Autor: Krzysztof Barczak

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 9

Metoda odchyłek ważonych

Napisać procedurę realizującą metodę odchyłek ważonych dla równania:

$u''(x) - 3u'(x) = 4x, \quad x \in (2, 3),$

z warunkami brzegowymi:

$u(2) = 0,$

$u(3) = 0.$

Przyjąć, że funkcje kształtu będą spełniały zadane warunki brzegowe.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć metodą Galerkina rozwiązanie przybliżone przyjmując jako funkcje kształtu:

$\Phi_1(x) = (x-2)(x-3),$
$\Phi_2(x) = x(x-2)(x-3).$

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

b) Wykonać te same obliczenia dla trzech funkcji kształtu:

$\Phi_1(x) = (x-2)(x-3),$
$\Phi_2(x) = x(x-2)(x-3),$
$\Phi_3(x) = x^2(x-2)(x-3).$

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

Rozwiązanie

Kod procedury

Procedura realizuje metodę odchyłek ważonych przy założeniu, że funkcje kształtu spełniają zadane warunki brzegowe.

Rozważane jest równanie:

A(T(x)) = B(x) dla x∈(a,b) oraz T(x) = φ(x) dla x∈{a,b}.

Wejście:

operatorA - operator różniczkowy A;
BB - funkcja B;
Ω - przedział (a,b);
φ - funkcja zadana na brzegu Γ1;
Γ1 - brzeg;
wagi - układ liniowo niezależnych funkcji wagowych;
bazowe - funkcje kształtu;
z - zmienna.

Wyjście:

rozwiązanie przybliżone w postaci funkcji.

```
In[*]:= Clear[mow];
mow[operatorA_, BB_, Ω_, φ_, Γ1_, wagi_, bazowe_, z_Symbol] := Module[
  {AA = operatorA, R0, R1, R2, w = wagi, n = Length[bazowe], T, uklad, rozwiazanie},

  T[x_] := Sum[p[i] * Function[bazowe[[i]]][x], {i, 1, n}];
  (*R0[x_]:=AA[x][T[x]]-BB[x];*)
  R0[x_] = (AA[x][#] - BB[x]) &;
  (*R1[x_]:=T[x]-φ[x];*)
  R1[x_] = (# - φ[x]) &;
  (*R2[x_]:=T'[x]-q[x];*)
  R2[x_] = (D[#, x] - q[x]) &;

  (*uklad=Table[∫_Ω[[1]]^Ω[[2]] (w[[i]]&)[x] R0[x][T[x]]ⅆx+∫_Γ1[[1]]^Γ1[[2]] (wb1[[i]]&)[x] R1[x][T[x]]ⅆx+
      ∫_Γ2[[1]]^Γ2[[2]] (wb2[[i]]&)[x] R2[x][T[x]]ⅆx==0,{i,n}];*)
  uklad = Table[∫_Ω[[1]]^Ω[[2]] (w[[i]] &)[x] R0[x][T[x]] ⅆx == 0, {i, n}];

  rozwiazanie = Solve[uklad, Table[p[i], {i, n}]];
  (*Print["rozwiazanie ",rozwiazanie];*)

  Return[Sum[rozwiazanie[[1, i, 2]] * Function[bazowe[[i]]][z], {i, 1, n}]]
 ]
```

Norma w L^p

In[ ]:=
```
normaLp[f_, p_, a_, b_] := Module[{norma},
  norma = (∫_a^b Abs[f[x]]^p ⅆx)^(1/p);
  Return[norma]]
```

Przykład 1.1 z wykładu

In[ ]:=
```
Clear[p, op, BB, Ω, φ, Γ1, wagi, bazowe, z];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] + # + t) &;
BB[x_] := 0;
Ω = {0, 1};
φ[x_] := Piecewise[{{0, x == 0}, {0, x == 1}}];
Γ1 = {0, 1};
bazowe = {x (x - 1), x^2 (x - 1)};
wagi = {1, x};
mow[op, BB, Ω, φ, Γ1, wagi, bazowe, z]
```

Out[ ]=

$$-\frac{122}{649}(-1+x)\,x-\frac{10}{59}(-1+x)\,x^2$$

ad a)

In[ ]:=
```
Clear[op, BB, Ω, φ, Γ1, q, Γ2, wagi, bazowe, z, przyblizone, dokladne];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] - 3 D[#, t]) &;
BB[x_] := 4 x;
Ω = {2, 3};
φ[x_] := Piecewise[{{0, x == 2}, {0, x == 3}}];
Γ1 = {2, 3};
bazowe = {(x - 2) (x - 3), x (x - 2) (x - 3)};
wagi = bazowe;
```

In[ ]:=
```
przyblizone = mow[op, BB, Ω, φ, Γ1, wagi, bazowe, z]
```

Out[ ]=

$$-\frac{556}{69}(-3+x)(-2+x)+\frac{340}{69}(-3+x)(-2+x)\,x$$

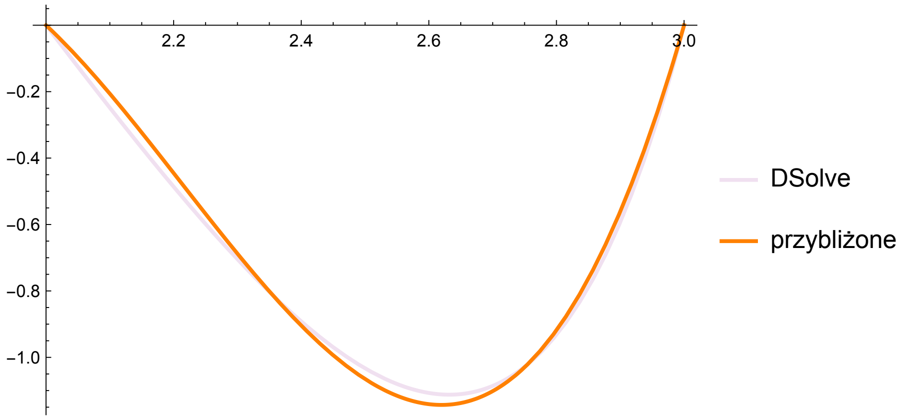
In[ ]:=
```
dokladne = DSolve[
  {op[x][u[x]] == BB[x], u[Ω[[1]]] == φ[Ω[[1]]], u[Ω[[2]]] == φ[Ω[[2]]]}, u[x], x][[1, 1, 2]]
```

Out[ ]=

$$-\frac{2\left(33\,e^6-16\,e^9-17\,e^{3x}-2\,e^6\,x+2\,e^9\,x-3\,e^6\,x^2+3\,e^9\,x^2\right)}{9\,e^6\left(-1+e^3\right)}$$

In[∘]:=
```
Show[Plot[dokladne, {x, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧}, PlotLegends → {"DSolve"},
  PlotStyle → LightPurple], Plot[przyblizone, {x, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧},
  PlotLegends → {"przybliżone"}, PlotStyle → Orange]]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Clear[f];
f[x_] := przyblizone - dokladne;
normaLp[f, 2, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧]
```

Out[∘]=

$$\frac{17\sqrt{\frac{2}{7}\left(96\,973-31\,658\,e^{3}+1339\,e^{6}\right)}}{621\left(-1+e^{3}\right)}$$

In[∘]:=
```
% // N
```

Out[∘]=

0.0276032

ad b)

In[∘]:=
```
Clear[op, BB, Ω, φ, Γ1, wagi, bazowe, z, przyblizone, dokladne];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] - 3 D[#, t]) &;
BB[x_] := 4 x;
Ω = {2, 3};
φ[x_] := Piecewise[{{0, x == 2}, {0, x == 3}}];
Γ1 = {2, 3};
bazowe = {(x - 2) (x - 3), x (x - 2) (x - 3), x^2 (x - 2) (x - 3)};
wagi = bazowe;
```

In[∘]:=
```
przyblizone = mow[op, BB, Ω, φ, Γ1, wagi, bazowe, z]
```

Out[∘]=

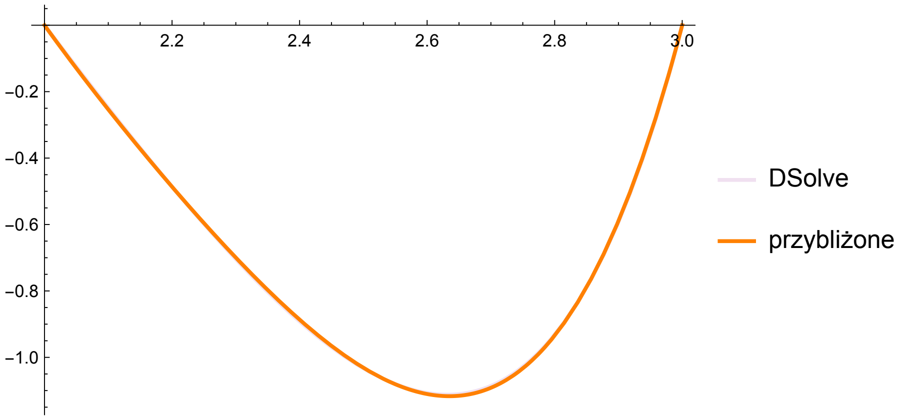
$$\frac{43}{3}(-3+x)(-2+x)-\frac{77}{6}(-3+x)(-2+x)x+\frac{7}{2}(-3+x)(-2+x)x^{2}$$

In[∘]:=
```
dokladne = DSolve[
  {op[x][u[x]] == BB[x], u[Ω⟦1⟧] == φ[Ω⟦1⟧], u[Ω⟦2⟧] == φ[Ω⟦2⟧]}, u[x], x]⟦1, 1, 2⟧
```

Out[∘]=

$$-\frac{2\left(33\,e^{6}-16\,e^{9}-17\,e^{3x}-2\,e^{6}x+2\,e^{9}x-3\,e^{6}x^{2}+3\,e^{9}x^{2}\right)}{9\,e^{6}\left(-1+e^{3}\right)}$$

In[ ]:=
```
Show[Plot[dokladne, {x, Ω[[1]], Ω[[2]]}, PlotLegends → {"DSolve"},
  PlotStyle → LightPurple], Plot[przyblizone, {x, Ω[[1]], Ω[[2]]},
  PlotLegends → {"przybliżone"}, PlotStyle → Orange]]
```
Out[ ]=



In[ ]:=
```
Clear[f];
f[x_] := przyblizone - dokladne;
normaLp[f, 2, Ω[[1]], Ω[[2]]]
```
Out[ ]=

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{30}\left(104\,991+35\,770\,e^{3}-2041\,e^{6}\right)}}{18\left(-1+e^{3}\right)}$$

In[ ]:=
```
% // N
```
Out[ ]=

0.00385029