$t$个不相等的根$r_1, r_2, \cdots, r_t$其重数分别为$m_1, m_2, \cdots, m_t$满足$m_i \geq 1$, $i = 0,1,2,\ldots,t$, 且$m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k$. 那么序列$\{a_n\}$是递推关系$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$的解, 当且仅当

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a_n} &= (\boldsymbol{\alpha_{1,0}} + \boldsymbol{\alpha_{1,1} n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}}) \boldsymbol{r_1^n} \\
&+ (\boldsymbol{\alpha_{2,0}} + \boldsymbol{\alpha_{2,1} n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}}) \boldsymbol{r_2^n} \\
&+ \cdots + (\boldsymbol{\alpha_{t,0}} + \boldsymbol{\alpha_{t,1} n} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}}) \boldsymbol{r_t^n}
\end{aligned}$$

$n = 0,1,2,\ldots,$ 其中$\alpha_{i,j}$是常数,$1 \leq i \leq t$且$0 \leq j \leq m_i - 1$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:假设线性齐次递推关系的特征方程的根为3, 3, 3, 4, 5, 5, 那么通解的形式是如何?
- 解:特征方程的根有3个根, 其中根3的重数为3, 根4的重数为1, 根5的重数为2. 则根据定理4可知通解为 $(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\alpha_{1,2}n^2)3^n+\alpha_{2,0}4^n+(\alpha_{3,0}+\alpha_{3,1}n)5^n$.

求解常系数线性齐次递推关系

- 例:求解$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, 其中$a_0$=1, a_1=-2, a_2=-1.
- 解:
  - 特征方程为$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$. 该一元三次方程可以写为$(r + 1)(r + 1)(r + 1) = 0$, 他们的根是一个重数为3的$r$ =-1.
  - 因此这个递推关系的解是$a_n = (\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)(-1)^n$，其中$\alpha_{1,0}$，$\alpha_{1,1}$，$\alpha_{1,2}$是常数.
  - 使用初始条件可得$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$，a_1 =-2= -$\alpha_{1,0}$ - $\alpha_{1,1}$ - $\alpha_{1,2}$，a_2 =-1= $\alpha_{1,0}$+2$\alpha_{1,1}$+4$\alpha_{1,2}$.
  - 求解这个方程组, 可得$\alpha_{1,0}$= 1, $\alpha_{1,1}$= 3, $\alpha_{1,2}$=-2.
  - 因此, 解为a_n =$(1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$.