Санкт–Петербургский государственный университет

Жестоканов Евгений Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

Структурный подход в мононеявных методах Рунге — Кутты

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Вычислительные методы и технологии современного естествознания»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных систем Еремин Алексей Сергеевич

Рецензент:
доцент кафедры моделирования электромеханических и компьютерных систем, д.ф. - м.н.
Кривовичев Герасим Владимирович

Санкт-Петербург
2025 г.

Содержание

Введение . . . 3

Постановка задачи . . . 4

Обзор литературы . . . 5

Глава 1. Существующие методы . . . 7

1.1. Система . . . 7

1.2. Структурный метод . . . 7

1.3. Мононеявный метод . . . 7

Глава 2. Предложенный метод . . . 8

2.1. Схема . . . 8

2.2. Условия порядка . . . 9

2.3. Удовлетворенные условия . . . 9

Глава 3. Численные эксперименты . . . 11

Глава 4. Устойчивость метода . . . 13

4.1. Функция устойчивости в общем виде . . . 13

4.2. Функция устойчивости для предложенного метода . . . 15

4.3. Облась устойчивости . . . 15

Выводы . . . 20

Заключение . . . 21

Список литературы . . . 22

Приложение . . . 25

Введение

В процессе развития классических методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), таких как методы Рунге — Кутты (РК), экстраполяции и Адамса, которые изначально были разработаны для ручного расчёта, наблюдается постоянное расширение спектра решаемых задач, обусловленное технологическим прогрессом в области компьютерных вычислений.

С ростом мощности вычислительных машин появляются новые возможности для решения более сложных задач. Вместе с этим возникают и новые проблемы, связанные с приближением и устойчивостью более эффективных и надёжных алгоритмов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

Отсутствие однородности в реальных задачах, когда встречаются задачи, которые не являются исключительно жёсткими или нежёсткими, а представляют собой их сочетание, стало важным стимулом для улучшения и развития численных методов решения как жёстких, так и нежёстких задач.

Рассматриваемая далее система вида (1) возникает при описании задач небесной механики, оптимального управления, физики высоких энергий [7].

Постановка задачи

Методы решения структурно разделенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений класса $\mathfrak{A}(2)$ хорошо себя зарекомендовали с точки зрения критерия "вычислительные затраты/точность". Они позволяют получить требуемый порядок за меньшее число этапов, чем классический метод РК.

С другой стороны для жестких задач используются неявные методы РК, однако требуют наибольшего времени вычисления и ресурсов. Поскольку при их использовании возникает необходимость в решении векторной нелинейной системы.

Также для жестких задач используют моно-неявные методы РК, так как они хорошо себя показывают в решении жестких задач с вычислительной точки зрения [19].

В связи с двумя вышеперечисленными пунктами возникла мысль об объединении этих двух методов для анализа поведения полученного метода на жестких и нежестких задачах. Поскольку он должен вычисляться быстрее чем неявный РК, поскольку ему не нужно решать нелинейную систему, а только несколько нелинейных уравнений. А также должен неплохо себя показывать на жестких задачах.

В рамках данной работы планируется построить метод 4-го порядка: вывести условия порядка, предложить схему, а также рассмотреть вопрос об устойчивости данного метода.

Обзор литературы

Для написания данной работы были изучены и использованы научная и учебно-методическая литература, статьи студентов факультета прикладной математики - процессов управления.

Значительное количество исследований, посвящённых численным методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), сосредоточено на подходах, основанных на разбиении системы на две (реже — более) подсистемы, к каждой из которых применяется свой численный метод. При этом, несмотря на различие методов, они остаются взаимосвязанными. Одними из первых стратегий такого рода стали разделения на линейные и нелинейные, а также на жёсткие и нежёсткие компоненты (см., например,[2]). В дальнейшем подобные подходы применялись для выделения быстрых и медленных процессов в сложных системах[3, 4], при решении уравнений в частных производных [5], а также при разработке симплектических методов [6].

Среди методов такого рода особое внимание заслуживает подход, предложенный И.В.Олемским. Основу разделения в этом случае составляет структура зависимости правых частей системы ОДУ от её неизвестных функций. Было установлено, что во многих ситуациях возможно построение явных методов типа Рунге—Кутты, позволяющих достичь заданного порядка точности с меньшим числом вычислений правых частей по сравнению с классическими методами Рунге—Кутты, применяемыми без предварительного разделения. В частности, Олемскому удалось распространить идею, лежащую в основе методов Рунге—Кутты—Нюстрёма[1], на системы, разбитые на две части с перекрёстной зависимостью. В ряде его работ были предложены методы третьего порядка с двумя этапами, четвёртого — с тремя[8], и пятого порядка — с четырьмя этапами [9].

Моно-неявные методы РК(MIRK) активно изучаются в научной литературе множеством авторов на протяжении более тридцати лет. Изначально один из подклассов этих методов был предложен для решения задачи Коши в работе [10]. Полный класс методов MIRK был представлен для задач с начальным значением в работах [11] и [12]. Обзор существующих методов содержится в [13].

Для задач начального значения по ОДУ применение MIRK-схем оказывается по вычислительным затратам сопоставимым с лучшими реализациями более общего класса неявных методов РК (IRK). Что касается задач с граничными условиями (BVP), MIRK-методы анализировались в [14], [12], [15] и [16]. При решении таких задач они могут быть реализованы столь же эффективно, как и явные методы Рунге-Кутты [15].

Методы MIRK применялись при разработке программного пакета HAGRON, ориентированного на численное решение граничных задач с использованием отложенных поправок [17]. Более того, недавно MIRK-схемы были внедрены в другой программный комплекс, использующий непрерывные расширения этих методов для контроля дефектов при численном решении BVP-задач [18].

Основная часть указанных публикаций была посвящена разработке конкретных MIRK-методов и их эффективной реализации. Кроме того, в работах [11] и [16] проводился анализ условий порядка для MIRK-методов и их связи с классическими условиями Бутчера, характерными для стандартных IRK-схем. Более полный анализ подклассов с малым числом этапов и максимальным порядком s-этапного метода дан в [19].

Глава 1. Существующие методы

1.1 Система

Все дальнейшие рассуждения, кроме 1.3 будем вести о следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} & = f_1(x, y_2), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} & = f_2(x, y_1), \end{cases} \tag{1}$$

$$y_s(X_0) = y_{s0}, \quad s = 1, 2, \quad x \in [X_0, X_1] \subset R.$$

1.2 Структурный метод

По [7] схема рассчета для структурного метода РК описывается:

$$y_{s,i+1} = y_{s,i} + h \sum_{l=1}^{m_s} b_{sl} k_{sl} \quad s = 1, 2,$$

$$k_{1l} = \begin{cases} f_1(x + c_{11}h, y_{2i}), & l = 1, \\ f_1(x + c_{1l}h, y_{2i} + h \sum_{n=1}^{l-1} a_{1ln} k_{2n}), & l = 2, \ldots, m_1, \end{cases}$$

$$k_{2l} = f_2(x + c_{2l}h, y_{1i} + h \sum_{n=1}^{l-1} a_{2ln} k_{1n}), \quad c_{21} \neq 0, l = 1, \ldots, m_2,$$

1.3 Мононеявный метод

По [19] схема рассчета для моно-неявного метода РК описывается:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{l=1}^{s} b_l k_l,$$

$$k_l = f(x + c_l h, (1 - v_l) y_{1i} + v_l y_{1,i+1} + h \sum_{n=1}^{s} x_{ln} k_n), \quad l = 1, \ldots, s.$$

Глава 2. Предложенный метод

2.1 Схема

$$y_{s,i+1} = y_{s,i} + h \sum_{l=1}^{m_s} b_{sl} k_{sl} \quad s = 1, 2, \tag{2}$$

$$k_{1l} = \begin{cases} f_1(x + c_{11}h, (1 - v_{11})y_{2i} + v_{11}y_{2,i+1}), \quad l = 1 \\ , f_1(x + c_{1l}h, (1 - v_{11})y_{2i} + v_{11}y_{2,i+1} + h \sum_{n=1}^{l-1} x_{1ln}k_{2n}), \quad l = 2, \ldots, m_1, \end{cases}$$

$$k_{2l} = f_2(x + c_{2l}h, (1 - v_{2l})y_{1i} + v_{2l}y_{1,i+1} + h \sum_{n=1}^{l-1} x_{2ln}k_{1n}), \quad c_{21} \neq 0, l = 1, \ldots, m_2, \tag{3}$$

$$m_{s_1} = 3 \quad m_{s_2} = 2.$$

Коэффициенты в общем виде можно объединить в матрицы и векторы

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{1,3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_{2,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{1,2,2,1} & 0 \\ x_{1,3,2,1} & x_{1,3,2,2} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1,1,1} & 0 & 0 \\ x_{2,2,1,1} & x_{2,2,1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = [v_{1,2,1}, v_{1,2,2}, v_{1,2,3}],$$

$$v_2 = [v_{2,1,1}, v_{2,1,2}],$$

$$b_1 = [b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}],$$

$$b_2 = [b_{2,1}, b_{2,2}].$$

Введем вспомогательные матрицы и вектора для удобства записи условий порядка.

$$I_i = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{i},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_{1,2,1}b_{2,1} & v_{1,2,1}b_{2,2} \\ v_{1,2,2}b_{2,1} + x_{1,2,2,1} & v_{1,2,2}b_{2,2} \\ v_{1,2,3}b_{2,1} + x_{1,3,2,1} & v_{1,2,3}b_{2,2} + x_{1,3,2,2} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1,1}b_{1,1} + x_{2,1,1,1} & v_{2,1,1}b_{1,2} & v_{2,1,1}b_{1,3} \\ v_{2,1,2}b_{1,1} + x_{2,2,1,1} & v_{2,1,2}b_{1,2} + x_{2,2,1,2} & v_{2,1,2}b_{1,3} \end{pmatrix}.$$

2.2 Условия порядка

Условия порядка для предложенного метода 4-го порядка. Полученны как удовлетворенные условия на соответствующие деревья из [1]. Далее для s = 1, 2

$$U_1 = I_3, \quad U_2 = I_2,$$

$$A_s U_s - C_s U_s,$$

$$B_s U_s = 1,$$

$$B_s C_s^i U_s = \frac{1}{i+1}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$B_s A_s C_s^i U_s = \frac{1}{6i}, \quad i = 1, 2,$$

$$B_s C_s A_s C_s U_s = \frac{1}{8},$$

$$B_s A_s A_s C_s U_s = \frac{1}{24}.$$

2.3 Удовлетворенные условия

Далее будут приведены коэффициенты, удовлетворяющие условиям из 2.2. При их вычислении два раза были выбраны корни для квадратных уравнений, после чего получилась система с одним параметром x_{132}. Параметр был выбран равный 0.

$$c_1 = \left[1, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right],$$

$$c_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right],$$

$$v_1 = \left[1, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{18}, \frac{-\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right],$$

$$v_2 = \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right],$$

$$b_1 = \left[\frac{-1}{17} - \frac{3\sqrt{2}}{17}, \frac{3}{4}, \frac{21}{68} + \frac{3\sqrt{2}}{17}\right],$$

$$b_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ \frac{-\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}, 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{18}, 0 \end{pmatrix},$$

$$X2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6}, 0, 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}, -1, 0 \end{pmatrix}.$$

Удовлетворенные условия порядка в общем виде можно посмотреть в репозитории [21].

Глава 3. Численные эксперименты

Проведем эксперименты для установления порядка метода. Вышепредложенный метод реализован на языке Python с использованием бибилотек NumPy и SciPy. Программный код реализации доступен в [21]. Рассмотрим две задачи.

Задача 1.

$$\begin{aligned} &y_1' = -y_2 + e^{-x}, \\ &y_2' = y_1 + e^{-x}, \\ &x_0 = 0, y_1(0) = y_2(0) = 1, x_{end} = 1, \end{aligned}$$

Аналитическое решение выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &y_1 = 2\cos(x) - \sin(x) - e^{-x}, \\ &y_2 = 2\sin(x) + \cos(x). \end{aligned}$$

Решаем задачу с постоянным шагом h. Порядок будем определять по форумле (4).

$$p = \log_2\left(\frac{E_h}{E_{\frac{h}{2}}}\right) \tag{4}$$

Далее приведена таблица с глобальной прогрешностью E_h в зависимости от шага h.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
E_h	$1.46050 \cdot 10^{-6}$	$8.32381 \cdot 10^{-8}$	$5.20788 \cdot 10^{-9}$	$3.29724 \cdot 10^{-10}$

Рассчитаем 4 для каждых двух соседних столбцов.

$$\log_2\left(\frac{E_{0.1}}{E_{0.05}}\right) = 4.13307, \quad \log_2\left(\frac{E_{0.05}}{E_{0.025}}\right) = 3.99848, \quad \log_2\left(\frac{E_{0.025}}{E_{0.0125}}\right) = 3.98137$$

Из чего можем сделать вывод, что порядок для этой задачи соблюдается.

Задача 2.

$$\begin{aligned} &y_1' = -y_2 + e^{-20x}, \\ &y_2' = y_1 + e^{-20x}, \\ &x_0 = 0, y_1(0) = y_2(0) = 1, x_{end} = 1, \end{aligned}$$

Аналитическое решение выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{422}{401}\cos(x) - \frac{420}{401}\sin(x) - \frac{21}{401e^{20x}},\\
y_2 &= \frac{420}{401}\cos(x) + \frac{422}{401}\sin(x) - \frac{19}{401e^{20x}}.
\end{aligned}
$$

Далее приведена таблица с глобальной прогрешностью E_h в зависимости от шага h.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
E_h	$2.97881 \cdot 10^{-4}$	$2.10493 \cdot 10^{-5}$	$1.37051 \cdot 10^{-6}$	$8.69485 \cdot 10^{-8}$

Рассчитаем 4 для каждых двух соседних столбцов.

$$
\log_2(\frac{E_{0.1}}{E_{0.05}}) = 3.82289, \quad \log_2(\frac{E_{0.05}}{E_{0.025}}) = 3.94099, \quad \log_2(\frac{E_{0.025}}{E_{0.0125}}) = 3.97841
$$

Из чего можем сделать вывод, что порядок для этой задачи соблюдается с небольшой погрешность для самого большого шага.

Глава 4. Устойчивость метода

4.1 Функция устойчивости в общем виде

$$\begin{cases} y_1'(x) = \lambda y_2(x), \\ y_2'(x) = \lambda y_1(x). \end{cases} \tag{5}$$

Для получения функции устойчивости для предложенного метода рассмотрим результат применения одного шага метода (2) к системе (5). Можем рассматривать уравнение с одинаковыми собственными числами, поскольку систему с любыми двумя собственными числами можно свести к такому виду [20].

$$\begin{aligned} y_{11} &= y_{10} + zb_1^T Y_{12}, \\ y_{21} &= y_{20} + zb_2^T Y_{21}, \end{aligned} \tag{6}$$

Y_{12} и Y_{21} представляют собой вектора вида.

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \left[Y_{121}, \ldots, Y_{12m_1}\right], \\ Y_{21} &= \left[Y_{211}, \ldots, Y_{21m_2}\right], \end{aligned}$$

Выражаем Y_{12i} и Y_{21i} согласно (3), учитывая особенности системы (5).

$$\begin{aligned} Y_{12i} &= (1 - v_{1i})y_{20} + v_{1i}y_{21} + \sum_{j=1}^{i-1} x_{12ij} f_2(Y_{21j}), \\ Y_{21i} &= (1 - v_{2i})y_{10} + v_{2i}y_{11} + \sum_{j=1}^{i} x_{21ij} f_1(Y_{12j}), \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем уравнения (7) в векторном виде.

$$\begin{aligned} Y_{21} &= (I_{s2} - v_2)y_{10} + v_2 y_{11} + zX_{21}Y_{12}, \\ Y_{12} &= (I_{s1} - v_1)y_{20} + v_1 y_{21} + zX_{12}Y_{21}, \end{aligned}$$

Далее запишем матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (I_{s1}-v_1)y_{20}+v_1y_{21} \\ (I_{s2}-v_2)y_{10}+v_2y_{11} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

Подставим (8) в (6)

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} b_1^T & 0\dots0 \\ 0\dots0 & b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (I_{s1}-v_1)y_{20}+v_1y_{21} \\ (I_{s2}-v_2)y_{10}+v_2y_{11} \end{pmatrix},$$

Введем обозначение и через него выразим уравнение выше.

$$\begin{pmatrix} b_1^T & 0\dots0 \\ 0\dots0 & b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} =: \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} (I_{s1}-v_1)y_{20} \\ (I_{s2}-v_2)y_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1y_{21} \\ v_2y_{11} \end{pmatrix} \right],$$

Раскроем полседнюю скобку и приведем подобные слагаемые.

$$\begin{pmatrix} 1-zd_{12}v_2 & -zd_{11}v_1 \\ -zd_{22}v_2 & 1-zd_{21}v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+zd_{12}(I_{s2}-v_2) & zd_{11}(I_{s1}-v_1) \\ zd_{22}(I_{s2}-v_2) & 1+zd_{21}(I_{s1}-v_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix},$$

Выразим уравнение выше через (9) и (10)

$$P(z,w_1,w_2) = \begin{pmatrix} 1+zd_{12}w_2 & zd_{11}w_1 \\ zd_{22}w_2 & 1+zd_{21}w_1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$R(z) = P^{-1}(z,-v_1,-v_2)P(z,I_{s1}-v_1,I_{s2}-v_2), \tag{10}$$

Окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = R(z) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}.$$

4.2 Функция устойчивости для предложенного метода

Подставим в (10) коэффициенты из 2.3.

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+5} & \frac{3}{4} & \frac{6\sqrt{2}+9}{8\sqrt{2}+20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z(\frac{-\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z(\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{18}) & 0 \\ z\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -z(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}) & z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = \left[\frac{-\sqrt{3}(36\sqrt{6}+17z^2+12\sqrt{3})}{612}, \frac{3}{4}, \frac{21}{68}+\frac{3\sqrt{2}}{17}\right],$$

$$d_{12} = \left[\frac{\sqrt{3}z}{6}, 0\right],$$

$$d_{21} = \left[\frac{-(\sqrt{6}-3\sqrt{3})z(36\sqrt{6}+7z^2+24\sqrt{3})}{1512}, \frac{-z}{2}, 0\right],$$

$$d_{22} = \left[\frac{(\sqrt{6}-3\sqrt{3})(-18\sqrt{3}+7z^2-6\sqrt{6})}{252}, \frac{1}{2}\right],$$

Итого функция выглядит следующим образом.

$$R(z) = \begin{pmatrix} \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4-228\sqrt{3}z^2-132z^2-576\sqrt{3}-432)}{13(z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432)} & \frac{(-2+\sqrt{3})(z^2+12)(z^2-12\sqrt{3})z}{z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432} \\ \frac{12(-5+3\sqrt{3})(z^2+6\sqrt{3}+18)z}{z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432} & \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4-228\sqrt{3}z^2-132z^2-576\sqrt{3}-432)}{13(z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432)} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

4.3 Область устойчивости

Далее для нахождения области устойчивости рассмотрим собственные числа (11).

$$\lambda_1(z) = \frac{-(6\sqrt{3}z^4-11z^4+132\sqrt{3}z^2-204z^2+288\sqrt{3}}{-z^4+12\sqrt{3}z^2-12z^2-288\sqrt{3}+432} +$$
$$\frac{2\sqrt{57z^8-33\sqrt{3}z^8+2304z^6-1332\sqrt{3}z^6+28512z^4-16416\sqrt{3}z^4+108864z^2-62208\sqrt{3}z^2}-432)}{-z^4+12\sqrt{3}z^2-12z^2-288\sqrt{3}+432},$$

$$\lambda_2(z) = \frac{-(6\sqrt{3}z^4-11z^4+132\sqrt{3}z^2-204z^2+288\sqrt{3}}{-z^4+12\sqrt{3}z^2-12z^2-288\sqrt{3}+432} -$$
$$\frac{2\sqrt{57z^8-33\sqrt{3}z^8+2304z^6-1332\sqrt{3}z^6+28512z^4-16416\sqrt{3}z^4+108864z^2-62208\sqrt{3}z^2}-432)}{-z^4+12\sqrt{3}z^2-12z^2-288\sqrt{3}+432},$$

После чего определим функцию (12) и посмотрим на ее график при чисто мнимых аргументах. Потому что, если рассматривать всю комплексную область, то общее решение не бывает устойчивым и притягивающим [20].

$$M(z) = max(|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

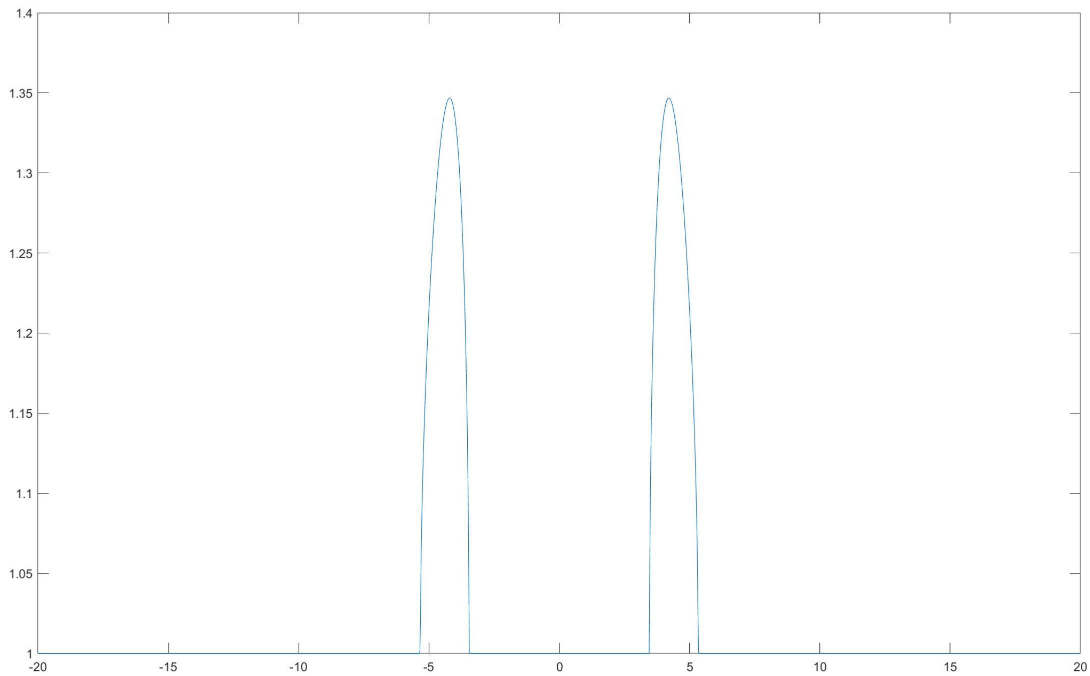

Рис. 1: M(z) при Re(z) = 0.

У функции есть небольшой всплеск от 3.45 до 5.35. Однако этот метод можно смело применять на практике. Как мы и убедились в 3. Считаю, что задачу 2 можно считать жетской.

Также был применен альтернативный подход из 2.2.2 [20]. Были получены функции, представляющие собоб сумму по столбцам.

$$R_1 = \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4 - 228\sqrt{3}z^2 - 132z^2 - 576\sqrt{3} - 432)}{13(z^4 - 12\sqrt{3}z^2 + 12z^2 + 288\sqrt{3} - 432)} + \frac{12(-5+3\sqrt{3})(z^2 + 6\sqrt{3} + 18)z}{z^4 - 12\sqrt{3}z^2 + 12z^2 + 288\sqrt{3} - 432},$$

$$R_2 = \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4 - 228\sqrt{3}z^2 - 132z^2 - 576\sqrt{3} - 432)}{13(z^4 - 12\sqrt{3}z^2 + 12z^2 + 288\sqrt{3} - 432)} + \frac{(-2+\sqrt{3})(z^2+12)(z^2 - 12\sqrt{3})z}{z^4 - 12\sqrt{3}z^2 + 12z^2 + 288\sqrt{3} - 432}$$

Построим область $|R_1| \leq 1 \cap |R_2| \leq 1$.

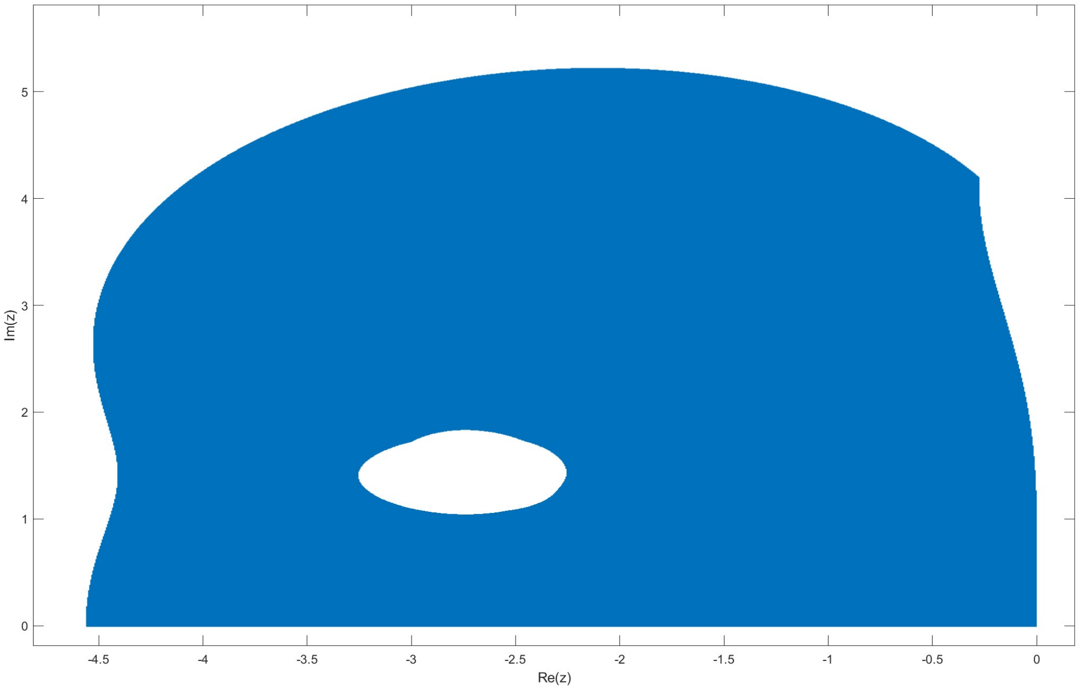

Рис. 2: $|R_1| \leq 1 \cap |R_2| \leq 1$

Область шире, чем у явного метода, однако не такая как у неявного. Из дальнейших рассуждений будет понятно, почему так происходит.

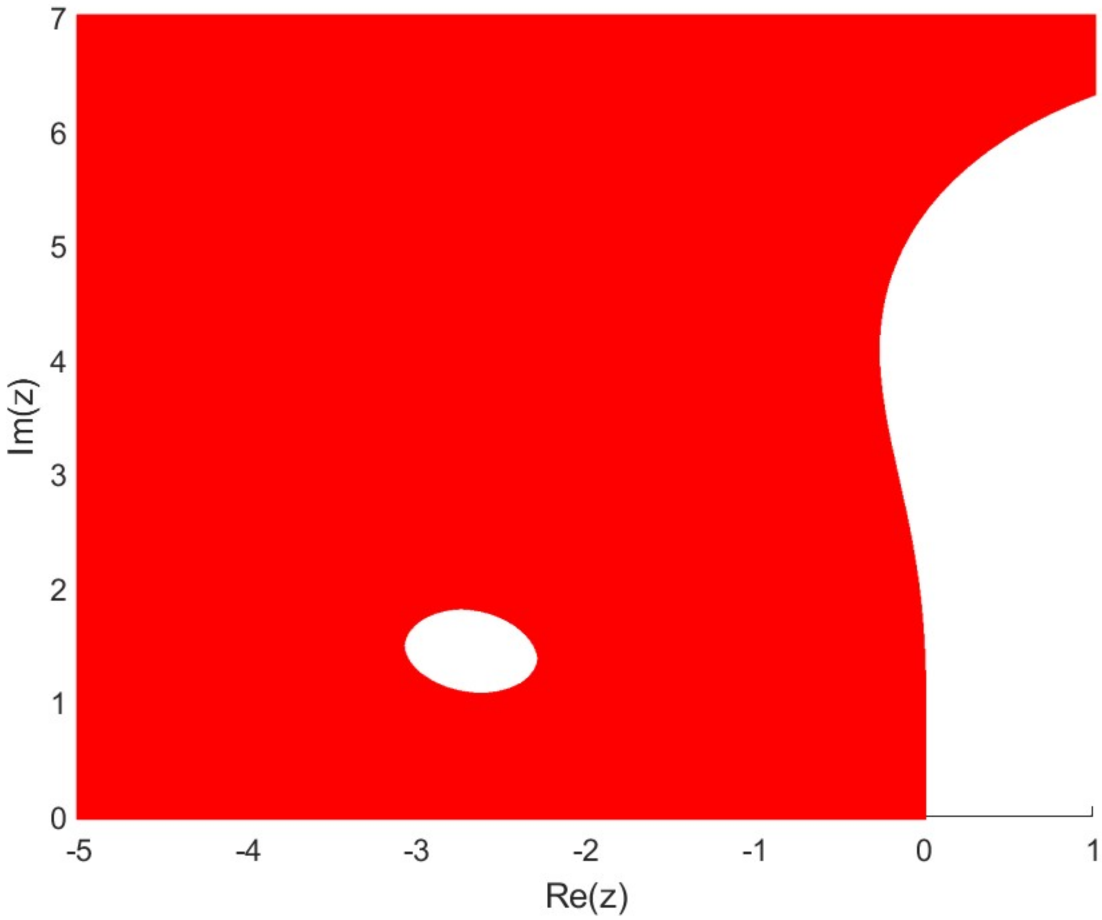

Рис. 3: $|R_1| \leq 1$

Данную область можно охарактеризовать как похожую на те, что принадлежат IRK. Из чего можем заключить, что область по первой компоненте неплохая.

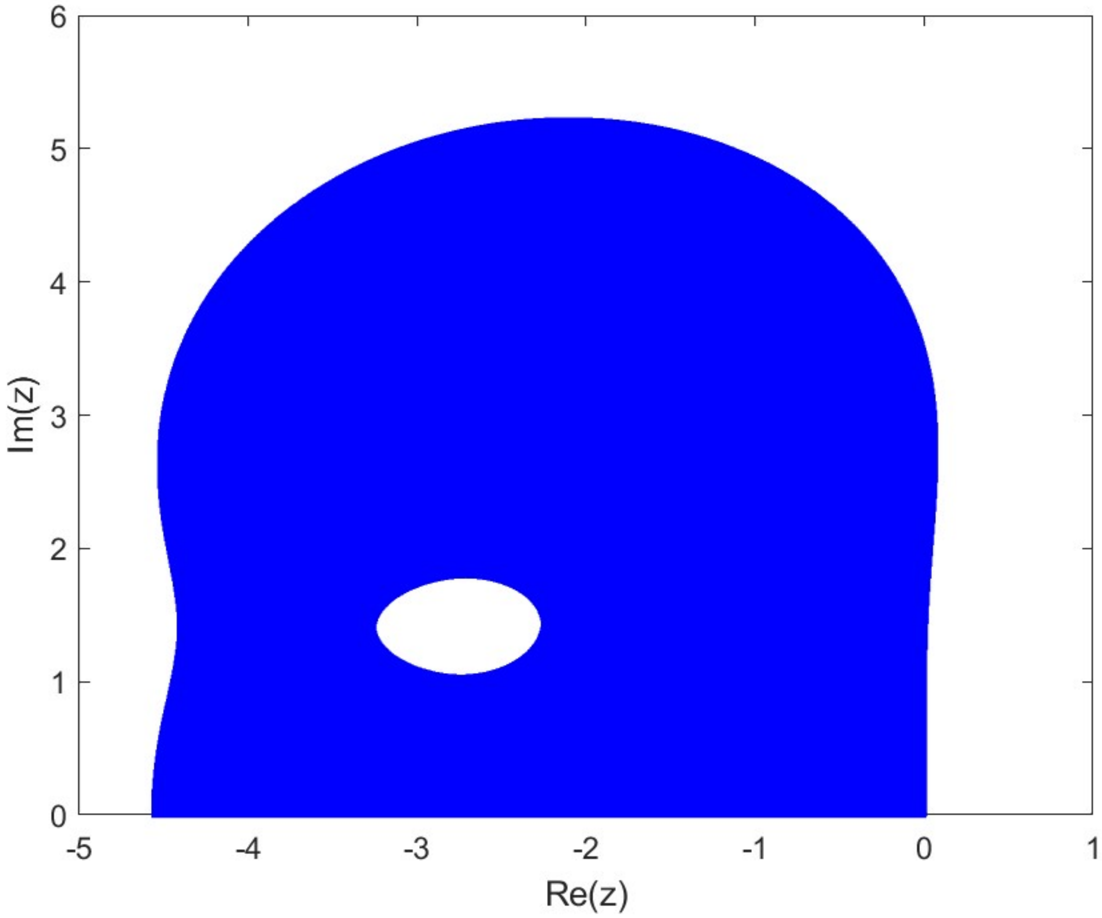

Рис. 4: $|R_2| \leq 1$

Однако тут результат достаточно плохой. По второй компоненте область похожа на область у классического РК, хотя и достаточно шире. Становится понятно, что из-за влияния второй компоненты пересечение похоже на явный метод.

Внутри области можно увидеть полую область, которая появляется из-за специфического вида функции устойчивости. А конкретно из-за того, что элементы представляют собой дроби.

Также стоит сказать, что возможно другие методы этого класса будет иметь лучшую область по сравнению с 2.

Выводы

Был получен метод, который можно использовать на практике. Поскольку он требует меньшего количества вычислений чем IRK при достаточно хорошей точности. Однако в данной работе не был рассмотрен весь класс, а лишь предложен конкретный. Сформулирована схема для этого класса. Также были определены условия 4 порядка. При необходимости можно расширить рассуждения для большего порядка. В работе даны выкладки для нахождения функции устойчивости любого метода класса.

Заключение

По результатам работы был представлен целый класс методов. Представители должны хорошо работать на практике. Так как из-за его особенностей присутствую черты неявного метода. При этом решается задача для скалярного нелинейного вместо векторного нелинейного уравнения. Что сильно сказывается на вычислительной сложности.

Список литературы

[1] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений» Издательство Москва Мир, 1990, С. 150–163.

[2] Hofer E. «A partially implicit method for large stiff systems of ODEs with only few equations introducing small time-constants» SIAM Journal Numerical Analytics, 1976, V. 13. I. 5. P. 645–663.

[3] Shome S. S., Haug E. J., Jay L. O. «Dual-rate integration using partitioned Runge–Kutta methods for mechanical systems with interacting subsystems» Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2004, V. 32. I. 3. P. 253–282.

[4] Sandu A., Gunther M. «Multirate generalized additive Runge–Kutta methods» Numerische Mathematik, 2016, V. 133. I. 3. P. 497–524.

[5] Ketcheson D. I., MacDonald C., Ruuth S. J. «Spatially partitioned embedded Runge–Kutta methods» SIAM Journal Numerical Analytics, 2013, V. 51. I. 5, P. 2887–2910

[6] Kalogiratou Z., Monovasilis T., Simos T. E. «Symplectic partitioned Runge — Kutta methods for the numerical integration of periodic and oscillatory problems» Recent Advances in Computational and Applied Mathematics. Dordrecht, Springer Netherlands Publ., 2011, P. 169–208.

[7] Олемской И. В. «Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений» СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009, С. 182

[8] Олемской И. В. «Структурный подход к задаче конструирования явных одношаговых методов» Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2003. Т. 43. № 7. С. 961–974.

[9] Олемской И. В. «Четырехэтапный метод пятого порядка точности численного интегрирования систем специального вида» Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. Т. 42. № 8. С. 1179–1190.

[10] Cash J. R. «A class of implicit Runge-Kutta methods for the numerical integration of stiff differential systems» J. Assoc. Comput. Mach., 1975, V. 22. P. 504–511.

[11] Van Bokhoven W. M. G.«Efficient higher order implicit one-step methods for integration of stiff differential equations» BIT, 1980, V. 20. P. 34–43.

[12] Cash J. R. and Singhal A. «Mono-implicit Runge-Kutta formulae for the numerical integration of stiff differential systems» IMA J. Numer. Anal., 1982, V. 2. P. 211–227.

[13] Muir P. H. and Enright W. H. «Relationships among some classes of IRK methods and their stability functions» BIT, 1987, V. 27. P. 403–423.

[14] Cash J. R. and Moore D. R. «A high order method for the numerical solution of two-point boundary value problems» BIT, 1980, V. 20. P. 44–52.

[15] Enright W. H. and Muir P. H. «Efficient classes of Runge-Kutta methods for two-point boundary value problems» Computing, 1986, V. 37. P. 315–334.

[16] Gupta S. «An adaptive boundary value Runge-Kutta solver for first order boundary value prob- lems» SIAM J. Numer. Anal., 1985, V. 22. P. 114–126.

[17] Cash J. R. and Wright M. H. «A deferred correction method for nonlinear two-point boundary value problems: implementation and numerical evaluation» SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1991, V. 12. P. 971–989.

[18] Muir P. H. and Owren B. «Order barriers and characterizations for continuous mono-implicit Runge-Kutta schemes» Math. Comp., 1993, V. 61. N. 204. P. 675–699.

[19] Burrage K., Chipman F. H., Muir P. H. «Order results for Mono-Implicit Runge-Kutta methods» SIAM J. Numer. Anal., 1994, V. 31. N. 3. P. 876–891.

[20] Винничек Н. Н. «Численная устойчивость разделяющихся методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.» Выпускная квалификационная работа магистра, Санкт-Петербургский государственный университет, фак-т ПМ-ПУ, 2018.

[21] Программный код к настоящей ВКР [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/potomushozhenya/qualifWork (Дата доступа: 19.05.2025).

Приложение