第2章 计数

崔金华

邮箱:jhcui@hust.edu.cn

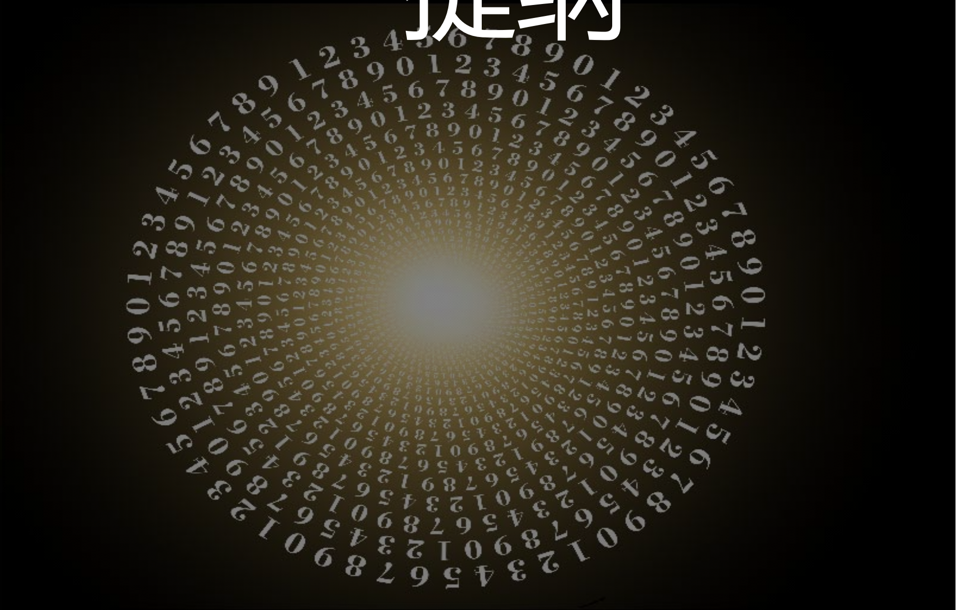
主页: https://csjhcui.github.io/

办公地址:华中科技大学南一楼东406 室

致谢:课件主要参考《 Discrete Mathematics and its application》(Seventh Edition) Keneth H. Rosen 和《离散数学》(第2版) 屈婉玲,耿素云,张立昂版本的相关课件, 特此致谢!!!

Contents

提纲



4 **计数**
Counting

5 **鸽巢原理**
The Pigeonhole Principle

6 **排列和组合**
Permutations and Combinations

7 **二项式系数和恒等式**
Binomial Coefficients and Identities

8 **排列和组合的推广**
Generalized Permutations and Combinations

第2.1节 计数的基础

Section 2.1: The Basics of Counting

知识要点

1. 基本的计数原则: 乘积法则
2. 基本的计数原则: 求和法则
3. 减法原则
4. 除法原则
5. 树图

基本的计数原则:乘积法则

- 当一个过程由独立的任务组成时, 可以使用乘积法则.
- **乘积法则**:假定一个过程可以被分解成两个任务. 如果完成第一个任务有n_1种方式, 在第一个任务完成之后有n_2种方式完成第二个任务(**两个任务彼此独立**), 那么完成这个过程有$n_1 * n_2$种方式.
- 适用于**分步选取计数问题**.
- 条件:无论第一个任务采用何种方式产生, 都不影响第二个任务.
- 把一个事件的产生方式分解为若干独立步骤, 对每个步骤进行计数, 然后使用乘积法则.

基本的计数原则:乘积法则

- 乘积法则也可以用集合的语言来定义:
- 如果 A_1, A_2, …, A_m是有穷集, 那么在这些集合的笛卡尔积中的元素数是每个集合的元素数之积.
- 在笛卡尔积(又称笛卡儿积)$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$中选一个元素的任务是通过在$A_1$中选一个元素, 在$A_2$中选一个元素, 以此类推, 由乘积法则得到:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|$$

【相关基础知识: 集合的概念、笛卡尔积、集合的基数等】

基本的计数原则:乘积法则

- 例:一个由0或1组成的共计7位的位串共有多少种?
- 解:这个位串上的每一位要么是0，要么是1．所以每一位有2种方式，因此7位的位串共计有$2^7=128$种.

基本的计数原则:乘积法则

- 例:某个字符串由两个字符组成, 第一个字符可选自{a,b,c,d,e,f}, 第二个字符可选自{0,1,2,3}, 则这个字符串共有多少个?
- 解:
  - 第一个字符可以从6个中选择一个,
  - 第二个字符可以从4个中选择一个,
  - 所以, 这个字符串共有$6*4=24$个.

基本的计数原则:乘积法则

- 例:如果车牌号由3个大写英文字母后跟着3个数字的序列构成，那么共有多少个不同的有效车牌?
- 解:车牌的前3位中每一位都可以选择26个大写英文字母中的任何一个字母，所以每一位有26种选择. 车牌后3位的每一位都可以选择0-9的任何数字，所以每一位都有10种选择. 所以有效车牌共有26 · 26 · 26 · 10 · 10 · 10 = 17,576,000 种.

$$\underbrace{\_\ \ \_\ \ \_}_{\text{每一位有26种选择}}\quad\underbrace{\_\ \ \_\ \ \_}_{\text{每一位有10种选择}}$$

基本的计数原则:乘积法则

- 例:计数函数, 从一个m元集到一个n元集存在多少个函数?
- 解:函数对应定义域中m个元素中的每一个元素都要选择陪域中n个元素中的一个元素来对应. 所以, 存在$n \cdot n \cdots n = n^m$个从m元集到n元集的函数.

【相关基础知识: 函数的概念】
备注: 该题书上有误

基本的计数原则:乘积法则

- 例: 北美洲编号计划 (NANP) 规定了某些地区的电话号码的格式. 电话号码由10个数字组成的三部分组成NYX-NNX-XXXX(老计划下的格式), 其中N表示2-9之间的数字, Y表示0或者1, X表示0-9之间的数字. 后来新计划的电话号码格式变为了NXX-NXX-XXXX. 求老新两种计划下各有多少个不同的电话号码?
- 解:
  - NYX部分有$8 \cdot 2 \cdot 10 = 160$个,
  - NNX有$8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$ 个,
  - XXXX有$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10{,}000$ 个,
  - NXX有$8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$个.
  - 所以, 老计划下共有$160 \cdot 640 \cdot 10{,}000 = 1{,}024{,}000{,}000$个不同的电话号码. 新计划下共有$800 \cdot 800 \cdot 10{,}000 = 6{,}400{,}000{,}000$个不同的电话号码.

基本的计数原则:求和法则

- **求和法则**: 如果完成第一项任务有n_1种方式，完成第二项任务有n_2种方式，并且这些任务**不能同时执行(不重叠)**，那么完成第一或第二项任务有$n_1 + n_2$种方式.
- 适用于**分类计数问题**. 对达成事件的方法集合进行划分，分别计数，然后使用求和法则.

基本的计数原则:求和法则

- 求和法则也可以用集合的语言来定义:
- 如果A和B是不相交的子集，那么其并集的元素数是每个集合的元素之和．令T是从A或B中选择一个元素的任务，有$|A \cup B|$种方式执行T. 由于两个任务不能同时执行，所以从集合中选择一个元素的方式数，即为在并集中的元素, 等于$|A \cup B| = |A| + |B|$, 其中$A \cap B = \emptyset$.
- 更一般地，任务从A_i中选择一个元素，其中A_1，A_2,⋯，A_m，那么等于$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$ ，其中$A_i \cap A_j = \emptyset$对于所有的i, j.

【相关基础知识：子集、并集∪、交集∩的概念】

基本的计数原则:求和法则

- 例:假定要选择一位教师或学生作为校委会的代表．现在有37位教师候选人, 83位学生候选人. 那么这个代表有多少种不同的选择呢?
- 解:
  - 完成第一项任务, 选一位教师有37种方式.
  - 完成第二项任务, 选一位学生有83种方式.
  - 根据求和法则, 共有37 + 83 = 120种不同的方式来挑选这个代表.

基本的计数原则:求和法则

- 例：一个学生可以从三个表中的一个表中选择一个课题来完成作业. 三个表中分别有23,15,19个课题, 那么这个学生有多少种选择方案呢?
- 解:
  - 该学生可以从第一个表中选择课题, 有23种可能;
  - 也可以从第二个表中选择课题, 有15种可能;
  - 也可以从第三个表中选择课题, 有19种可能.
  - 因此, 共有23+15+19=57种不同的方案.

复杂的计数问题

- 前面分别讲述了乘积法则和求和法则．但是现实中很多计数问题不能仅仅只使用乘积法则(分步)或求和法则(分类)就能求解．许多复杂的问题可能需要同时使用两个法则.

- 例:某编程语言中变量要求要么是单个英文字母，要么一个英文字母后面跟着一个数字. 请问共有多少种不同的变量?
- 解:V为不同变量的个数，V_1为单个英文字母的变量名的个数．V_2为字母紧跟数字的变量名的个数．V_1共有26种，V_2中第一项任务有26种可能，第二项任务有10种可能，所以根据乘积法则V_2共有26$*$10种可能. 根据求和法则$V = V_1 + V_2 = 26 + 26 \cdot 10 = 286$种不同的变量.

复杂的计数问题

- 例:计算机系统中要求用户设定一个6~8位的密码．其中每位是大写字母或者数字，且密码中必须至少包含一个数字．共有多少可能的密码?
- 解:设P是可能的密码总数，P_6，P_7，P_8分别是密码数为6,7,8位的密码数. 根据求和法则, $P = P_6 + P_7 + P_8$.
  - 其中P_6，先求6位的由大写字母和数字构成的密码数(它包含了没有数字的密码), 然后减去没有数字的密码, 所以$P_6 = 36^6 - 26^6$ =1,867,866,560.
  - 类似的，$P_7 = 36^7 - 26^7$ = 70,332,353,920.
  - 然后, $P_8 = 36^8 - 26^8$ =2,612,282,842,880.
  - 因此, $P = P_6 + P_7 + P_8$ = 2,684,483,063,360.

复杂的计数问题

- 例:假设从华中科技大学到武汉大学有3条道路，从武汉大学到华中师范大学有4条道路，从华中科技大学直接到华中师范大学有5条道路，则从华中科技大学到华中师范大学共有多少种不同的方式?
- 解:从华中科技大学到华中师范大学共有$5 + 3*4 = 17$种不同的方式.

- 例:某套装中上装有T恤和衬衣两种，下装为长裤. T恤可选红色，蓝色，橙色. 衬衣可选白色，黄色，粉色. 长裤可选黑色，棕色. 该套装共有多少种着色方案?
- 解:共有$(3+3)*2 = 12$种不同的方案.

基本的计数原则:减法法则

- 假设一项任务可以通过两种方法之一来完成，但是这两种方法中有些是相同的. 这时采用求和法则来计算完成任务的方法数是不正确的. 如果将两种方法的数量相加，总数会超过正确结果，因为我们将两种方法中相同的部分算了两次. 为了获得正确的结果，我们必须减去算了两次的结果, 这就产生了一个重要的计数法则.
- **减法法则**:如果一个任务或者可以通过n_1种方法执行，或者可以通过n_2种另一类方法执行，那么执行这个任务的方法数是n_1+n_2然后减去两类方法中执行这个任务相同的方法.
- 减法法则也称为**容斥原理**, 即:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

基本的计数原则:减法法则

- 例:以1开始或者以00结束的8位位串有多少个?
- 解:如下图所示，以1开始的8位位串共有$2^7 = 128$种. 以00结束的位串共有$2^6 = 64$种. 同时以1开始以00结束的位串有$2^5 = 32$种. 所以以1开始或者以00结束的情况共有$128 + 64 - 32 = 160$种.