Poprzedni algorytm Kaczmarza zbieżny jest do rozwiązania X^* układu równań liniowych $AX = B$ (niekoniecznie kwadratowych). Jednak w praktycznych zastosowaniach algorytm ten może być niezbyt przydatny z uwagi na szybkość jego zbieżności lub z uwagi na postać rozwiązywanego układu równań liniowych (a szczególnie macierzy A).

Istnieje wiele różnych metod opartych na algorytmie Kaczmarza, dzięki którym poprawić można wady tego algorytmu. Jedną z prostszych modyfikacji algorytmu Kaczmarza jest algorytm ART, w którym wybierając dowolne rozwiązanie początkowe X^0 proces iteracyjny zbieżny jest do rozwiązania X^* tego układu:

$$X^{k+1} = X^k + \lambda_k \frac{b_{k+1} - a^{k+1} \circ X^k}{\|a^{k+1}\|^2} a^{k+1}, \quad k \geqslant 0, \tag{1}$$

gdzie b_i jest i-tym elementem wektora wyrazów wolnych B, a^i jest i-tym wierszem macierzy współczynników A, $\circ$ jest klasycznym iloczynem skalarnym wektorów, $\|\cdot\|$ oznacza jedną z klasycznych norm wektora – w tym przypadku jest to długość tego wektora, a λ jest tzw. współczynnikiem relaksacji. W formule (1) związek pomiędzy i oraz k jest analogiczny do przypadku algorytmu Kaczmarza. Również warunek stopu przyjmujemy taki sam jak w algorytmie Kaczmarza.

Wykazane zostało, że jeśli $0 < \lambda_k < 2$, to algorytm ART, przy dowolnym wyborze rozwiązania początkowego X^0, zbieżny jest do rozwiązania X^* danego układu równań liniowych (dla $\lambda = 1$ mamy do czynienia z algorytmem Kaczmarza).

Odpowiedni dobór wartości parametru λ może znacząco przyspieszyć zbieżność algorytmu ART.

Kolejnym problemem, jaki pojawić może się podczas praktycznego stosowania algorytmu ART jest postać macierzy A. W zastosowaniach inżynierski macierz ta może mieć bardzo duże rozmiary, może być prostokątna i rzadka (zdecydowana większość jej elementów to zero, a elementy niezerowe rozłożone są w niej chaotycznie). Konsekwencją tych własności są kłopoty z pamięcią komputera (wielkość macierzy) oraz złożoność obliczeniowa (wielkość macierzy A i niepotrzebne działania na zerach).

Aby zapobiec drugiej z wymienionych przypadłości, można macierz A przechowywać w pamięci w innej postaci: każdy jej wiersz będzie listą par postaci (n, w), gdzie n jest numerem kolumny, w której występuje niezerowy element, a w wartością tego niezerowego elementu.

Podejście takie niesie ze sobą jednak pewne konsekwencje – wzór (1) misi zostać dostosowany do nowej postaci macierzy A. Należy napisać nowe wersje wyznaczania normy wektora, iloczynu skalarnego wektorów, dodawania wektorów, mnożenia wektora przez liczbę i warunku stop (dostosowane do nowej postaci wierszy macierzy A).

Napisz program, który dla zadanych argumentów: A – macierz współczynników, B – wektor wyrazów wolnych, X^0 – przybliżenie początkowe, ε – dokładność i λ – współczynnik relaksacji (w algorytmie ART może on być zmienny i przyjmować różne wartości dla różnych iteracji, jednak my możemy przyjąć go jako stały), rozwiązywał będzie układ równań liniowych $AX = B$ z zadaną dokładnością. Program ma wypisać rozwiązanie oraz liczbę wykonanych kroków.

Dodatkowo w zadaniach „z życia wziętych" często wiadomo jest, że rozwiązanie dokładne jest wektorem o nieujemnych elementach. Dodaj do programu art poprawkę, która uwzględnia tę uwagę – po każdym wyznaczeniu wektora rozwiązań przebiegamy jego elementy i, po natrafieniu na element ujemny, zamieniamy go na zero.

Uwaga 1: Przykłady podane są dodatkowym załączniku (plik art.nb).
Uwaga 2: Projekt należy przesyłać jako plik *imię_nazwisko_projekt_5.nb*