第2.2节 鸽巢原理

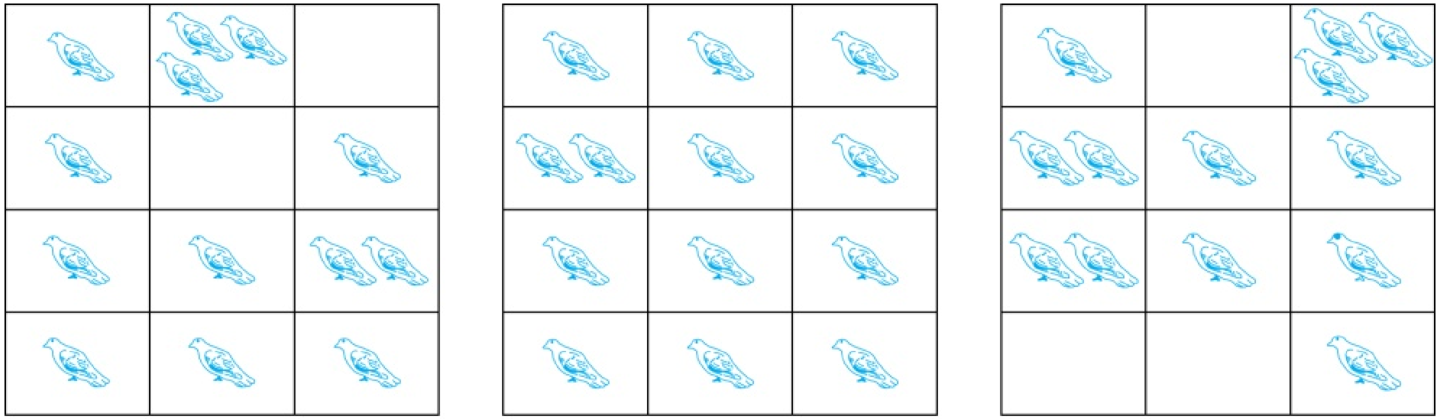
Section 2.2: The Pigeonhole Principle

知识要点

1. 鸽巢原理
2. 广义的鸽巢原理
3. 鸽巢原理的应用

鸽巢原理

- 如果有13只鸽子要飞往12个鸽巢．在这种情况下，一定会出现至少1个鸽巢中会最少有2只鸽子, 如下所示:



(a) (b) (c)

鸽巢原理

- **鸽巢原理**:如果$k+1$个或更多的物体放入k个盒子，那么至少有一个盒子包含了2个或更多的物体.
- 鸽巢原理也叫做**狄利克雷抽屉原理**，或者**鸽洞原理**，或者**鸽笼原理**. 难点在于实际应用中, 区分谁是物体, 谁是盒子.
- 证(反证法):假设k个盒子中没有一个盒子包含的物体多于1个，那么物体的总数至多为k, 这与有$k+1$个物体矛盾. 得证.

鸽巢原理

- 推论:一个从有$k+1$甚至更多的元素的集合到k个元素的集合的函数f不是一对一函数.

- 证:设函数f的陪域中每个元素y作为一个盒子，包含了定义域中满足$f(x) = y$的x. 因为定义域有$k+1$或者更多的元素，而陪域只有k个元素，所以由鸽巢原理可知，这些盒子中有一个包含了2个或者更多定义域的x的元素. 这就说明了f不是一对一函数.

【基础知识：一对一函数(又称单射)的概念】

鸽巢原理

- 例:在一组367个人中一定至少有2个人有相同的生日.
- 解:根据鸽巢原理，每一天作为盒子，人作为需要放置的物体．一定有至少2人的生日相同，因为一年中最多只有366个可能的生日(2月有29天时).

- 例:期末考试分数从0到100．班上必须有多少人才能保证至少有2个学生的分数相同?
- 解:根据鸽巢原理, 分数作为盒子对待, 共有101种情况, 那么102个学生中一定有至少2个人的分数相同.

鸽巢原理

- 例:在一个盒子中有10双黑色袜子，12双蓝色袜子，8双红色袜子，那么拿出4只袜子一定能保证有相同颜色的两只袜子.
- 解:根据鸽巢原理，这儿4只袜子作为需要放入盒子的物体，袜子的颜色作为盒子(共3个), 那么一定有至少2只袜子是相同的颜色.

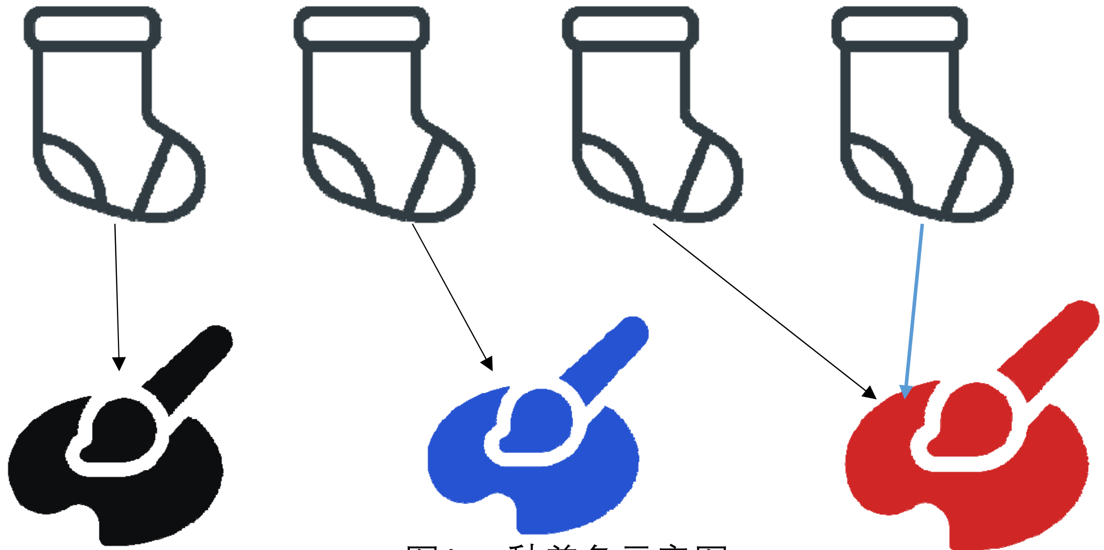


图1 一种着色示意图

鸽巢原理

- 例:在1到10中选取6个数, 那么其中必定有两个数之和为11.
- 解:这11个数中如下组合的两个数之和为11

  {1,10}, {2,9}, {3,8}, {4,7}, {5,6}

  根据鸽巢原理，这儿以上5个组合作为盒子，选取的数作为需要放入盒子的物体(共6个), 那么一定有两个数之和为11.

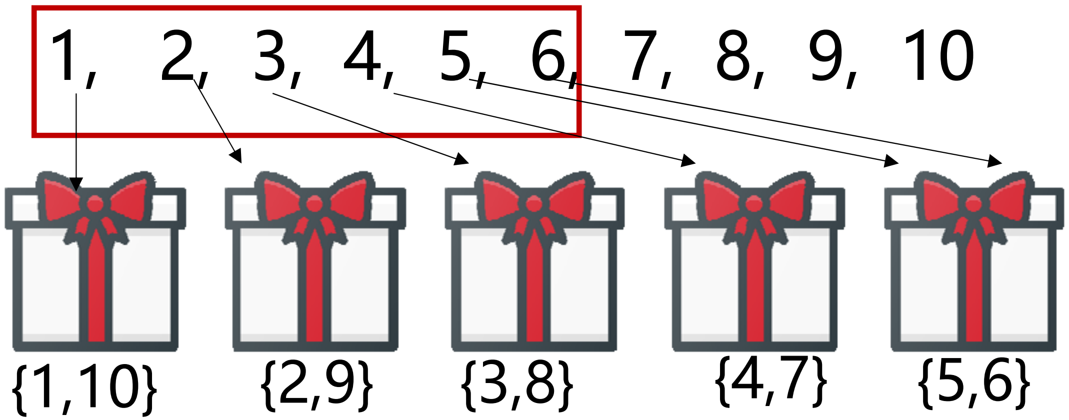


图2 一种选取6个数的方法

鸽巢原理

- 例:在一次酒会上有n个来宾，其中一些来宾互相握手致意．已知没有人和自己握手，两人之间最多握手一次．那么一定有两名来宾的握手次数相同.
- 解:
  - 来宾作为需要放入盒子的物体(n个)，握手的次数作为盒子．那么盒子最少可以是0, 最多可以是n-1. 但是握手次数不可能既有0, 又有n-1:
    - a)如果有来宾的握手次数为n-1，说明他和其他任何一个来宾都握手过，则不存在某来宾没有和其他人握手过.
    - b)类似地，如果有来宾的握手次数为0，说明他没有和其他任何一个来宾握手过，那么就不可能存在某个来宾和其他所有人都握手过(n-1).
  - 综上，盒子的个数最多为n-1个(0,1,2,...,n-1共有n个，在此基础上减去1个), 物体个数为n. 所以必定两个来宾具有相同的握手次数.

鸽巢原理

- 例:证明对于每个整数n，存在一个数是n的倍数且在它的十进制表示中只出现0和1(例如$n=4$, 那么存在100满足要求).
- 解:
  - 假设$n+1$(备注, 书上此处有误)个整数的表: 1, 11, 111, 111…1(有$n+1$个).
  - 一个整数去除以n时, 存在n个不同的可能余数, 0, 1, …, n-1. 这里可能的余数当做盒子.
  - 该表中有$n+1$个数当做物体，用这些数去除以n留下的余数的值确定放入的盒子. 根据鸽巢原理, 必定有两个整数在除以n时会有相同的余数.
  - 那么这两个整数之差一定只有0和1，并且它能够被n整除(备注, 这儿应用了数论的知识).

【同余: m整除$a-b$, $a \equiv b \pmod{m}$】

广义鸽巢原理

- **广义鸽巢原理**:如果N个物体放入k个盒子，那么至少有一个盒子包含了$\lceil N/k \rceil$个物体.

- 证明:假定没有盒子中包含了比 $\lceil N/k \rceil - 1$多的物体，那么物体的总数最多就只有:

$$k\left(\left\lceil\frac{N}{k}\right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

这与存在的总数N个物体相矛盾. 得证.

【相关基础知识：$\lceil x \rceil$代表上取整函数, 大于或等于实数x的最小整数. $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$】

广义鸽巢原理

- **普遍问题**：把物体分入k个盒子中，使得某个盒子至少有r个物体，求物体的最少个数.
- 解:物体设为N，根据广义鸽巢原理$\lceil N/k \rceil \geq r$，就能使得某个盒子至少有r个物体. 存在如下等式

$$r \leq \lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$$

$$r - 1 < N/k$$

$$k(r-1) < N$$

所以满足如上不等式的最小N值为$N=k(r-1)+1$.

广义鸽巢原理

- 例:张三在15天内做了170道题, 那么他一定某天做了至少12道题.
- 解:根据广义鸽巢原理，15天作为盒子k，170道题作为放入盒子的物体N. 那么$\lceil N/k \rceil = \lceil 170/5 \rceil$=12表示某天做的最少题数$r$.

广义鸽巢原理

- 例:如果有五种成绩A,B,C,D,E．在一个班上最少有多少个学生才能保证, 至少6个学生都得到相同的成绩?
- 解:为了保证至少r =6个学生都得到相同的成绩，五种成绩作为盒子k=5，需要的最少学生数是使得$\lceil N/5 \rceil$=6的最小整数N．该整数N = k(r-1)+1=5$*$(6-1)+1=26, 所以需要26个学生才能满足要求.

广义鸽巢原理

- 例:a)从一副标准的52张牌中必须选多少张才能保证选出的至少有3张是同样的花色？ b）必须选多少张才能保证选出的至少有3张是红心?
- 解:
  - a)假设有k =4个盒子用来分别保存4种不同花色的牌. 使用广义鸽巢原理如果选N张, 那么至少有一个盒子含有至少$\lceil N/4 \rceil$张牌. 现在r=3, 即需要 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$, 所以最小的N值为N = $k(r$-1)+1=4∗(3-1) + 1 = 9.
  - b）在最坏情况下，选一张红心前已经选了其他所有的黑桃、方块、梅花，共计39张，那么接下来选的3张牌都将只能是红心. 所以为了得到3张红心，可能需要选42张(此处没有使用广义鸽巢原理).

鸽巢原理的应用

- 例:在边长为2厘米的正三角形中, 放入5个点, 那么一定存在两个点的距离小于1厘米.
- 解:如图所示将正三角形划分为4个小正三角形, 其中每个小正三角形的边长为1厘米. 那么该问题变为将5个物体放入4个盒子中，一定有至少一个盒子中至少有两个点.

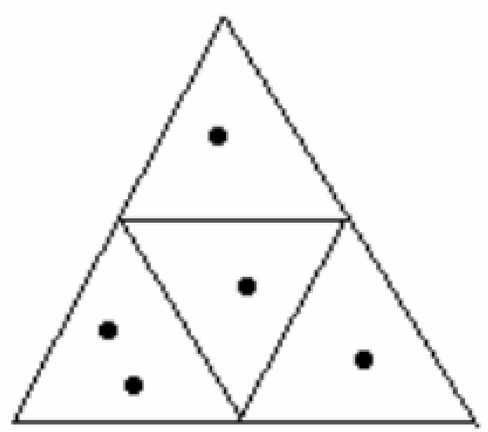
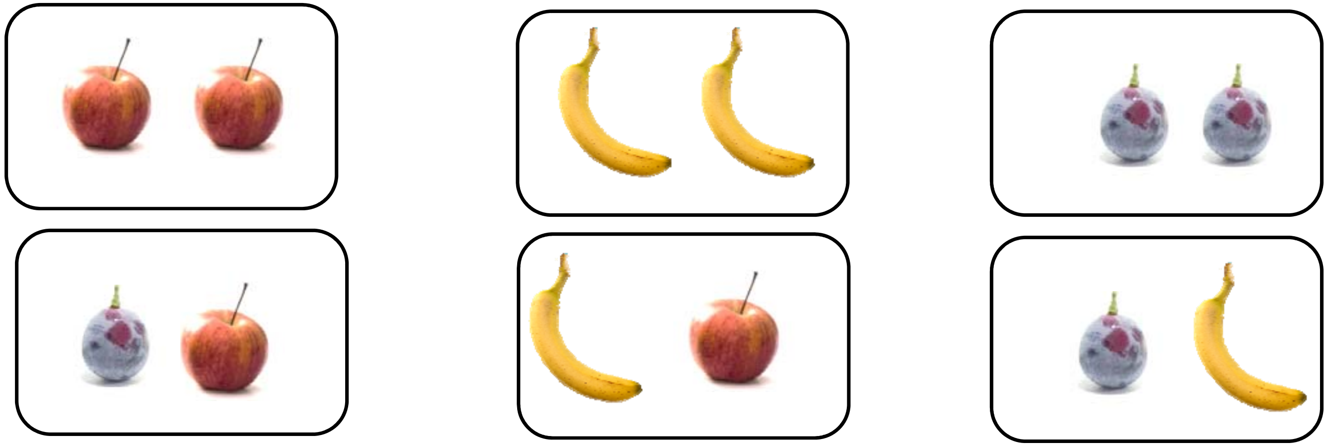


图3 一种放入5个点的方法

鸽巢原理的应用

- 例:某水果店里有苹果，香蕉，葡萄若干．7位小朋友每人任选两种．那么存在至少2位小朋友选择的水果种类相同.
- 解:三种水果任选两种共有如下6种不同情况



每种情况看作一个盒子，7位小朋友看作物体．那么一定有一个盒子会有至少2个物体.

鸽巢原理的应用

- 例:在30天的某个月内, 某球队一天至少打一场比赛, 最多打45场. 证明一定有连续的若干天恰好打了14场.
- 解:令a_j表示直到第j天共打的场数. 那么$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$是一个具有不同正整数的递增序列, 并且$1 \le a_j \le 45$.

  另一方面a_1+14, a_2+14, $a_3+14, \ldots, a_{30}+14$是一个具有不同正整数的递增序列, 并且$15 \le a_j + 14 \le 59$.

  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, a_3 + 14, \ldots, a_{30} + 14$这个具有60个正整数的序列中每个值都小于59.

  根据鸽巢原理,一定有两个值相同. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$中各不相同, $a_1 + 14, a_2 + 14, a_3 + 14, \ldots, a_{30} + 14$也各不相同. 所以存在下标$i$和$j$满足$a_i = a_j + 14$. 也就是说从第$j$ +1天到第i天打了14场比赛, 得证.