4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 常用的证明的方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法** (详见下页内容)
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)**

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 【**附加前提证明法**】推理形式为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B)$. 将结论的前件$A$作为推理的前提(A称作附加前提)，结论为$B$，即推理形式改写为$\boldsymbol{(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B}$，称作附加前提证明法(Conclusion Premise Rule, 简称CP规则).

$$
\begin{aligned}
& (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B
\end{aligned}
$$

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - “如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影.”
  - “小赵不去看电影, 或小张去看电影.”
  - “小王去看电影.”
  - “如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影.”

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

- 例:根据以下前提(前三行), 用推理规则建立论证, 证明结论(第四行):
  - “如果小张和小王去看电影, 则小李也去看电影.”
  - “小赵不去看电影, 或小张去看电影.”
  - “小王去看电影.”
  - “如果小赵去看电影, 那么小李也去看电影.”
- 解:
  - 定义命题变元. p: “小张去看电影” q: “小王去看电影” r: “小李去看电影” s: “小赵去看电影”
  - 翻译以上语句前提为: $(p\wedge q) \rightarrow r$, $\neg s \vee p$, q, 结论为$s \rightarrow r$.
  - 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 如下所示:

4.6.3 构造证明法-附加前提证明法

已知$(p \wedge q) \rightarrow r$，$\neg s \vee p, q$
结论为$s \rightarrow r$

- 解(续):

步骤	理由
1.s	附加前提引入
2.$\neg s \vee p$	前提引入
3.p	析取三段, 用步骤1和2
4.q	前提引入
5. $p \wedge q$	合取引入, 用步骤3和4
6.$(p \wedge q) \rightarrow \mathrm{r}$	前提引入
7.r	假言推理, 用步骤5和6

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 常用的证明的方法包括:
  - 1) **直接证明法**: 由前提$A_1, A_2, \cdots, A_k$出发, 应用推理规则, 推出B
  - 2) **附加前提证明法**
  - 3) **归谬证明法(或简称归谬法)** (详见下页内容)

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 【**归谬法**】推理的形式结构为$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$. 将结论B的否定作为推理的前提，即$\boldsymbol{A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B}$，推出矛盾(例如$A \wedge \neg A$)，则说明推理正确. 这种将结论的否定式作为附加前提引入并推出矛盾式的证明方法称作归谬证明法(或简称归谬法).

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

若 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B)$为矛盾式，则说明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$为重言式, 即由前提能推出结论$B$.

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例: 使用归谬法证明前提$(p \wedge q) \rightarrow r$, $\neg r \vee s$,$\neg s$, p, 能推出结论$\neg q$

4.6.3 构造证明法-归谬法

- 例: 使用归谬法证明前提$(p \wedge q) \rightarrow r$, $\neg r \vee s$,$\neg s$, p, 能推出结论$\neg q$
- 解: 步骤 理由

步骤	理由
1.q	结论的否定引入
2.$\neg r \vee s$	前提引入
3.$\neg s$	前提引入
4.$\neg r$	析取三段论, 用步骤2和3
5.$(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引入
6.$\neg(p \wedge q)$	取拒式, 用步骤4和5
7.$\neg p \vee \neg q$	德摩根律, 用步骤6
8. p	前提引入
9. $\neg q$	析取三段论, 用步骤7和8
10. $q \wedge \neg q$	合取律, 用步骤1和9

- 由于最后得到矛盾式$q \wedge \neg q$, 即证明前提$(p \wedge q) \rightarrow r$, $\neg r \vee s$,$\neg s$, p, 能推出结论$\neg q$

4.6.4 量化命题的推理

- 推理规则包括:
  - 1, 命题逻辑的推理规则 (前面已讲解)
  - 2, **量化命题的推理规则** (备注: 本小节内容)
- 我们现在开始量化命题的推理规则

4.6.4 量化命题的推理规则1:全称实例

- **全称实例**：从给定前提$\forall x P(x)$得出$P(\mathrm{c})$为真的推理规则，其中c是论域里的一个特定成员.

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 例:p表示“Fido是一条狗” 论域U表为全部的狗. 假设语句“所有的狗都可爱”为真, 那么“Fido是可爱的”为真.

4.6.4 量化命题的推理规则2:全称引入

- **全称引入**: 对论域里所有元素c都有$P(\mathrm{c})$为真的前提, 推出$\forall x P(x)$为真.

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{任意c}}{\therefore\ \forall x P(x)}$$

- 经常在数学证明中隐式使用该规则.

4.6.4 量化命题的推理规则3:存在实例

- **存在实例**: 如果我们知道$\exists x P(x)$为真，得出在论域中存在一个元素c使得$P(\mathrm{c})$为真.

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore\ P(\mathrm{c}),\ \text{对某个元素}}$$

- 例:假设条件语句“有人在课程考试中获得成绩A”为真，那么“如果我们把他叫做a,我们可以说a获得成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则4:存在引入

- **存在引入**: 已知一个特定c使得$P(\mathrm{c})$为真, 得出结论$\exists x P(x)$为真

$$\frac{P(\mathrm{c}),\ \text{对某个元素}}{\therefore\ \exists x P(x)}$$

- 例:假设条件语句“Michelle在课程中获得了成绩A”为真，那么可以得出推论“有人在课程中获得了成绩A”.

4.6.4 量化命题的推理规则

- 量化命题推理规则总结:

推理规则	名称
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	全称实例
$\dfrac{P(c),\text{任意}c}{\therefore \forall x P(x)}$	全称引入
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c),\text{对某个元素}}$	存在实例
$\dfrac{P(c),\text{对某个元素}}{\therefore \exists x P(x)}$	存在引入

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 例: 使用推理规则证明“约翰史密斯有两条腿”是以下前提的结论: “每个人都有两条腿” “约翰史密斯是个人”

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 例: 使用推理规则证明“约翰史密斯有两条腿”是以下前提的结论: “每个人都有两条腿” “约翰史密斯是个人”
- 解: $M(x)$表示“x是个人”, $L(x)$表示“x 有两条腿”, 约翰史密斯是论域中的一个值. 翻译以上语句前提为: $\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$, $M(J)$, 结论为 $L(J)$. 构造一个论证来证明以上前提能够推出结论, 推理过程如下:

步骤	理由
1. $\forall x(M(x) \rightarrow L(x))$	前提引入
2. $M(J) \rightarrow L(J)$	全称实例, 用步骤1
3. $M(J)$	前提引入
4. $L(J)$	假言推理, 用步骤2和3

备注: 其实可以组合使用

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 论证中常常组合使用全称实例和假言推理, 这种组合被称为: **全称假言推理**

$$\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$$

$$\underline{\mathrm{P}(a), a\text{是论域中的一个特定元素}}$$

$$\therefore Q(a)$$

- 全称假言推理常常用于数学论证中, 比如之前苏格拉底的例子.

$$\forall x(Man(x) \rightarrow Mortal(x))$$

$$\underline{Man(\mathrm{Socrates})}$$

$$\therefore Mortal(Socrates)$$

4.6.4 命题和量化命题的推理规则的组合使用

- 将全称实例和取拒式组合在一起的组合称为: **全称取拒式**

$$\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$$

$$\underline{\neg Q(a), a\text{是论域中的一个特定元素}}$$

$$\therefore \neg P(a)$$

4.6.5 推理规则综合应用

- 例: 公安人员审查了一起重大珠宝盗窃案, 已获得以下线索:
  - (1) 张三或者李四盗窃了珠宝;
  - (2) 若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
  - (3) 若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
  - (4) 若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
  - (5) 午夜时商店的灯光灭了.

  请问张三和李四谁该受到法律的制裁?

4.6.5 推理规则综合应用

- 例: 公安人员审查了一起重大珠宝盗窃案, 已获得以下线索:
  - (1) 张三或者李四盗窃了珠宝;
  - (2) 若李四的证词正确, 则商店午夜时灯管未灭;
  - (3) 若张三盗窃了珠宝, 则作案时间不可能发生在午夜前;
  - (4) 若李四的证词不正确, 则作案时间发生在午夜前;
  - (5) 午夜时商店的灯光灭了.

  请问张三和李四谁该受到法律的制裁?

- 解:李四是盗窃犯. 设A:张三盗窃珠宝; B: 李四盗窃珠宝; C:李四的证词正确; D:商店午夜时灯管未灭; E:作案时间发生在午夜前. 符号化为 $(A \vee B) \wedge (C \to D) \wedge (A \to \neg E) \wedge (\neg C \to E) \wedge \neg D$, 推理得到结论A或B.

4.6.5 推理规则综合应用

已知(A ∨ B)∧(C → D)∧(A → ¬E)∧(¬C → E)∧ ¬D
得到A或者B

- 解(续):

步骤	理由
1.$\neg D$	前提引入
2.$C \rightarrow D$	前提引入
3.$\neg C$	取拒式, 用步骤1和2
4.$\neg C \rightarrow E$	前提引入
5. E	假言推理, 用步骤3和4
6. $A \rightarrow \neg E$	前提引入
7. $\neg A$	取拒式, 用步骤5和6
8. $A \vee B$	前提引入
9. B	析取三段论, 用步骤7和8

第4.6节 推理规则总结

- 1、命题逻辑的推理规则
  - 假言推理、取拒式、假言三段论、析取三段论、附加律、化简律、合取律、消解律、构造性二难推理、破坏性二难推理
- 2、使用推理规则建立论证
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法
- 3、量化命题的推理规则
  - 全称实例、全称引入、存在实例、存在引入、全称假言推理、全称取拒式