

Autor: Krzysztof Barczak

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 7

Metoda różnic skończonych

Napisać procedurę realizującą metodę różnic skończonych dla zagadnienia brzegowego liniowego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego. Działanie procedury przetestować na przykładzie podanym na wykładzie.

Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia brzegowego:

$$\begin{cases} m y''(x) + k y'(x) + s y(x) = 0, & x \in [0, 10], \\ y(0) = 1, & y(10) = 1, \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla dwóch zestawów danych:

a) $m = 1, k = 3, s = 2$;

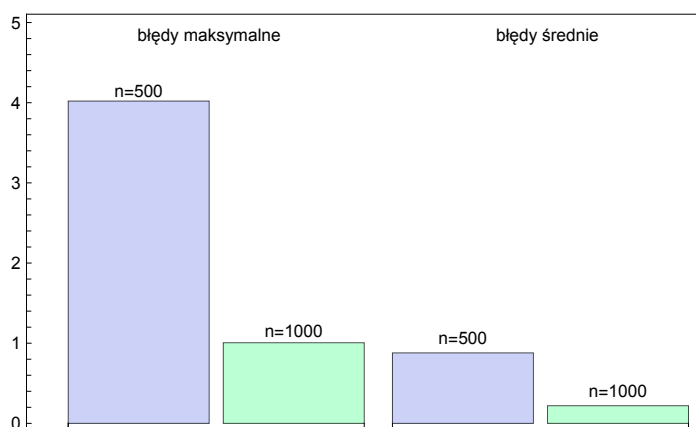
b) $m = 5, k = 2, s = 10$.

Za każdym razem obliczenia wykonać dla 500 i 1000 kroków.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone.

Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych.

Policzyć ponadto błędy maksymalne oraz średnie dla obu siatek oraz zestawić je na wykresie słupkowym, np. postaci:



Rozwiązanie

Kod procedury

Procedura znajduje rozwiązanie równania postaci:

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x), \quad x \in (a, b)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = z_a,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = z_b.$$

metodą różnic skończonych.

Wejście:

AA, BB, CC, DD - współczynniki równania;

a, b - rozważany przedział;

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, z_a, z_b$ - współczynniki z warunków brzegowych;

n - liczba naturalna.

Wyjście:

Wektor $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

```

In[*]:= Clear[mrs];
mrs[AA_, BB_, CC_, DD_, a_, b_,  $\alpha 1$ _,  $\alpha 2$ _,  $\beta 1$ _,  $\beta 2$ _, za_, zb_, n_] :=
Module[{ $h = \frac{b-a}{n}$ , xi, Ai, Bi, Ci, Di, macierz, pierwszy, ostatni, wolne, y},

xi = Table[a + i h, {i, 0, n}];
(*Print["xi ",xi];*)

macierz =
Table[ $\delta_{i,j+1} (2 AA[xi[[i]]] - h BB[xi[[i]]) + \delta_{i,j} (2 (h^2) CC[xi[[i]]] - 4 AA[xi[[i]]) +$ 
 $\delta_{i,j-1} (2 AA[xi[[i]]] + h BB[xi[[i]])$ , {i, 2, n}, {j, n+1}];
(*Print[MatrixForm[macierz];]*)

pierwszy = Table[ $\delta_{i,1} (2 h \alpha 1 - 3 \alpha 2) + \delta_{i,2} (4 \alpha 2) + \delta_{i,3} (-\alpha 2)$ , {i, n+1}];
(*Print["pierwszy ",pierwszy];*)

ostatni = Table[ $\delta_{i,n-1} * \beta 2 + \delta_{i,n} * (-4 \beta 2) + \delta_{i,n+1} * (2 h \beta 1 + 3 \beta 2)$ , {i, n+1}];
(*Print["ostatni ",ostatni];*)

macierz = Join[Join[{pierwszy}, macierz, 1], {ostatni}];
(*Print[MatrixForm[macierz];]*)

wolne = Table[ $2 h^2 * DD[xi[[i]]]$ , {i, 2, n}];
wolne = Prepend[wolne,  $2 h * za$ ];
wolne = Append[wolne,  $2 h * zb$ ];
(*Print["wolne ",wolne];*)

y = LinearSolve[macierz, wolne];

Return[Transpose[{xi, y}]]

]

```

Przykład wykładowy

```
In[*]:= Clear[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, n];
AA[x_] := x^2;
BB[x_] := -3 x;
CC[x_] := 5;
DD[x_] := x^2 + 5;
a = 0;
b = 4;
 $\alpha$ 1 = 1;
 $\alpha$ 2 = 1;
 $\beta$ 1 = 1;
 $\beta$ 2 = 1;
za = 1;
zb = 25;
n = 4;
mrs[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, n]

Out[*]:=
{{0, 1}, {1, 2}, {2, 5}, {3, 10}, {4, 17}}
```

Zadanie

a)

```
In[*]:= Clear[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, solution, h500, h1000, yDSolve500,
bledy500, max500, mean500, yDSolve1000, bledy1000, max1000, mean1000,
wykresDSolve, wykres500, wykres1000, wykresBledy500, wykresBledy1000];
AA[x_] := 1;
BB[x_] := 3;
CC[x_] := 2;
DD[x_] := 0;
a = 0;
b = 10;
 $\alpha$ 1 = 1;
 $\alpha$ 2 = 0;
 $\beta$ 1 = 1;
 $\beta$ 2 = 0;
za = 1;
zb = 1;
sol500 = mrs[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, 500];
sol1000 = mrs[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, 1000];
```

```

In[*]:= solution =
  DSolve[{AA[x] y''[x] + BB[x] y'[x] + CC[x] y[x] == DD[x],  $\alpha_1 y[a] == za$ ,  $\beta_1 y[b] == zb$ },
    y[x], x] [[1, 1, 2]]

Out[*]:=

$$e^{-2x} (-e^{10} + e^x + e^{10+x})$$


In[*]:= h500 = (b - a) / 500;
yDSolve500 = Table[solution /. {x → xw}, {xw, a, a + 500 h500, h500}];
bledy500 = Table[{sol500[[i, 1]], Abs[sol500[[i, 2]] - yDSolve500[[i]]]}, {i, 1, 501}];
max500 = N[Max[bledy500[[All, 2]]]];
mean500 = N[Mean[bledy500[[All, 2]]]];

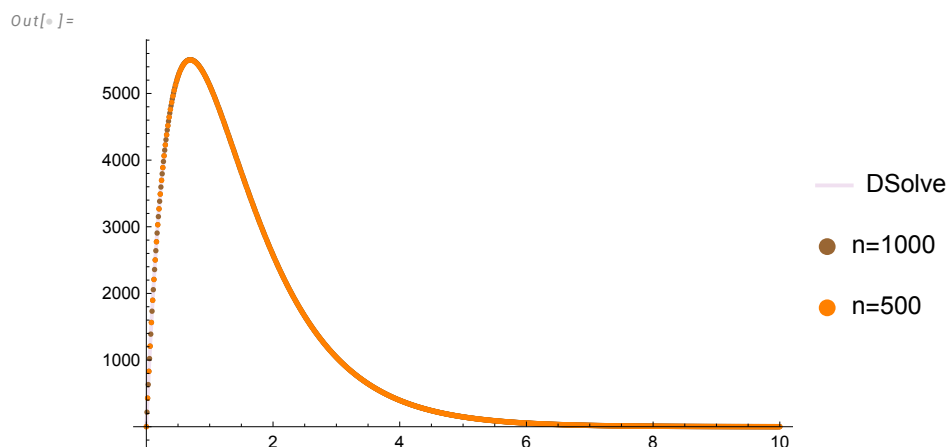
In[*]:= h1000 = (b - a) / 1000;
yDSolve1000 = Table[solution /. {x → xw}, {xw, a, a + 1000 h1000, h1000}];
bledy1000 =
  Table[{sol1000[[i, 1]], Abs[sol1000[[i, 2]] - yDSolve1000[[i]]]}, {i, 1, 1001}];
max1000 = N[Max[bledy1000[[All, 2]]]];
mean1000 = N[Mean[bledy1000[[All, 2]]]];

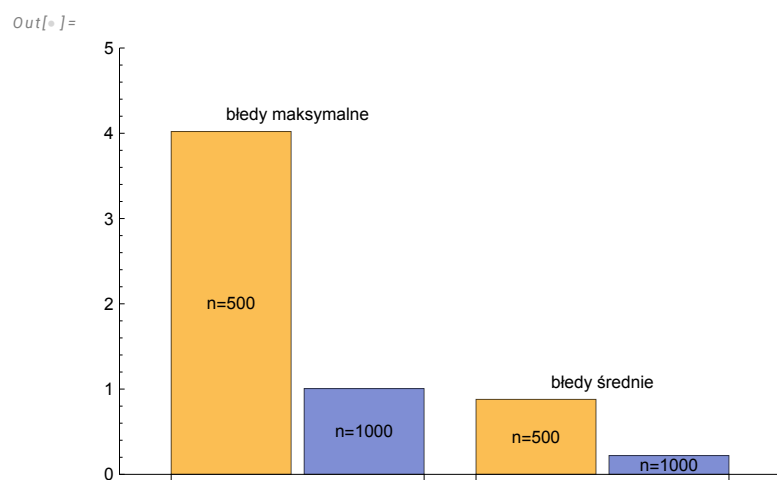
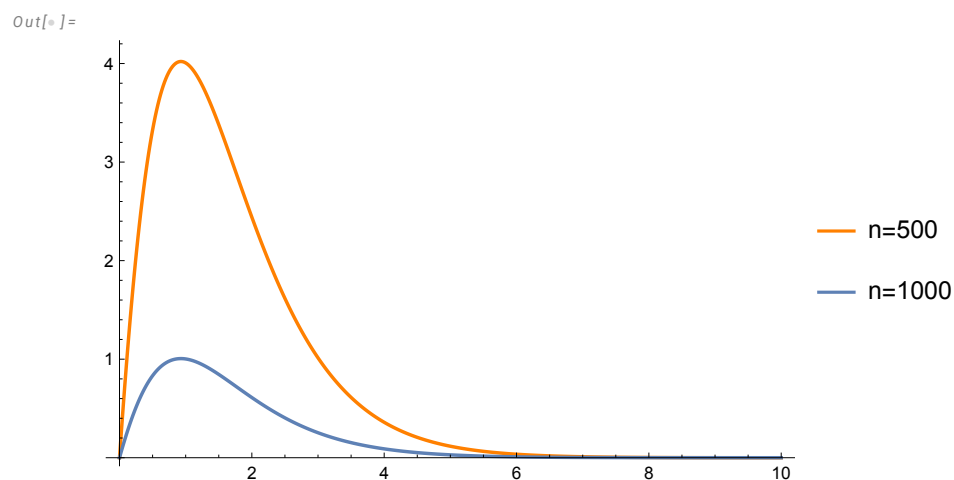
In[*]:= wykresDSolve =
  Plot[solution, {x, a, b}, PlotLegends → {"DSolve"}, PlotStyle → LightPurple];
wykres500 = ListPlot[sol500, PlotStyle → Orange,
  PlotMarkers → {Automatic, Tiny}, PlotLegends → {"n=500"}];
wykres1000 = ListPlot[sol1000, PlotStyle → Brown,
  PlotMarkers → {Automatic, Tiny}, PlotLegends → {"n=1000"}];

wykresBledy500 = ListPlot[bledy500, Joined → True,
  PlotLegends → {"n=500"}, PlotStyle → {Orange, Thickness[0.005]}];
wykresBledy1000 = ListPlot[bledy1000, Joined → True,
  PlotLegends → {"n=1000"}, PlotStyle → {Thickness[0.005]}];

Show[wykresDSolve, wykres1000, wykres500]
Show[wykresBledy500, wykresBledy1000]
BarChart[{max500, max1000}, {mean500, mean1000}],
  ChartLabels → {Placed[{"błedy maksymalne", "błedy średnie"}, Above],
    Placed[{"n=500", "n=1000"}, Center]}, PlotRange → {0, 5}]

```





b)

```

In[*] := Clear[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, solution, h500, h1000, yDSolve500,
           błedy500, max500, mean500, yDSolve1000, błedy1000, max1000, mean1000,
           wykresDSolve, wykres500, wykres1000, wykresBłedy500, wykresBłedy1000];
AA[x_] := 5;
BB[x_] := 2;
CC[x_] := 10;
DD[x_] := 0;
a = 0;
b = 10;
 $\alpha$ 1 = 1;
 $\alpha$ 2 = 0;
 $\beta$ 1 = 1;
 $\beta$ 2 = 0;
za = 1;
zb = 1;
sol500 = mrs[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, 500];
sol1000 = mrs[AA, BB, CC, DD, a, b,  $\alpha$ 1,  $\alpha$ 2,  $\beta$ 1,  $\beta$ 2, za, zb, 1000];

```

```
In[*]:= solution =
  DSolve[{AA[x] y''[x] + BB[x] y'[x] + CC[x] y[x] == DD[x], α1 y[a] == za, β1 y[b] == zb},
    y[x], x] [[1, 1, 2]]
```

```
Out[*]=
```

$$e^{-x/5} \left(\cos\left[\frac{7x}{5}\right] - \cot[14] \sin\left[\frac{7x}{5}\right] + e^2 \csc[14] \sin\left[\frac{7x}{5}\right] \right)$$

```
In[*]:= h500 = (b - a) / 500;
yDSolve500 = Table[solution /. {x → xw}, {xw, a, a + 500 h500, h500}];
bledy500 = Table[{sol500[[i, 1]], Abs[sol500[[i, 2]] - yDSolve500[[i]]]}, {i, 1, 501}];
max500 = N[Max[bledy500[[All, 2]]]];
mean500 = N[Mean[bledy500[[All, 2]]]];
```

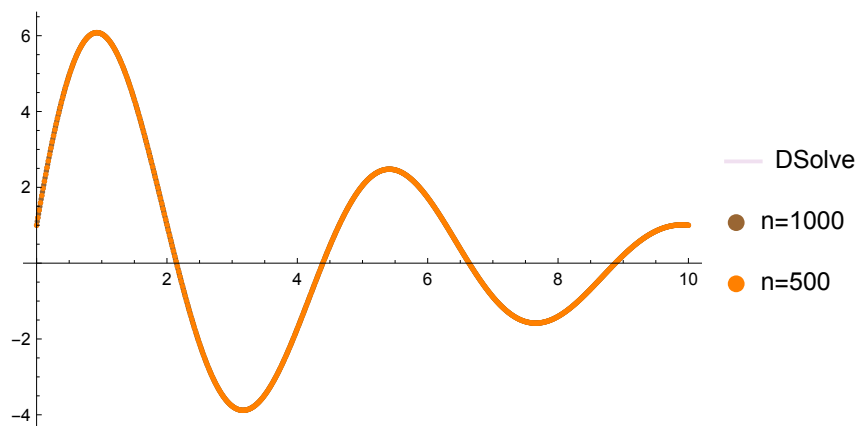
```
In[*]:= h1000 = (b - a) / 1000;
yDSolve1000 = Table[solution /. {x → xw}, {xw, a, a + 1000 h1000, h1000}];
bledy1000 =
  Table[{sol1000[[i, 1]], Abs[sol1000[[i, 2]] - yDSolve1000[[i]]]}, {i, 1, 1001}];
max1000 = N[Max[bledy1000[[All, 2]]]];
mean1000 = N[Mean[bledy1000[[All, 2]]]];
```

```
In[*]:= wykresDSolve =
  Plot[solution, {x, a, b}, PlotLegends → {"DSolve"}, PlotStyle → LightPurple];
wykres500 = ListPlot[sol500, PlotStyle → Orange,
  PlotMarkers → {Automatic, Tiny}, PlotLegends → {"n=500"}];
wykres1000 = ListPlot[sol1000, PlotStyle → Brown,
  PlotMarkers → {Automatic, Tiny}, PlotLegends → {"n=1000"}];

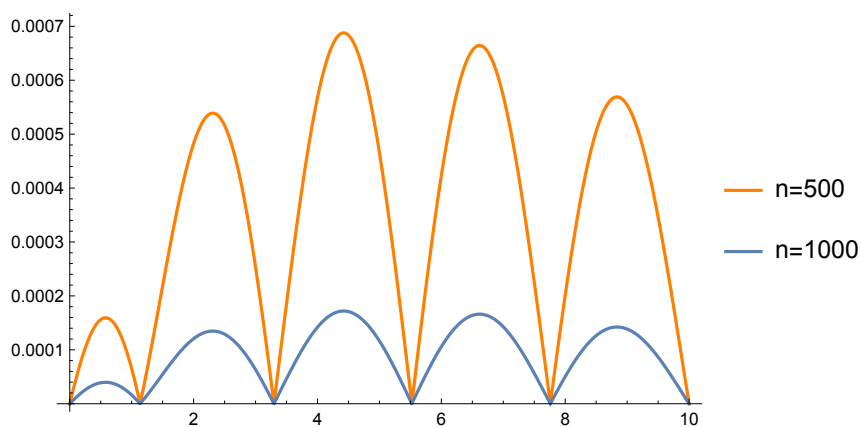
wykresBledy500 = ListPlot[bledy500, Joined → True,
  PlotLegends → {"n=500"}, PlotStyle → {Orange, Thickness[0.005]}];
wykresBledy1000 = ListPlot[bledy1000, Joined → True,
  PlotLegends → {"n=1000"}, PlotStyle → {Thickness[0.005]}];

Show[wykresDSolve, wykres1000, wykres500]
Show[wykresBledy500, wykresBledy1000]
BarChart[{{max500, max1000}, {mean500, mean1000}},
  ChartLabels → {Placed[{"błedy maksymalne", "błedy średnie"}, Above],
    Placed[{"n=500", "n=1000"}, Center]}}
```

Out[*]=



Out[*]=



Out[*]=

