

Autor: Krzysztof Barczak

# Metody numeryczne w technice

(kierunek Matematyka)

## Projekt 1

### Metody Rungego-Kutty

Napisać procedury realizujące algorytmy metod Rungego-Kutty rzędu trzeciego i rzędu czwartego (argumenty:  $f$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $h$ ,  $n$ ).

Korzystając z napisanych procedur wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{xy(x) - y^2(x)}{x^2}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla 20 kroków o długości 0.1.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone. Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych.

---

## Rozwiązanie

### Metoda Rungego-Kutty rzędu trzeciego - kod procedury

Wejście:

$f = f(x,y)$  - funkcja;  
 $x_0, y_0$  - wartości;  
 $n$  - liczba kroków;  
 $h$  - długość kroku.

Wyjście:

$(x_i, y_i)$  dla  $i = 0, 1, \dots, n$  - punkty.

```

In[*]:= Clear[metodaRK3];
metodaRK3[f_, x0_, y0_, h_, n_] :=
Module[{yValues, xValues, xNext = x0, yNext = y0, k1, k2, k3},

  xValues = {x0};
  yValues = {y0};

  Do[
    k1 = f[xNext, yNext];
    k2 = f[xNext +  $\frac{h}{2}$ , yNext +  $\frac{h k1}{2}$ ];
    xNext = xNext + h;
    xValues = Append[xValues, xNext];
    k3 = f[xNext, yNext - h k1 + 2 h k2];
    yNext = yNext + 1 / 6 h (k1 + 4 k2 + k3);
    yValues = Append[yValues, yNext],
    {i, 0, n - 1}];

  (*Print[{xValues,yValues}];*)
  Return[Transpose[{xValues, yValues}]]
]

```

## Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego - kod procedury

Wejście:

f = f(x,y) - funkcja;  
 x0, y0 - wartości;  
 n - liczba kroków;  
 h - długość kroku.

Wyjście:

$(x_i, y_i)$  dla  $i = 0, 1, \dots, n$  - punkty.

```
In[*]:= Clear[metodaRK4];  
metodaRK4[f_, x0_, y0_, h_, n_] :=  
Module[{yValues, xValues, xNext = x0, yNext = y0, k1, k2, k3, k4},  
  
  xValues = {x0};  
  yValues = {y0};  
  
  Do[  
    k1 = f[xNext, yNext];  
    k2 = f[xNext +  $\frac{h}{2}$ , yNext +  $\frac{h k1}{2}$ ];  
    k3 = f[xNext +  $\frac{h}{2}$ , yNext +  $\frac{h k2}{2}$ ];  
    xNext = xNext + h;  
    xValues = Append[xValues, xNext];  
    k4 = f[xNext, yNext + h k3];  
    yNext = yNext + 1 / 6 h (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);  
    yValues = Append[yValues, yNext],  
    {i, 0, n - 1}];  
  
  Return[Transpose[{xValues, yValues}]]  
]
```

## Rozwiązanie zagadnienia początkowego

```

In[*]:= Clear[f, punktyRK3, punktyRK4, solution, RK3, RK4, wykresRK3,
           wykresRK4, wykresDSolve, x0, y0, h, n, wykresBledyRK3, wykresBledyRK4];

f[x_, y_] :=  $\frac{x y - y^2}{x^2}$ ;

x0 = 1;
y0 = 2;
h = 0.1;
n = 20;

(* Rozwiązanie uzyskane z użyciem procedury DSolve *)
solution = DSolve[{y'[x] == f[x, y[x]], y[1] == 2}, y[x], x];

(* Rozwiązanie uzyskane z użyciem metodaRK3 *)
punktyRK3 = metodaRK3[f, x0, y0, h, n];
wykresRK3 = ListPlot[punktyRK3, (*Filling→Axis,*)
                     PlotStyle → Orange, PlotRange → {{.95, 3.1}, {0.9, 2.2}},
                     PlotMarkers → {*, Large}, PlotLegends → {"RK3"}];

(* Rozwiązanie uzyskane z użyciem metodaRK4 *)
punktyRK4 = metodaRK4[f, x0, y0, h, n];
wykresRK4 = ListPlot[punktyRK4, (*Filling→Axis,*)
                     PlotStyle → Brown, PlotRange → {{.95, 3.1}, {0.9, 2.2}},
                     PlotMarkers → {Automatic, Small}, PlotLegends → {"RK4"}];

wykresDSolve = Plot[solution[[1, 1, 2]], {x, 1, 3},
                    PlotLegends → {"DSolve"}, PlotStyle → LightPurple];

(*Wartości uzyskane z DSolve w węzłach siatki*)
yDSolve = Table[solution[[1, 1, 2]] /. {x → xw}, {xw, x0, x0 + h n, h}];

bledyRK3 =
  Table[{punktyRK3[[i, 1]], Abs[punktyRK3[[i, 2]] - yDSolve[[i]]]}, {i, 1, n + 1}];
wykresBledyRK3 = ListPlot[bledyRK3, Joined → True,
                          PlotLegends → {"Błędy RK3"}, PlotStyle → {Orange, Thickness[0.005]}];

bledyRK4 =
  Table[{punktyRK4[[i, 1]], Abs[punktyRK4[[i, 2]] - yDSolve[[i]]]}, {i, 1, n + 1}];
wykresBledyRK4 = ListPlot[bledyRK4, Joined → True,
                          PlotLegends → {"Błędy RK4"}, PlotStyle → {Thickness[0.005]}];

Show[wykresDSolve, wykresRK3, wykresRK4]
Show[wykresBledyRK3, wykresBledyRK4]

```

