

# Dynamiques du climat : bifurcation et albédo

POTHIN Rachel

rachel.pothin@etu.u-paris.fr

M1 Physique Fondamentale

Université Paris Cité, Paris, France

d'équilibre, nous pouvons étudier la dynamique de la température et identifier les conditions qui favorisent la stabilité ou l'instabilité. L'objectif est de comprendre la façon dont les variations de l'albédo affectent la température d'équilibre et de fournir des outils mathématiques pour prédire les réponses climatiques à ces variations.

## Abstract

Ce rapport analyse la stabilité de la température d'équilibre de la Terre en réponse aux variations de l'albédo global. En linéarisant les équations de bilan radiatif autour des points d'équilibre, nous identifions les conditions de stabilité et d'instabilité. Cette étude vise à comprendre l'impact des variations de l'albédo sur la température terrestre et à fournir des outils pour prédire les réponses climatiques à ces changements.

## 1 Introduction

Dans le contexte actuel de changement climatique, comprendre les mécanismes qui régissent la température terrestre est plus crucial que jamais. Les modèles climatiques jouent un rôle essentiel dans cette compréhension en fournissant des outils permettant de prédire les variations de température en réponse à divers facteurs. Parmi ces facteurs, l'albédo de la Terre, qui est la fraction de la lumière solaire réfléchi par la surface terrestre, est particulièrement important. Les variations de l'albédo peuvent entraîner des changements significatifs dans l'équilibre radiatif de la planète, influençant ainsi la température globale. Cependant, la complexité de ces interactions nécessite une analyse approfondie pour déterminer les conditions de stabilité des températures d'équilibre et leur sensibilité aux perturbations.

Ce rapport se concentre sur l'analyse de la stabilité des points d'équilibre de la température terrestre en fonction de l'albédo global. En posant les équations différentielles qui modélisent le bilan radiatif de la Terre et en les linéarisant autour des points

## 2 Modélisation

### 2.1 Bilan radiatif de la Terre

Dans cette partie, nous allons examiner le bilan radiatif de la Terre, un concept fondamental pour comprendre l'équilibre énergétique de notre planète. Le bilan radiatif représente la différence entre l'énergie solaire reçue par la Terre et l'énergie radiative émise par la Terre vers l'espace. Les principaux composants de ce bilan incluent l'absorption du rayonnement solaire par la surface terrestre et l'atmosphère, la réflexion de ce rayonnement par l'albédo, et l'émission de rayonnement infrarouge par la Terre.

L'énergie solaire incidente est donnée par la formule  $S = \frac{I_0}{4}$  avec  $I_0$  la constante solaire. Cette énergie solaire est ensuite partiellement réfléchi et son expression nous est donnée par  $R = \alpha(T)S$ , avec  $\alpha$  l'albédo, qui mesure la réflectivité de la surface terrestre et nous permet de déterminer la quantité de rayonnement solaire renvoyée dans l'espace. Finalement, la quantité d'énergie solaire absorbée par la Terre est donnée par  $A = S - R = \frac{I_0}{4}(1 - \alpha(T))$ . Enfin, l'énergie radiative émise par la Terre sous forme de rayonnement infrarouge est donnée par la loi de Stefan-Boltzmann :  $E = \epsilon\sigma_B T^4$  où  $\epsilon$  est l'émissivité de la surface terrestre,  $\sigma_B$  la constante de Stefan-Boltzmann et  $T$  la température de la surface terrestre.

La conservation de l'énergie nous permet à présent d'écrire l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{I_0}{4}(1 - \alpha(T)) - \epsilon\sigma_B T^4 \quad (1)$$

avec  $c$  la capacité thermique d'une couche océanique bien mélangée d'une profondeur de 30 m couvrant 70,8% de la surface de la Terre.

## 2.2 Etude des stabilités

L'étude des stabilités est une étape cruciale pour comprendre le comportement dynamique des systèmes climatiques. Dans cette section, nous allons analyser la stabilité des points d'équilibre de la température terrestre en réponse aux variations de l'albédo global. En linéarisant les équations de bilan radiatif autour des points d'équilibre, nous pouvons identifier les conditions qui déterminent si un équilibre est stable ou instable.

### 2.2.1 Premier cas : albedo constant

Nous allons commencer par modéliser le système de manière simplifiée en supposant que l'albédo de la Terre reste constant ( $\alpha(T) = \alpha$ ). En supposant que l'albédo est constant, nous simplifions notre modèle en évitant les complications dues aux variations de l'albédo avec la température. Cela rend plus facile l'analyse des points d'équilibre et de la stabilité du système climatique. Cette approche simplifiée nous aide à établir une compréhension de base des interactions entre la température et le bilan radiatif de la Terre. Ensuite, nous améliorerons notre modèle en introduisant une relation plus réaliste où l'albédo change avec la température, afin de mieux saisir les rétroactions positives et les possibles bifurcations climatiques.

La première étape de l'étude consiste à trouver les états d'équilibre du système. Ces états d'équilibre sont les valeurs de température pour lesquelles le système ne change pas au fil du temps. On cherche ainsi  $\bar{T}$  tel que  $\frac{dT}{dt} = 0$ . On obtient alors l'équation suivante :

$$\bar{T} = \sqrt[4]{\frac{I_0}{4\epsilon\sigma}(1 - \alpha)} \quad (2)$$

Une fois les états d'équilibre trouvés, on peut alors analyser leur stabilité pour comprendre comment le système réagit à de petites perturbations autour de

ces états. Pour ce faire, on linéarise ensuite notre expression (1) autour du point d'équilibre  $\bar{T}$ . On introduit alors une petite perturbation notée  $\lambda$  telle que la température instantanée s'écrit  $T = \bar{T} + \lambda$  avec  $\lambda = \lambda_0 \exp(\sigma t)$ ,  $\sigma$  étant le taux de croissance de la perturbation. On obtient :

$$\frac{d\lambda}{dT} = -4\sigma_B \bar{T}^3 \lambda \epsilon = \sigma \lambda \quad (3)$$

On étudie alors le signe de  $\sigma$  pour connaître la stabilité de notre système. Si  $\sigma > 0$ , la perturbation  $\lambda$  croît avec le temps, ce qui signifie que l'état d'équilibre est instable. Au contraire si  $\sigma < 0$ , on a diminution de la perturbation donc l'état d'équilibre devient stable. Ainsi, en étudiant le signe de  $\sigma$  nous pouvons déterminer si le système revient à l'état d'équilibre après une perturbation ou s'il s'éloigne de cet état.

### 2.2.2 Deuxième cas : albedo non constant

Dans cette partie, on va rendre notre modèle plus réaliste en prenant en compte un albédo qui change de façon quadratique avec la température. Plutôt que de supposer un albédo constant ou linéaire, on va utiliser la relation  $\alpha(T) = a_1 - b_1 T^2$ . Ici,  $a_1$  représente l'albédo de base à une température de référence, et  $b_1$  est un coefficient positif qui montre comment l'albédo réagit aux variations quadratiques de la température. Cette relation quadratique nous aide à mieux capturer certains effets non linéaires qu'on peut observer dans le climat réel. Par exemple, à des températures plus élevées, la fonte des glaces et de la neige peut faire baisser l'albédo de manière significative, et un terme quadratique est plus approprié pour modéliser cela. De plus, cette approche peut aussi représenter des phénomènes comme l'augmentation de la couverture nuageuse avec la température, qui ne suit pas forcément une relation linéaire.

On procède de la même façon que précédemment. On obtient l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{I_0}{4} (1 - (a_1 - b_1 T^2)) - \epsilon \sigma_B T^4 \quad (4)$$

On cherche à nouveau les états d'équilibre du système, c'est-à-dire  $\bar{T}$  tel que  $\frac{dT}{dt} = 0$ . En posant  $x = T^2$ ,

$m = \frac{-I_0}{4\epsilon\sigma_B} b_1$  et  $n = \frac{-I_0}{4\epsilon\sigma_B} (1-a_1)$ , on obtient l'équation du second degré suivante :

$$x^2 + mx + n = 0 \quad (5)$$

Le discriminant vaut alors  $\Delta = m^2 - 4n$  et les solutions sont  $x_{\pm} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$ . On trouve alors  $\bar{T}$  qui vaut :

$$\bar{T}_{\pm} = \sqrt{\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}} \quad (6)$$

Dans notre approche, on prendra soin de vérifier deux conditions importantes pour nous assurer que les solutions trouvées pour la température d'équilibre  $\bar{T}$  soient valides. D'abord, nous vérifierons que le discriminant  $\Delta$  soit positif pour que  $x_{\pm}$  soit réel. Ensuite, nous nous assurerons que  $x_{\pm}$  soient positives avant de prendre leur racine carrée pour obtenir  $\bar{T}$ . Cette vérification sera effectuée automatiquement en Python pour garantir que les calculs des températures d'équilibre soient corrects et significatifs.

Comme précédemment, on linéarise (4) autour du point d'équilibre  $\bar{T}$  en introduisant une petite perturbation  $\lambda$ . On trouve alors :

$$\frac{d\lambda}{dT} = \lambda \left( \frac{I_0}{2} b_1 \bar{T}_{\pm} - 4\epsilon\sigma_B T^3 \right) = \lambda \sigma \quad (7)$$

On peut finalement étudier le signe de  $\sigma$  pour connaître la stabilité de notre système.

### 3 Résultats

#### 3.1 Diagramme de bifurcation pour un albedo constant

On trace finalement la température dite d'équilibre  $\bar{T}$  en fonction du paramètre de contrôle, c'est-à-dire l'albedo dans notre cas. L'albedo peut prendre des valeurs comprises entre 0 et 1. On rappelle que la constante solaire vaut  $I_0 = 1361 W.m^{-2}$  et que l'émissivité de la surface terrestre vaut  $\epsilon = 0.62$ . On obtient alors le diagramme de bifurcation suivant :

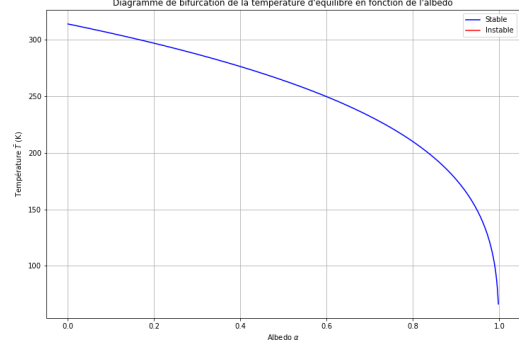


FIGURE 1 – Diagramme de bifurcation avec albedo constant

Pour un albédo de 0, la température d'équilibre est d'environ 300 K. Cela s'explique par le fait qu'un faible albédo signifie que plus de lumière solaire est absorbée par la Terre, augmentant ainsi la température. Les valeurs obtenues sur le graphe sont cohérentes avec les conditions terrestres réalistes, où la température moyenne de la surface terrestre est d'environ 288 K pour un albédo d'environ 0.3. À mesure que l'albédo augmente, l'énergie solaire absorbée diminue, entraînant une baisse de la température d'équilibre. Cette tendance indique une relation inverse entre l'albédo et la température d'équilibre : à mesure que l'albédo augmente, la température diminue.

En ce qui concerne la stabilité, la courbe est entièrement bleue, ce qui signifie que pour toutes les valeurs d'albédo dans la plage considérée, les températures d'équilibre sont stables. Cela signifie que le système climatique tendra à revenir à ces états d'équilibre après de petites perturbations.

### 3.2 Diagramme de bifurcation pour un albedo non constant

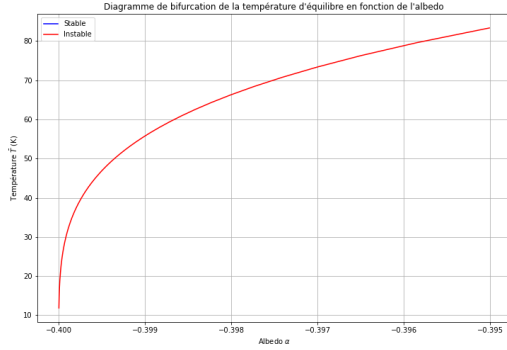


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation avec albedo variable

Le diagramme de bifurcation obtenu présente des incohérences, notamment des valeurs négatives pour l'albedo et des températures d'équilibre qui ne sont pas réalistes. Plusieurs facteurs pourraient expliquer ces résultats incorrects. Tout d'abord, la formulation de l'équation de l'albedo comme  $\alpha(T) = a_1 - b_1 T^2$  pourrait ne pas être appropriée ou correctement implémentée, ce qui nécessite une révision. Ensuite, il y a sans doute eu des erreurs dans le code au moment de vérifier les différentes conditions de validité des solutions. Il aurait également fallu ajouter une condition nécessaire sur  $a_1$  et  $b_1$  afin de s'assurer que la formule  $\alpha(T) = a_1 - b_1 T^2$  nous donne bien un albedo compris entre 0 et 1.

## 4 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons exploré la modélisation des bifurcations climatiques en lien avec l'albedo de la Terre. Nous avons d'abord établi les bases théoriques du bilan radiatif terrestre et analysé les points d'équilibre et la stabilité du système en considérant un albedo constant. Cette approche simplifiée nous a permis de comprendre les interactions fondamentales entre la température et le bilan radiatif.

Ensuite, nous avons essayé de complexifier le modèle en introduisant une relation où l'albedo varie en fonction de la température afin de traduire les rétroactions positives et les bifurcations climatiques potentielles. Toutefois, l'analyse des résultats a révélé des incohérences, comme des valeurs négatives pour l'albedo et des températures d'équilibre irréalistes. Nous avons identifié plusieurs sources potentielles d'erreur, telles que des équations mal formulées, des erreurs numériques et des vérifications insuffisantes des conditions de stabilité. Pour améliorer le modèle, il est nécessaire de reformuler certaines équations, de valider rigoureusement les discriminants et de vérifier strictement les conditions de stabilité.

En conclusion, bien que le modèle actuel présente des limitations, il offre une base solide pour comprendre les effets des variations de l'albedo sur le climat terrestre. Avec des ajustements et des vérifications supplémentaires, il sera possible d'affiner le modèle et d'obtenir des résultats plus cohérents et physiquement plausibles, ce qui contribuera à une meilleure compréhension des mécanismes de bifurcation climatique.

## 5 Bibliographie

- Ashwin, P., Wieczorek, S., Vitolo, R., and Cox, P. (2012). Tipping points in open systems : Bifurcation, noise-induced and rate-dependent examples in the climate system.
- Negaard, S. (1979). Catastrophes and Resilience of a Zero-Dim Climate System.