

Równanie przewodnictwa cieplnego

Projekt 3

Kod programu

Na podstawie https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_solution_of_the_convection-diffusion_equation przyjmujemy, że krok czasu $k < \frac{h^2}{2\alpha}$, gdzie h jest krokiem "przestrzennym". Jednocześnie mamy $k = tg/(m-1)$, zatem przyjmujemy $m = \lceil x/k + 1 \rceil + 1$.

```
Clear[cieplojawne];
cieplojawne[α_, a_, b_, n_, tg_, u0_, ua_, ub_, u_] :=
Module[{zmiennne, wskazniki, h =  $\frac{b-a}{n-1}$ , k, w, eq, expr, const, neweq,
  macierz, wyrazyWolne, xi, tj, rozwiazanie, matrix, solution, dummy,
  wykres, bledy, rozwiazanieWykres, bledyWykres, bledyWykresPlot, m},
  m = Ceiling[ $\frac{2 \alpha tg}{h^2} + 1$ ] + 1;
  k =  $\frac{tg}{m-1}$ ;
  (* Siatki *)
  xi = Table[a + (i - 1) * h, {i, n}]; tj = Table[(j - 1) * k, {j, m}];

  (* Wartości znane z warunków *)
  rozwiazanie = Table[ui,j, {i, n}, {j, m}];
  Do[rozwiazanie[[i, 1]] = u0[xi[[i]]], {i, 1, n}];
  Do[rozwiazanie[[1, j]] = ua[tj[[j]]], {j, 1, m}];
  Do[rozwiazanie[[n, j]] = ub[tj[[j]]], {j, 1, m}];

  (* Budowa układu równań *)
  macierz = Table[
    eq = rozwiazanie[[i, j]] =  $\frac{\alpha k}{h^2}$  (rozwiazanie[[i + 1, j - 1]] - 2 rozwiazanie[[i, j - 1]] +
      rozwiazanie[[i - 1, j - 1]]) + rozwiazanie[[i, j - 1]];
    expr = eq /. Equal → Subtract;
    const = expr /. Map[# → 0 &, Variables[expr]];
    neweq = expr - const == -const, {i, 2, n - 1}, {j, 2, m}];
  macierz = Flatten[macierz];

  wskazniki = Sort[DeleteDuplicates[Flatten[Table[
```

```

      {{i - 1, j}, {i, j}, {i + 1, j}, {i, j - 1}, {i, 2, n - 1}, {j, 2, m}}, 2]]];
zmienne = Sort[DeleteDuplicates[
  Flatten[Table[{ui-1,j, ui,j, ui+1,j, ui,j-1}, {i, 2, n - 1}, {j, 2, m}], 2]]];

(* Rozdzielenie zmiennych od wyrazów wolnych *)
matrix = Table[0, {nm - n - 2 m + 2}];
wyrazyWolne = Table[0, {nm - n - 2 m + 2}];
Do[matrix[[i]] = macierz[[i, 1]];
  wyrazyWolne[[i]] = macierz[[i, 2], {i, nm - n - 2 m + 2}];

(* Wyciągnięcie macierzy współczynników *)
matrix = Normal@CoefficientArrays[matrix, zmienne][[2]];

(* Rozwiązanie *)
solution = LinearSolve[matrix, wyrazyWolne];

dummy = Table[0, {n}, {m}];
Do[
  dummy[[i][1], i[[2]]] = solution[[Position[wskazniki, i][[1, 1]], {i, wskazniki}]];

Do[rozwiazanie[[i, j]] = dummy[[i, j], {i, 2, n - 1}, {j, 2, m}];

(* Tworzenie wykresu *)
wykres = Table[{xi[[i]], tj[[j]], rozwiazanie[[i, j]], {i, n}, {j, m}}];
dummy = {};
Do[dummy = Append[dummy, wykres[[i, j]], {i, n}, {j, m}];
rozwiazanieWykres =
  ListPointPlot3D[dummy, PlotTheme -> "Business", PlotRange -> All];

(* Błędy *)
bledy = Table[
  {xi[[i]], tj[[j]], Abs[rozwiązanie[[i, j]] - u[xi[[i]], tj[[j]]]}], {i, n}, {j, m}];
bledyWykres = {};
Do[bledyWykres = Append[bledyWykres, bledy[[i, j]], {i, n}, {j, m}];
bledyWykresPlot =
  ListPlot3D[bledyWykres, PlotTheme -> "Business", PlotStyle -> 96];

Return[
  {Show[Plot3D[u[x, t], {x, a, b}, {t, 0, tg}, PlotStyle -> Green, PlotRange -> All],
    rozwiazanieWykres], bledyWykresPlot}
]

```

Testowanie

```

In[ ]:= Clear[α, a, b, n, tg, u0, ua, ub, u];
α =  $\frac{2}{9}$ ; a = 0; b = π; n = 32; tg = 2.;
u0[x_] := Sin[3 x]; ua[t_] := 0; ub[t_] := 0;
u[x_, t_] := Exp[-2 t] Sin[3 x];
cieplojawne[α, a, b, n, tg, u0, ua, ub, u]

```

Out[]:=

