Autor: Krzysztof Barczak

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 8

Metoda różnic skończonych

Nieustalony przepływ ciepła (schemat jawny)

Napisać procedurę realizującą schemat jawny metody różnic skończonych dla zagadnienia nieustalonego przepływu ciepła:

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (a, b), \ \ t \in (0, t^*),$$

z warunkiem początkowym:

$$u\,(x, 0) \ = \ u_0(x),$$

oraz warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju:

$$u\,(a, t) = u_a(t),$$
$$u(b, t) = u_b(t).$$

Jako argument procedury należy podać liczbę nx węzłów siatki oraz czas końca t^*, natomiast krok czasu dt należy wyznaczyć (w programie) tak aby zapewnić stabilność obliczeń.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia, w którym:

$$a = 1, \ \ b = 2, \ \ t^* = 1,$$
$$c = 1, \ \ \rho = 1, \ \ \lambda = 1,$$

$$u_0(x) = \frac{x^3}{6},$$
$$u_a(t) = t + \frac{1}{6},$$
$$u_b(t) = 2\,t + \frac{4}{3}.$$

Przedział [a,b] podzielić na 10 części.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne, którym jest funkcja $u(x, t) = \frac{x^3}{6} + x\,t$, oraz uzyskane rozwiązania przybliżone w chwili końcowej. Wykreślić także błędy uzyskanego rozwiązania przybliżonego w chwili końcowej.

Rozwiązanie

Kod procedury

```
In[ ]:= mrsjawny[c_, ρ_, λ_, f_, a_, b_, tstar_, φ_, ψ_, u0_, nx_, u_] :=
  Module[{h = (b - a)/(nx - 1), τ, w, PP, dt, xi, tk, fik, rozwiazanie, macierz, eq, expr,
    neweq, const, wskazniki, zmienne, liczbaWierszy, matrix, wyrazyWolne,
    solution, dummy, wykres, rozwiazanieWykres, bledy, bledyWykres,
    bledyWykresPlot, koncowe, bledyKoncowe, bledyKoncoweWykres},
   w = {τ λ, c ρ h^2 - 2 λ τ, -c ρ h^2, -h^2 τ};
   (* Wyznaczenie kroku czasu *)
   τ = (c ρ h^2)/(2 λ);
   PP = Ceiling[2 tstar / τ];
   dt = N[tstar/(PP - 1)];
   (*Print["τ = ",N[τ],"; dt = ",dt,"; dt <= τ ",dt≤τ];*)

   (* Wyznaczenie siatki *)
   xi = Table[a + (i - 1) h, {i, nx}];
   tk = Table[(k - 1) dt, {k, PP}];
   (*Print["xi ",xi];
   Print["tk ",tk];*)

   (* Wartości funkcji f w węzłach siatki *)
   fik = Table[f[xi[[i]], tk[[k]]], {i, nx}, {k, PP}];

   (* Wartości znane z warunków *)
   rozwiazanie = Table[u_{i,k}, {i, nx}, {k, PP}];

   Do[rozwiazanie[[i, 1]] = u0[xi[[i]]], {i, 1, nx}];
   (*Print[MatrixForm[rozwiazanie]];*)

   Do[rozwiazanie[[1, k]] = φ[tk[[k]]];
    rozwiazanie[[nx, k]] = ψ[tk[[k]]],
    {k, 1, PP}];
   (*Print[MatrixForm[rozwiazanie]];*)

   (* Budowa układu równań *)
   macierz = Table[eq = w[[1]] × rozwiazanie[[i + 1, k]] + w[[2]] × rozwiazanie[[i, k]] +
```

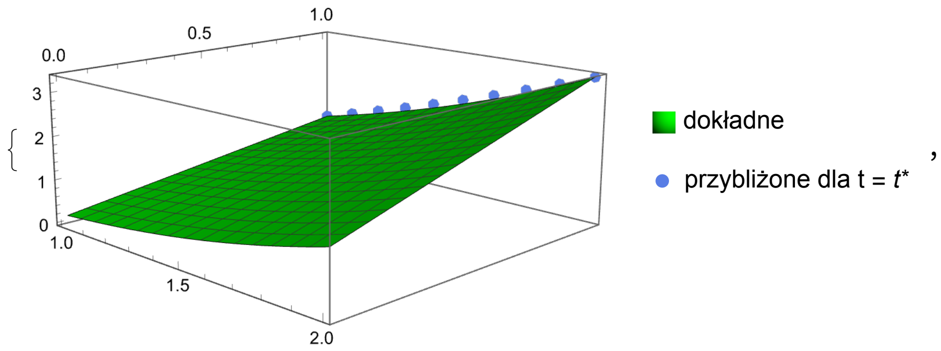
```
      w[[3]] × rozwiazanie[[i, k + 1]] + w[[1]] × rozwiazanie[[i - 1, k]] == w[[4]] fik[[i, k]];
   expr = eq /. Equal → Subtract;
   const = expr /. Map[# → 0 &, Variables[expr]];
   neweq = expr - const == -const, {i, 2, nx - 1}, {k, 1, PP - 1}];
macierz = Flatten[macierz];
(*Print[MatrixForm[macierz]];*)

(*Print["n = ",nx+1,", m = ",PP+1,
 ", nm - n - 2m + 2 = ",(nx+1)( PP+1)-(nx+1)-2(PP+1)+2];
Print[Dimensions[macierz]];*)

wskazniki =
 Sort[DeleteDuplicates[Flatten[Table[{{i + 1, k}, {i, k}, {i, k + 1}, {i - 1, k}},
     {i, 2, nx - 1}, {k, 2, PP - 1}], 2]]];
zmienne = Sort[DeleteDuplicates[
   Flatten[Table[{u_{i+1,k}, u_{i,k}, u_{i,k+1}, u_{i-1,k}}, {i, 2, nx - 1}, {k, 2, PP - 1}], 2]]];
(*Print["wskazniki ",wskazniki];*)

liczbaWierszy = Dimensions[macierz][[1]];
(*Print["liczba wierszy ",liczbaWierszy];*)

(* Rozdzielenie zmiennych od wyrazów wolnych *)
matrix = Table[0, {nx PP - nx - 2 PP + 2}];
wyrazyWolne = Table[0, {nx PP - nx - 2 PP + 2}];
Do[matrix[[i]] = macierz[[i, 1]];
 wyrazyWolne[[i]] = macierz[[i, 2]], {i, nx PP - nx - 2 PP + 2}];

(*Print["wyrazy wolne ",MatrixForm[wyrazyWolne]];*)

(* Wyciągnięcie macierzy współczynników *)
matrix = Normal@CoefficientArrays[matrix, zmienne][[2]];
(*Print[MatrixForm[matrix]];
Print["wymiary matrix", Dimensions[matrix]];*)

(* Rozwiązanie *)
solution = LinearSolve[matrix, wyrazyWolne];
(*Print["solution ",solution];
Print["liczba roz ",Dimensions[solution]];*)

dummy = Table[0, {nx}, {PP}];
Do[
 dummy[[i[[1]], i[[2]]]] = solution[[Position[wskazniki, i][[1, 1]]]], {i, wskazniki}];
(*Print["dummy ",MatrixForm[dummy]];
Print["dim dummy ",Dimensions[dummy]];*)

Do[rozwiazanie[[i, j]] = dummy[[i, j]], {i, 2, nx - 1}, {j, 2, PP}];
(*Print[MatrixForm[rozwiazanie]];*)
```

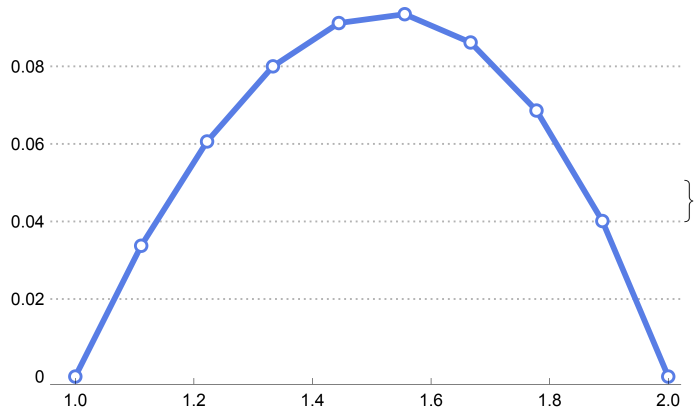
```
(* Tworzenie wykresu *)
wykres = Table[{xi[[i]], tk[[k]], rozwiazanie[[i, k]]}, {i, nx}, {k, PP}];
dummy = {};
Do[dummy = Append[dummy, wykres[[i, k]]], {i, nx}, {k, PP}];
rozwiazanieWykres =
 ListPointPlot3D[dummy, PlotTheme → "Business", PlotRange → All];
koncowe = {};
(*koncowe=ListPlot3D[
   Table[{xi[[i]],tk[[PP]],rozwiazanie[[i,PP]]},{i,nx}],PlotTheme→"Business"];*)
Do[koncowe = Append[koncowe, wykres[[i, PP]]], {i, nx}];
koncowe = ListPointPlot3D[koncowe, PlotTheme → "Business",
  PlotRange → All, PlotLegends → {"przybliżone dla t = t*"}];
(*Print[koncowe];*)

(* Błędy *)
bledy = Table[
  {xi[[i]], tk[[k]], Abs[rozwiazanie[[i, k]] - u[xi[[i]], tk[[k]]]]}, {i, nx}, {k, PP}];
bledyWykres = {};
Do[bledyWykres = Append[bledyWykres, bledy[[i, k]]], {i, nx}, {k, PP}];
bledyWykresPlot =
 ListPlot3D[bledyWykres, PlotTheme → "Business", PlotStyle → 96];

bledyKoncowe =
 Table[{xi[[i]], Abs[rozwiazanie[[i, PP]] - u[xi[[i]], tk[[PP]]]]}, {i, nx}];
bledyKoncoweWykres = {};
Do[
 bledyKoncoweWykres = Append[bledyKoncoweWykres, bledyKoncowe[[i]]], {i, nx}];
bledyKoncoweWykres =
 ListPlot[bledyKoncoweWykres, PlotTheme → "Business", Joined → True];

Return[{Show[Plot3D[u[x, t], {x, a, b}, {t, 0, tstar}, PlotStyle → Green,
    PlotLegends → {"dokładne"}], koncowe], bledyKoncoweWykres}]
]
```

Rozwiązanie

```
In[ ]:= Clear[c, ρ, λ, f, a, b, tstar, φ, ψ, u0, nx, u];
c = 1; ρ = 1; λ = 1; f[x_, t_] := 0; a = 1; b = 2; tstar = 1;
φ[t_] := t + 1 / 6; ψ[t_] := 2 t + 4 / 3; u0[x_] := x^3 / 6;
u[x_, t_] := x^3/6 + x t;
nx = 10;
mrsjawny[c, ρ, λ, f, a, b, tstar, φ, ψ, u0, nx, u]
```

Out[ ]=


0.0
0.5
1.0
3
2
1
0
1.0
1.5
2.0
dokładne
przybliżone dla t = t*


0.08
0.06
0.04
0.02
0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0