Autor: Krzysztof Barczak

Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

Projekt 10

Metoda odchyłek ważonych

Napisać procedurę realizującą metodę odchyłek ważonych dla równania:

$u''(x) - u'(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$

z warunkami brzegowymi:

$u(0) = 1,$
$u'(1) = 2.$

Funkcje kształtu nie muszą zapewniać spełnienia warunków brzegowych.

a) Korzystając z napisanej procedury wyznaczyć rozwiązanie przybliżone przyjmując jako funkcje kształtu:

$\Phi_1(x) = 1,$
$\Phi_2(x) = x,$
$\Phi_3(x) = x^2,$

a jako funkcje wagowe:

$w_1(x) = 1,$
$w_2(x) = x,$
$w_3(x) = x^2.$

Jako funkcje wagowe na brzegu przyjąć funkcje w_i.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym (wynik podać w postaci ułamka dziesiętnego).

b) Wykonać te same obliczenia dla funkcji kształtu postaci:

$\Phi_1(x) = 1,$

$\Phi_2(x) = \exp x$.

Jako funkcje wagowe przyjąć pierwsze dwie funkcje wagowe z poprzedniego zadania.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązanie przybliżone. Policzyć także normę (w L^2) różnicy pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym.

Rozwiązanie

Kod procedury

Procedura realizuje metodę odchyłek ważonych przy założeniu, że funkcje kształtu spełniają zadane warunki brzegowe.

Rozważane jest równanie:

A(T(x)) = B(x) dla x∈(a,b) oraz T(x) = φ(x) dla x∈{a,b}.

Wejście:

operatorA - operator różniczkowy A;
BB - funkcja B;
Ω - przedział (a,b);
φ - funkcja zadana na brzegu;
q - funkcja zadana na brzegu;
Γ1 - brzeg;
wagi, - układ liniowo niezależnych funkcji wagowych;
wagib1 - jak wyżej;
wagib2 - j. w.;
bazowe - funkcje kształtu;
z - zmienna.

Wyjście:

rozwiązanie przybliżone lub dokładne.

```
In[◦]:= Clear[mow];
mow[operatorA_, BB_, Ω_, φ_, q_, Γ1_, wagi_, wagib1_, wagib2_,
  bazowe_, z_Symbol] := Module[{AA = operatorA, R0, R1, R2, w = wagi,
   wb1 = wagib1, wb2 = wagib2, n = Length[bazowe], T, uklad, rozwiazanie},

  T[x_] := Sum[p[i] * Function[bazowe⟦i⟧][x], {i, 1, n}];
  (*R0[x_]:=AA[x][T[x]]-BB[x];*)
  R0[x_] = (AA[x][#] - BB[x]) &;
  (*R1[x_]:=T[x]-φ[x];*)
  R1[x_] = (# - φ[x]) &;
  (*R2[x_]:=T'[x]-q[x];*)
  R2[x_] = (D[#, x] - q[x]) &;

  (*uklad=Table[∫_{Ω⟦1⟧}^{Ω⟦2⟧} (w⟦i⟧&)[x] R0[x][T[x]]ⅆx+∫_{Γ1⟦1⟧}^{Γ1⟦2⟧} (wb1⟦i⟧&)[x] R1[x][T[x]]ⅆx+
      ∫_{Γ2⟦1⟧}^{Γ2⟦2⟧} (wb2⟦i⟧&)[x] R2[x][T[x]]ⅆx==0,{i,n}];*)
  uklad = Table[
    ∫_{Ω⟦1⟧}^{Ω⟦2⟧} (w⟦i⟧ &)[x] R0[x][T[x]] ⅆx + (((wb1⟦i⟧ &)[x] R1[x][T[x]]) /. {x → Ω⟦1⟧}) +
      (((wb2⟦i⟧ &)[x] R2[x][T[x]]) /. {x → Ω⟦2⟧}) == 0 == 0, {i, n}];
  (*uklad=Table[∫_{Ω⟦1⟧}^{Ω⟦2⟧} (w⟦i⟧&)[x] R0[x][T[x]]ⅆx+
      (wb1⟦i⟧&)[x] R1[x][T[Ω⟦1⟧]]+(wb2⟦i⟧&)[x] R2[x][T[Ω⟦2⟧]]==0==0,{i,n}];*)

  rozwiazanie = Solve[uklad, Table[p[i], {i, n}]];
  (*Print["rozwiazanie ",rozwiazanie];*)

  Return[Sum[rozwiazanie⟦1, i, 2⟧ * Function[bazowe⟦i⟧][z], {i, 1, n}]]
 ]
```

Norma w L^p

```
In[◦]:= normaLp[f_, p_, a_, b_] := Module[{norma},
  norma = (∫_a^b Abs[f[x]]^p ⅆx)^(1/p);
  Return[norma]]
```

Przykład 1.2 z wykładu

In[ ]:=
```
Clear[p, op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] - D[#, t]) &;
BB[x_] := 0;
Ω = {0, 1};
φ[x_] := Piecewise[{{1, x == 0}}];
q[x_] := Piecewise[{{2, x == 1}}]
Γ1 = {0, 1};
bazowe = {1, Exp[x]};
wagi = {1, x};
wagib1 = wagi;
wagib2 = wagi;
mow[op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z]
```

Out[ ]=

$$-\frac{2-e}{e}+2\,e^{-1+x}$$

ad a)

In[ ]:=
```
Clear[p, op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] - D[#, t]) &;
BB[x_] := 0;
Ω = {0, 1};
φ[x_] := Piecewise[{{1, x == 0}}];
q[x_] := Piecewise[{{2, x == 1}}]
Γ1 = {0, 1};
bazowe = {1, x, x^2};
wagi = bazowe;
wagib1 = wagi;
wagib2 = wagi;
przyblizone = mow[op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z]
```

Out[ ]=

$$\frac{15}{17}+\frac{12\,x}{17}+\frac{12\,x^2}{17}$$

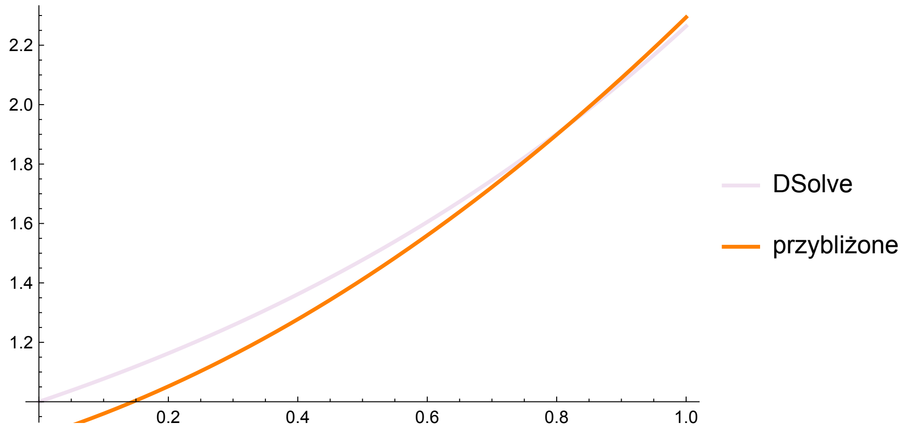
In[ ]:=
```
dokladne = DSolve[
    {op[x][u[x]] == BB[x], u[Ω[[1]]] == φ[Ω[[1]]], u'[Ω[[2]]] == q[Ω[[2]]]}, u[x], x][[1, 1, 2]]
```

Out[ ]=

$$\frac{-2+e+2\,e^{x}}{e}$$

In[•]:=
```
Show[Plot[dokladne, {x, Ω〚1〛, Ω〚2〛}, PlotLegends → {"DSolve"},
  PlotStyle → LightPurple], Plot[przyblizone, {x, Ω〚1〛, Ω〚2〛},
  PlotLegends → {"przybliżone"}, PlotStyle → Orange]]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
Clear[f];
f[x_] := przyblizone - dokladne;
normaLp[f, 2, Ω〚1〛, Ω〚2〛]
```

Out[•]=

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{5}\left(7225 - 2720\, e + 27\, e^2\right)}}{17\, e}$$

In[•]:=
```
% // N
```

Out[•]=

0.0759288

ad b)

In[•]:=
```
Clear[p, op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z];
op[t_] = (D[#, {t, 2}] - D[#, t]) &;
BB[x_] := 0;
Ω = {0, 1};
φ[x_] := Piecewise[{{1, x == 0}}];
q[x_] := Piecewise[{{2, x == 1}}]
Γ1 = {0, 1};
bazowe = {1, Exp[x]};
wagi = {1, x};
wagib1 = wagi;
wagib2 = wagi;
przyblizone = mow[op, BB, Ω, φ, q, Γ1, wagi, wagib1, wagib2, bazowe, z]
```

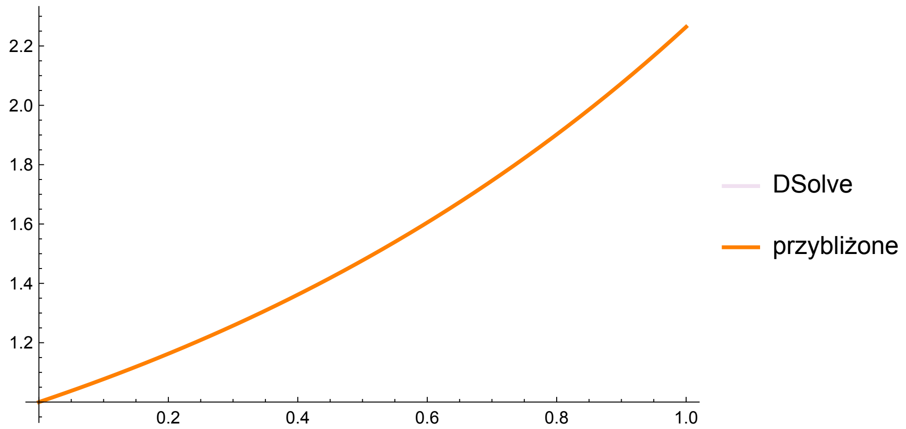
Out[•]=

$$-\frac{2 - e}{e} + 2\, e^{-1+x}$$

In[∘]:=
```
dokladne = DSolve[
    {op[x][u[x]] == BB[x], u[Ω⟦1⟧] == φ[Ω⟦1⟧], u'[Ω⟦2⟧] == q[Ω⟦2⟧]}, u[x], x]⟦1, 1, 2⟧
```
Out[∘]=

$$\frac{-2+e+2e^{x}}{e}$$

In[∘]:=
```
Show[Plot[dokladne, {x, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧}, PlotLegends → {"DSolve"},
  PlotStyle → LightPurple], Plot[przyblizone, {x, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧},
  PlotLegends → {"przybliżone"}, PlotStyle → Orange]]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
Clear[f];
f[x_] := przyblizone - dokladne;
normaLp[f, 2, Ω⟦1⟧, Ω⟦2⟧]
```
Out[∘]=

```
0
```

In[∘]:=
```
% // N
```
Out[∘]=

```
0.
```