$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

T F

1 0

第4.4节 谓词和量词

Section 4.4: Predicates and Quantifiers

我们将学到的知识

- 谓词
- 变量
- 量词
  - 全称量词
  - 存在量词
- 否定量词
  - 德摩根的量词定律
- 将语句翻译为逻辑表达式

4.4.1 谓词逻辑

- 如果我们知道:
  “所有的人都是凡人.”
  “苏格拉底是一个人.”
- 能否得出“苏格拉底是一个凡人”？

- 不能够用命题逻辑表达出来. 需要一种新的逻辑来表达这种情况. 接下来, 我们介绍一种表达能力更强的逻辑---**谓词逻辑**.

4.4.1 谓词逻辑

- 谓词逻辑包含以下新特征:
  - **变量**: x, y, z
  - **谓词**: $P(x), M(x)$
  - **量词** (后续章节会详细讲)

- **命题函数**是命题的推广
  - 它包含各种变量和谓词, 例如$P(x)$
  - 变量可以被它域中的元素代替.

4.4.1 命题函数

- 命题函数将变为命题(具有真值)，当它的每个变量被由其域中的元素替换(或者被量词约束, 后续章节会讲).
- 语句$P(x)$表达函数P在x下的值. 例, $P(x)$表示 “$x > 0$”, 域是整数. 那么:
  - $P(-3)$ 为假.
  - $P(0)$ 为假.
  - $P(3)$ 为真.
- 通常, 用U表示域. 在上面例子中U是整数.

4.4.1 命题函数

- 例:$R(x,y,z)$表示 “$x+y=z$”，U(对于三个变量)表示整数．确定下面的真值是什么: R(2,-1,5), R(3,4,7), R(x, 3, z)
- 解: R(2,-1,5)为假, R(3,4,7)为真, R(x, 3, z)不是命题.

- 例:$Q(x,y,z)$表示 “$x-y=z$”, U表示整数. 确定下面的真值是什么: Q(2,-1,3), Q(3,4,7), Q(x, 3, z)
- 解: Q(2,-1,3)为真, Q(3,4,7)为假, Q(x, 3, z)不是命题.

4.4.1 复合表达式

- 表达式中包含变量, 那它就不是命题, 所以也不存在真值, 例如:

  $P(3) \wedge P(y)$

  $P(x) \rightarrow P(y)$

- 但是, 当用量词后, 这些表达式(命题函数)就变成了命题.

4.4.2 量词

- 我们需要**量词**来表达语句中的“所有”,”一些”：
  - “所有的人都是凡人”
  - “有些猫没有毛”

- 最重要的两个量词:
  - **全称量词**, “所有,” 符号∀称为全称量词.
  - **存在量词**, “有些,” 符号∃称为存在量词.

4.4.2 全称量词

❑定义: $P(x)$的**全称量化**是语句“$P(x)$对x在其论域的所有值为真.” 符号$\forall x P(x)$表示$P(x)$的全称量化, 其中$\forall$称为全称量词. 命题$\forall x P(x)$读作“对于所有x, $P(x)$”或“对于每一个x, $P(x)$”. 一个使$P(x)$为假的个体称为$\forall x P(x)$的反例.

命题	什么时候为真(T)	什么时候为假(F)
$\forall x P(x)$	对每一个x, $P(x)$都是真	有一个x, $P(x)$是假

❑例:

➢如果$P(x)$表示“$x > 0$”, U表示整数, 那么$\forall x P(x)$为假.

➢如果$P(x)$表示“$x > 0$” , U表示正整数, 那么$\forall x P(x)$为真.

➢如果$P(x)$表示“x 是偶数” , U表示整数, 那么$\forall x P(x)$为假.

4.4.2 存在量词

- 定义：$P(x)$的**存在量化**是命题"论域中存在一个个体x,满足$P(x)$." 符号$\exists xP(x)$表示$P(x)$的存在量化，其中$\exists$称为存在量词．命题$\exists xP(x)$读作"有一个x,满足$P(x)$"或"至少有一个x,满足$P(x)$"或"对某个x, $P(x)$".

命题	什么时候为真(T)	什么时候为假(F)
$\exists xP(x)$	有一个x, $P(x)$为真	对每一个x, $P(x)$都为假

- 例:
  - 如果$P(x)$表示"$x>0$", U表示整数, 那么$\exists xP(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示"$x>0$"，U表示正整数, 那么$\exists xP(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示"$x<0$"，U表示正整数, 那么$\exists xP(x)$为假.
  - 如果$P(x)$表示"x是偶数"，U表示整数，那么$\exists xP(x)$为真.

4.4.2 唯一性量词

- 对于我们能定义的不同量词的数量是没有限制的，如“恰好有两个”. 所有其他量词中最常见的一个是**唯一性量词**.
- 定义:$\exists!\, \boldsymbol{xP(x)}$或$\exists_1 \boldsymbol{xP(x)}$表示存在<u>一个唯一的</u>$x$使得$P(x)$为真.
- 通常如下表述:
  - “恰好存在一个x使得$P(x)$”
  - “有且只有一个x使得$P(x)$”

- 例:
  - 如果$P(x)$表示“ x + 1 = 0 ”, U表示整数, 那么$\exists!\, xP(x)$为真.
  - 如果$P(x)$表示“x > 0 ”, U表示整数, 那么$\exists!\, xP(x)$为假.

4.4.2 关于量词的思考

- 当域是有限时, 我们可以将量化视为循环遍历域的元素.
- **1) 为了验证$\forall x P(x)$循环遍历域的所有元素**:
  - 如果每一个循环步骤$P(x)$为真, 那么$\forall x P(x)$为真.
  - 如果在某个循环步骤$P(x)$为假, 那么$\forall x P(x)$为假, 循环终止.
- **2) 为了验证$\exists x P(x)$循环遍历域的所有元素**:
  - 如果在某个循环步骤, $P(x)$为真, 那么$\exists x P(x)$为真, 循环终止.
  - 如果循环结束都没有找到$P(x)$为真的x, 那么$\exists x P(x)$为假.
- $\forall x P(x)$和 $\exists x P(x)$的真值取决于命题函数$P(x)$和域U.
- 即使域是无限的, 我们仍然可以采用如上方法, 但在某些情况下循环不会终止.

4.4.2 量词的属性

- 例: 判断$\forall x P(x)$和 $\exists x P(x)$的真值
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”

4.4.2 量词的属性

- 例: 判断$\forall x P(x)$和 $\exists x P(x)$的真值
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”
- 解:
  - 如果U是正整数, $P(x)$表示“$x < 2$”，那么 $\exists x P(x)$为真, $\forall x P(x)$ 为假.
  - 如果U是负整数, $P(x)$表示“$x < 2$”，那么$\exists x P(x)$和$\forall x P(x)$都为真.
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x > 2$”，那么$\exists x P(x)$和$\forall x P(x)$都为真.
  - 如果U由3, 4, 5组成, $P(x)$表示“$x < 2$”，那么$\exists x P(x)$和$\forall x P(x)$都为假.

4.4.3 受限域的量词

- 在要限定一个量词的论域时通常会采用简单的表示法．也就是变量必须要满足的条件直接放在量词的后面.
- 例: $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$可以写作$\forall_{x<0}\,(x^2 > 0)$

4.4.4 量词的优先级

- 量词∀和∃的优先级高于所有的逻辑运算符.

运算符	优先级
$\forall\exists$ $\neg$	**1** 2
$\wedge$ $\vee$	3 4
$\rightarrow$ $\leftrightarrow$	5 6

- 例, $\forall xP(x)\vee Q(x)$表示$(\forall xP(x))\vee Q(x)$

思考:同时有全称量词和存在量词，那么优先级如何确定呢?

4.4.4 量词的优先级

- 量词作用于变量x，此变量这次出现为**约束的**．如果一个变量的出现是**自由的**，如果没有被量词约束或设置为等于某个特定值.
- 命题函数中所有的变量出现必须是约束或者被设定为某个特定值，它才能转化为一个命题.

- 例,$\exists x(x+y=1)$中变量x受存在量词约束, y是自由的.
- 例,$\exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall x R(x)$中所有变量受约束. 第一个存在量词的作用域是$P(x) \land Q(x))$，第二个全称量词的作用域是$R(x)$．因此，两个量词的作用域不重叠，可以用两个不同的变量来同等表示$\exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall y R(y)$.

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例：翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的每个学生都学习过Java课程.”

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例：翻译以下语句为谓词逻辑"这个课堂上的每个学生都学习过Java课程."
- 解:首先确定域U.
  - 解1: 如果U表示这个课堂的所有学生, 定义命题函数$J(x)$为"x学习过Java课程", 那么翻译为$\forall x J(x)$.
  - 解2: 如果U表示所有人, 定义命题函数$S(x)$为"x是在这堂课上的一个学生", 那么可以翻译为$\forall x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$.【注意$\forall x\big(S(x) \wedge J(x)\big)$是不对的. 因为它表示所有人都是这个班上的学生, 并且都学习过Java课程】
- 思考:答案非唯一, 域U不同, 结果可能不同.

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例：翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的某些学生学习过Java课程.”

4.4.5 将语句翻译为逻辑表达式

- 例：翻译以下语句为谓词逻辑“这个课堂上的某些学生学习过Java课程.”
- 解:首先确定域U.
  - 解1: 如果U表示这个课堂的所有学生, 定义命题函数$J(x)$为“x参加过Java课程”, 那么翻译为$\exists x J(x)$.
  - 解2: 如果U表示所有人, 定义命题函数$S(x)$为“x是在这堂课上的一个学生”, 那么可以翻译为$\exists x\big(S(x) \land J(x)\big)$. 【注意$\exists x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$是不对的. 因为当一个人不是这个班上的学生时, 该表述也为真】

4.4.6 谓词逻辑中的逻辑等价

- 涉及谓词和量词的语句在逻辑上是等效的，当且仅当它们具有相同的真值时
  - 无论用什么样的谓词代入语句
  - 也无论为这些命题函数的变量指定什么域.
- $S \equiv T$ 表示S 和T 是逻辑等价的.
- 例: $\forall x \neg\neg J(x) \equiv \forall x J(x)$

4.4.6 思考量词为合取、析取

- 如果域是有限的，全称量词等价于多个没有量词的命题的合取．存在量词等价于多个没有量词的命题的析取.
- 如果U包含整数1,2,3:

$$\forall x P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$
$$\exists x P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3)$$

- 如果域是无限的，仍然可以如上思考，只是没有量词的等价式将无限长.

4.4.7 量化表达的否定

- **全称量词的否定**:
- 例: 思考$\forall x J(x)$表达“班上的每个学生都参加过微积分课程”, 这儿$J(x)$表达“x参加过微积分课程”，域U为班上的所有同学. 那么该表达的否定是什么?
- 解: 考虑它的否定: “并非班上的每个学生都参加过微积分课程”, 等价于“班上有学生没有参加过微积分课程”. 翻译为$\exists x \neg J(x)$.

- **结论**:$\neg \forall x J(x)$和$\exists x \neg J(x)$是逻辑等价的.

$$\neg \forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$$

4.4.7 量化表达的否定

- **存在量词的否定**:
- 例: 思考$\exists xJ(x)$表示"班上有一个学生学习过微积分课程", 这儿$J(x)$表达"x参加过微积分课程", 域U为班上的所有同学. 那么该表达的否定是什么?
- 解: 考虑它的否定:"并非班上有学生学习过微积分课程", 也可以表述为"班上每个学生都没有学习过微积分课程", 翻译为$\forall x \neg J(x)$.

- **结论**:$\neg \exists xJ(x)$和$\forall x \neg J(x)$是逻辑等价的.

$$\neg \exists xJ(x) \equiv \forall x \neg J(x)$$

4.4.7 量词的德摩根律

- 总结以上规则为:

否定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg\forall x J(x)$	$\exists x \neg J(x)$	有x, 使得$J(x)$为假	对每个x, $J(x)$为真
$\neg\exists x J(x)$	$\forall x \neg J(x)$	对每个x, $J(x)$为假	有x, 使得$J(x)$为真

- 表格中表明:
  - $\neg\forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$
  - $\neg\exists x J(x) \equiv \forall x \neg J(x)$

  (备注: 以上很重要, 后续将会用到)

4.4.8 系统规范说明

- 之前我们用命题来表示系统规范说明．然而，许多系统规范说明涉及谓词和量词. 谓词逻辑可以用来描述系统规范说明.
- 例:翻译以下语句:
  - “每封大于1MB的邮件会被压缩.”
  - “如果一个用户处于活动状态, 那么至少有一条网络链路是有效的.”

4.4.8 系统规范说明

- 之前我们用命题来表示系统规范说明．然而，许多系统规范说明涉及谓词和量词. 谓词逻辑可以用来描述系统规范说明.
- 例:翻译以下语句:
  - “每封大于1MB的邮件会被压缩.”
  - “如果一个用户处于活动状态, 那么至少有一条网络链路是有效的.”
- 解:
  - $L(m, y)$表示“邮件m大于yMB”
  - $C(m)$表示“邮件m会被压缩”
  - $A(u)$表示“用户u处于活动状态”
  - $S(n, x)$表示“网络链路n处于x状态”
  - 那么翻译为: $\forall m(L(m, 1) \rightarrow C(m))$
  - $\exists u A(u) \rightarrow \exists n S(n, \text{有效})$

4.4.8 路易斯.卡罗尔的例子

Charles Lutwidge Dodgson
(AKA Lewis Caroll)
(1832-1898)

- 前两句为前提, 第三句为结论.
  - "所有狮子都是凶猛的."
  - "有些狮子不喝咖啡."
  - "有些凶猛的动物不喝咖啡."
- $P(x)$表示"x是狮子," $Q(x)$表示"x是凶猛的," $R(x)$表示"x喝咖啡", 那么以上三句话可以表述为:
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $\exists x\left(P(x) \wedge \neg R(x)\right)$
  - $\exists x\left(Q(x) \wedge \neg R(x)\right)$

(备注: 推论过程后面章节会讲)