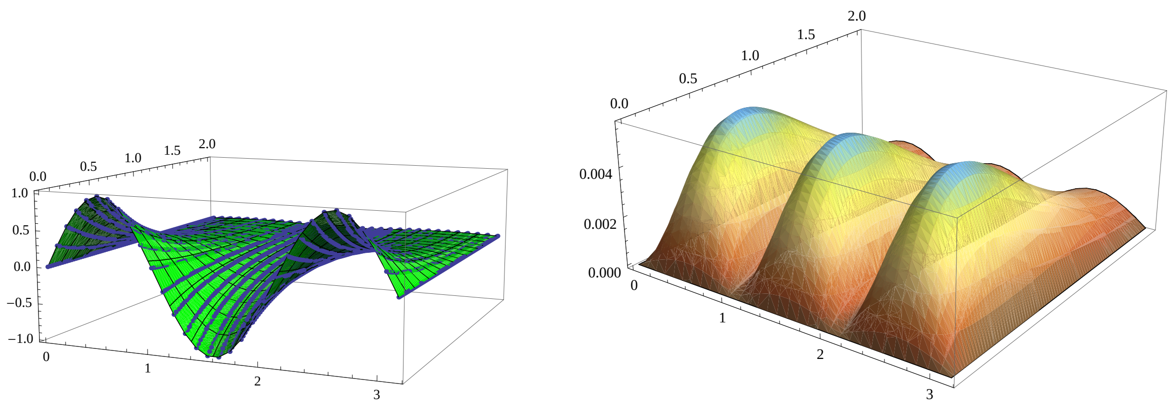
Rozwiązywać będziemy równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, t^*] \tag{1}$$

z warunkami $u(x, 0) = u_0(x)$, $u(a, t) = u_a(t)$ i $u(b, t) = u_b(t)$.
Równanie to można rozwiązać poprzez jego „dyskretyzację". Zastąpmy więc pochodne odpowiednimi ilorazami różnicowymi: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{j,i} - u_{j-1,i}}{k}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j-1,i+1} - 2u_{j-1,i} + u_{j-1,i-1}}{h^2}$, gdzie $i = 2, 3, \ldots, n-1$ dla kolejnych $j = 2, 3, \ldots, m$. We wzorach tych h jest odległością pomiędzy każdą parą sąsiednich iksów, z których pierwszy $x_1 = a$, a ostatni $x_n = b$ natomiast k jest krokiem czasu, który należy wyznaczyć w programie tak, aby była gwarancja zbieżności (podobnie jak dla zmiennej x – pierwszy t jest równy 0, a ostatni t^*).
Po wstawieniu do równania (1) ilorazów różnicowych i po prostym przekształceniu otrzymamy formułę:

$$u_{j,i} = \frac{\alpha k}{h^2}(u_{j-1,i+1} - 2u_{j-1,i} + u_{j-1,i-1}) + u_{j-1,i}, \tag{2}$$

z którego wyznaczać będziemy kolejne niewiadome wartości $u_{j,i}$ (wierszami do drugiego do m-tego, a w wewnątrz wiersza – kolejno kolumnami od drugiej do przedostatniej, o numerze $n - 1$). Pamiętajmy, że z warunków otrzymujemy cały pierwszy wiersz i pełne skrajne kolumny).
Napisz program *cieplojawne* zależny od argumentów α, a, b, n, tg, u_0, u_a, u_b i u (n jest ilością węzłów dla zmiennej x, $tg = t^*$, a u jest rozwiązaniem dokładnym. Program ma zwracać dwa rysunki: na pierwszym znajdują się wykresy rozwiązania dokładnego i rozwiązania uzyskanego za pomocą tej metody (dyskretnego), na drugim znajduje się wykres błędów bezwzględnych tego odtworzenia. Program przetestuj dla danych: $\alpha = \frac{2}{9}$, $a = 0$, $b = \pi$, $n = 32$, $tg = 2$, $u_0 = \sin 3x$, $u_a = 0$, $u_b = 0$ i $u = e^{-2t} \sin 3x$.



Rysunek 1: Rozwiązanie (linia ciągła) i odtworzenie oraz błędy bezwzględne.

Uwaga: Projekt należy przesyłać jako plik *imię_nazwisko_projekt_3.nb*