Autor: Krzysztof Barczak

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 5

Metoda kolejnych przybliżeń

Równanie Fredholma II rodzaju

Zadanie 1

Wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie przybliżone y_n równania

$$y(x) = e^x - \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x\, e^t\, y(t)\right) dt$$

Argument : n

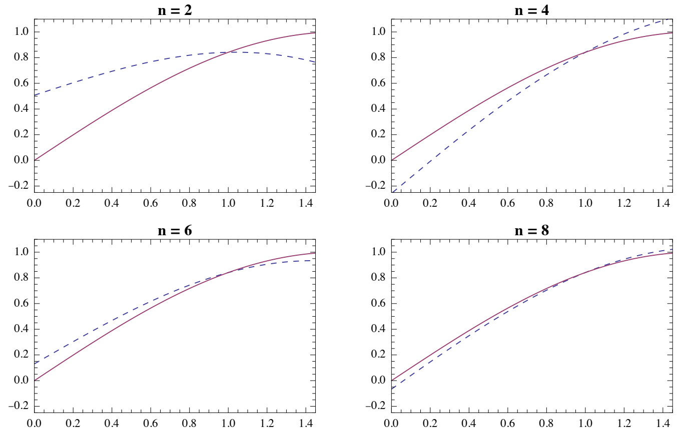
Sprawdzić, czy metodę można zastosować.
Wyznaczyć rozwiązanie dla kilku wartości n.
Na tej podstawie odgadnąć rozwiązanie dokładne i sprawdzić jego poprawność.

Zadanie 2

Wyznaczyć rozwiązania przybliżone y_n dla n=2,4,6,8, równania:

$$y(x) = \sin x + \frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (t-x)\; y(t)\, dt.$$

Utworzyć wykresy porównujące rozwiązanie przybliżone z rozwiązaniem dokładnym, którym jest funkcja $y(x) = \sin x$, np. w postaci :



Rozwiązanie

Kod procedury

Procedura realizuje *Metodę kolejnych przybliżeń* dla równań postaci:

$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, d\, t.$

Wejście:

f - zadana funkcja f(x);

Ker - jądro równania K(x,t);

λ - zadana liczba;

a, b - granice całkowania;

n - zadana liczba naturalna;

z - argument zwracanej funkcji.

Wyjście:

n-ta suma częściowa będąca rozwiązaniem przybliżonym.

In[1]:=
```
Clear[mkp];
mkp[f_, Ker_, λ_, a_, b_, n_Integer?NonNegative, z_Symbol] :=
 Module[{M, φ, yn, wynik},
  (* Sprawdzenie, czy metodę można zastosować *)
  M = Maximize[{Ker[x, t], 0 ≤ x ≤ 1 && 0 ≤ t ≤ 1}, {x, t}][[1]];
  If[Abs[λ] ≥ 1/(M (b - a)), Return["Metody nie można zastosować"]];

  (* Zależności na funkcje φm, m liczba naturalna *)
  φ[0][x_] := f[x];
  φ[m_][x_] := ∫_a^b Ker[x, t] * (φ[m - 1][x] /. {x → t}) ⅆt;

  (* Suma częściowa jako przybliżone rozwiązanie równania *)
  yn[m_][x_] := Simplify[∑_{i=0}^m λ^i φ[i][x]];
  wynik = Table[Simplify[yn[j][z]], {j, 0, n}];

  Return[yn[n][z]]
 ]
```

Zadanie 1.

In[3]:=
```
Clear[f, Ker, λ, a, b, n];
f[x_] := Exp[x]; Ker[x_, t_] := x ⅇ^t; λ = -1/4; a = 0; b = 1; n = 15;
(* Sprawdzimy postaci kolejnych 15 rozwiązań przybliżonych *)
Do[Print[mkp[f, Ker, λ, a, b, i, z]], {i, n}]
```

$$e^z - \frac{1}{8}\left(-1+e^2\right) z$$
$$e^z - \frac{3}{32}\left(-1+e^2\right) z$$
$$e^z - \frac{13}{128}\left(-1+e^2\right) z$$
$$e^z - \frac{51}{512}\left(-1+e^2\right) z$$
$$e^z - \frac{205\left(-1+e^2\right) z}{2048}$$
$$e^z - \frac{819\left(-1+e^2\right) z}{8192}$$
$$e^z - \frac{3277\left(-1+e^2\right) z}{32\,768}$$
$$e^z - \frac{13\,107\left(-1+e^2\right) z}{131\,072}$$
$$e^z - \frac{52\,429\left(-1+e^2\right) z}{524\,288}$$
$$e^z - \frac{209\,715\left(-1+e^2\right) z}{2\,097\,152}$$
$$e^z - \frac{838\,861\left(-1+e^2\right) z}{8\,388\,608}$$
$$e^z - \frac{3\,355\,443\left(-1+e^2\right) z}{33\,554\,432}$$
$$e^z - \frac{13\,421\,773\left(-1+e^2\right) z}{134\,217\,728}$$
$$e^z - \frac{53\,687\,091\left(-1+e^2\right) z}{536\,870\,912}$$
$$e^z - \frac{214\,748\,365\left(-1+e^2\right) z}{2\,147\,483\,648}$$

In[6]:= **214 748 365 / 2 147 483 648 // N**

Out[6]= 0.1

Czyżby rozwiązaniem była funkcja

In[7]:= $$\mathbf{e^x - \frac{1}{10}\left(e^2 - 1\right) x}$$

Out[7]= $$e^x - \frac{1}{10}\left(-1+e^2\right) x$$

?

Weryfikujemy:

In[8]:=
$$e^x - \frac{1}{10}\left(e^2 - 1\right) x == f[x] + \lambda \,\text{Integrate}\left[\text{Ker}[x, t] * \left(e^t - \frac{1}{10}\left(e^2 - 1\right) t\right), \{t, a, b\}\right]$$

Out[8]= True

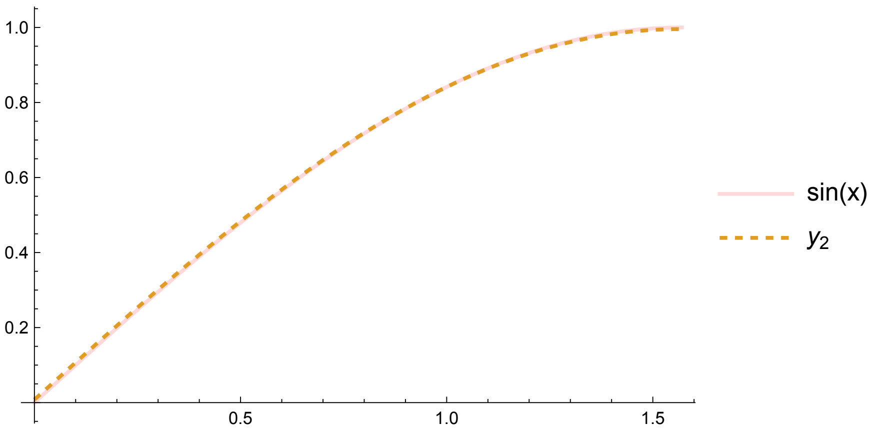
Zadanie 2.

In[9]:=
```
Clear[f, Ker, λ, a, b, przyblizone];
```
$$f[x\_] := \text{Sin}[x] + \frac{x - 1}{4};\ \text{Ker}[x\_, t\_] := t - x;\ \lambda = \frac{1}{4};\ a = 0;\ b = \frac{\pi}{2};$$
```
przyblizone = Table[mkp[f, Ker, λ, a, b, i, z], {i, 2, 8, 2}]
```

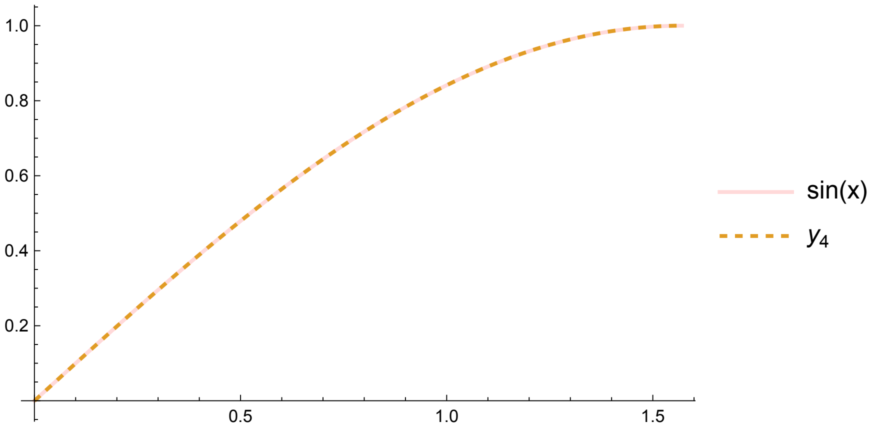
Out[11]=
$$\left\{\frac{\pi^4 - \pi^4 z + 12\,288\,\text{Sin}[z]}{12\,288},\ \frac{\pi^8 (-1 + z)}{37\,748\,736} + \text{Sin}[z],\ -\frac{\pi^{12} (-1 + z)}{115\,964\,116\,992} + \text{Sin}[z],\ \frac{\pi^{16} (-1 + z)}{356\,241\,767\,399\,424} + \text{Sin}[z]\right\}$$

In[28]:=
```
wykres2 = Plot[{Sin[z], przyblizone[[1]]}, {z, a, b},
   PlotLegends → {"sin(x)", "y₂"}, PlotStyle → {LightRed, Dashed}];
wykres4 = Plot[{Sin[z], przyblizone[[2]]}, {z, a, b},
   PlotLegends → {"sin(x)", "y₄"}, PlotStyle → {LightRed, Dashed}];
wykres6 = Plot[{Sin[z], przyblizone[[3]]}, {z, a, b},
   PlotLegends → {"sin(x)", "y₆"}, PlotStyle → {LightRed, Dashed}];
wykres8 = Plot[{Sin[z], przyblizone[[4]]}, {z, a, b},
   PlotLegends → {"sin(x)", "y₈"}, PlotStyle → {LightRed, Dashed}];
(*GraphicsGrid[{{wykres2,wykres4},{wykres6,wykres8}}]*)
Show[wykres2]
Show[wykres4]
Show[wykres6]
Show[wykres8]
```

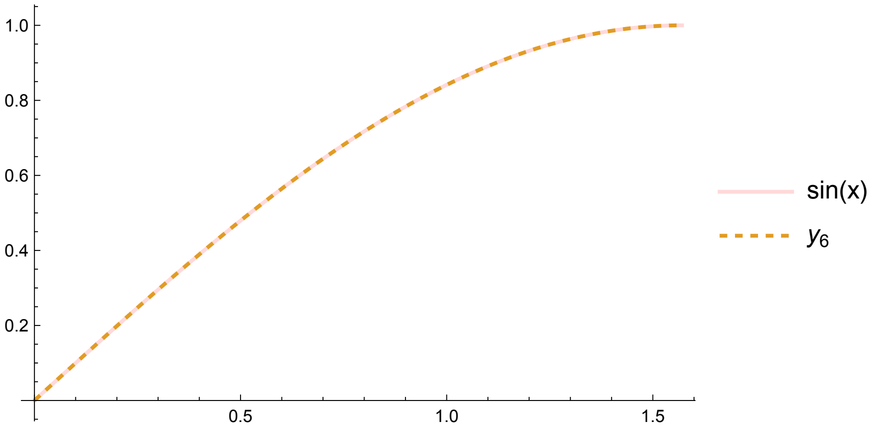
Out[32]=



Out[33]=



Out[34]=



Out[35]=