Санкт–Петербургский государственный университет

Жестоканов Евгений Вячеславович

Выпускная квалификационная работа

Структурный подход в мононеявных методах Рунге — Кутты

Уровень образования: бакалавриат
Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Основная образовательная программа СВ.5005.2015 «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование»
Профиль «Исследование и проектирование систем управления и обработки сигналов»

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных систем Еремин Алексей Сергеевич

Рецензент:
профессор, кафедра компьютерных технологий и систем, д.ф. - м.н. Веремей Евгений Игоревич

Санкт-Петербург
2025 г.

Содержание

Введение 3

Постановка задачи 4

Обзор литературы 5

Глава 1. Существующие методы 6

1.1. Система 6

1.2. Структурный метод 6

1.3. Мононеявный метод 6

Глава 2. Предложенный метод 7

2.1. Схема 7

2.2. Условия порядка 8

2.3. Удовлетворенные условия 8

Глава 3. Численные эксперименты 10

Глава 4. Устойчивость метода 12

4.1. Функция устойчивости в общем виде 12

4.2. Функция устойчивости для метода 13

4.3. Облась устойчивости 14

Выводы 15

Заключение 16

Список литературы 17

Приложение 18

Введение

В процессе развития классических методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), таких как методы Рунге — Кутты (РК), экстраполяции и Адамса, которые изначально были разработаны для ручного расчёта, наблюдается постоянное расширение спектра решаемых задач, обусловленное технологическим прогрессом в области компьютерных вычислений.

С ростом мощности вычислительных машин появляются новые возможности для решения более сложных задач. Вместе с этим возникают и новые проблемы, связанные с приближением и устойчивостью более эффективных и надёжных алгоритмов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

Отсутствие однородности в реальных задачах, когда встречаются задачи, которые не являются исключительно жёсткими или нежёсткими, а представляют собой их сочетание, стало важным стимулом для улучшения и развития численных методов решения как жёстких, так и нежёстких задач.

Рассматриваемая далее система вида (1) возникает при описании задач небесной механики, оптимального управления, физики высоких энергий [2].

Постановка задачи

Методы решения структурно разделенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений класса A(2) хорошо себя зарекомендовали с точки зрения критерия "вычислительные затраты/точность а также показывают себя лучше явных методов РК в численной устойчивости.

С другой стороны для жестких задач используются неявные методы РК, однако требуют наибольшего времени вычисления и ресурсов. Поскольку при их использовании возникает необходимость в решении векторной нелинейной системы.

Также для жестких задач используют моно-неявные методы РК, поскольку они хорошо себя показывают в решении жестких задач с вычислительной точки зрения [4].

В связи с двумя вышеперечисленными пунктами возникла мысль об объединении этих двух методов для анализа поведения полученного метода на жестких и нежестких задачах. Поскольку он должен вычисляться быстрее чем неявный РК, поскольку ему не нужно решать нелинейную систему, а только несколько нелинейных уравнений. А также должен неплохо себя показывать на жестких задачах.

В рамках данной работы планируется построить метод 4-го порядка: вывести условия порядка, предложить схему, а также рассмотреть вопрос об устойчивости данного метода.

Обзор литературы

Для написания данной работы были изучены и использованы научная и учебно-методическая литература, статьи студентов факультета прикладной математики - процессов управления.

Основными источниками стали монография доктора физико- математических наук Олемского Игоря Владимировича [2], описывающая структурные методы и приводящая их расчетные схемы и условия порядка, и статья [4], отражающая моно-неявные методы и приводящяя их расчетные схемы. Информация по устойчивости была взята из магистерской диссертации Винничек Никиты Николаевича.

Глава 1. Существующие методы

1.1 Система

Все дальнейшие рассуждения, кроме 1.3 будем вести о следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} & = f_1(x, y_2) \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} & = f_2(x, y_1) \end{cases} \tag{1}$$

$$y_s(X_0) = y_{s0}, \quad s = 1, 2, \quad x \in [X_0, X_1] \subset R,$$

1.2 Структурный метод

По [2] схема рассчета для структурного метода РК описывается:

$$y_{s,i+1} = y_{s,i} + h \sum_{l=1}^{m_s} b_{sl} k_{sl} \quad s = 1, 2$$

$$k_{1l} = \begin{cases} f_1(x + c_{11}h, y_{2i}), & l = 1 \\ f_1(x + c_{1l}h, y_{2i} + h \sum_{n=1}^{l-1} a_{1ln} k_{2n}), & l = 2, \ldots, m_1 \end{cases}$$

$$k_{2l} = f_2(x + c_{2l}h, y_{1i} + h \sum_{n=1}^{l-1} a_{2ln} k_{1n}), \quad c_{21} \neq 0, l = 1, \ldots, m_2$$

1.3 Мононеявный метод

По [4] схема рассчета для моно-неявного метода РК описывается:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{l=1}^{s} b_l k_l$$

$$k_l = f(x + c_l h, (1 - v_l) y_{1i} + v_l y_{1,i+1} + h \sum_{n=1}^{s} x_{ln} k_n), \quad l = 1, \ldots, s$$

Глава 2. Предложенный метод

2.1 Схема

$$y_{s,i+1} = y_{s,i} + h\sum_{l=1}^{m_s} b_{sl}k_{sl} \quad s = 1, 2 \tag{2}$$

$$k_{1l} = \begin{cases} f_1(x + c_{11}h, (1 - v_{11})y_{2i} + v_{11}y_{2,i+1}), & l = 1 \\ f_1(x + c_{1l}h, (1 - v_{11})y_{2i} + v_{11}y_{2,i+1} + h\sum_{n=1}^{l-1} x_{1ln}k_{2n}), & l = 2, \dots, m_1 \end{cases}$$

$$k_{2l} = f_2(x + c_{2l}h, (1 - v_{2l})y_{1i} + v_{2l}y_{1,i+1} + h\sum_{n=1}^{l-1} x_{2ln}k_{1n}), \quad c_{21} \neq 0, l = 1, \dots, m_2$$

$$s_1 = 3 \quad s_2 = 2$$

$$I_i = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{i}$$

Коэффициенты в общем виде выглядят следующим образом

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & c_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & c_{1,3} \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_{2,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{1,2,2,1} & 0 \\ x_{1,3,2,1} & x_{1,3,2,2} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1,1,1} & 0 & 0 \\ x_{2,2,1,1} & x_{2,2,1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = [v_{1,2,1}, v_{1,2,2}, v_{1,2,3}]$$

$$v_2 = [v_{2,1,1}, v_{2,1,2}]$$

$$b_1 = [b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}]$$

$$b_2 = [b_{2,1}, b_{2,2}]$$

Вспомогательные матрицы для удобства записи условий порядка.

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_{1,2,1}b_{2,1} & v_{1,2,1}b_{2,2} \\ v_{1,2,2}b_{2,1} + x_{1,2,2,1} & v_{1,2,2}b_{2,2} \\ v_{1,2,3}b_{2,1} + x_{1,3,2,1} & v_{1,2,3}b_{2,2} + x_{1,3,2,2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1,1}b_{1,1} + x_{2,1,1,1} & v_{2,1,1}b_{1,2} & v_{2,1,1}b_{1,3} \\ v_{2,1,2}b_{1,1} + x_{2,2,1,1} & v_{2,1,2}b_{1,2} + x_{2,2,1,2} & v_{2,1,2}b_{1,3} \end{pmatrix}$$

2.2 Условия порядка

Условия порядка для предложенного метода 4-го порядка. Полученны как удовлетворенные условия на соответствующие деревья из [3]. Далее для s = 1, 2

$$U_1 = I_3, \quad U_2 = I_2$$

$$A_sU_s - C_sU_s$$

$$B_sU_s = 1$$

$$B_sC_s^iU_s = \frac{1}{i+1}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$B_sA_sC_s^iU_s = \frac{1}{6 * i}, \quad i = 1, 2$$

$$B_sC_sA_sC_sU_s = \frac{1}{8}$$

$$B_sA_sA_sC_sU_s = \frac{1}{24}$$

2.3 Удовлетворенные условия

Далее будут приведены коэффициенты, удовлетворяющие условиям из 2.2. При их вычислении два раза были выбраны корни для квадратных уравнений, после чего получилась система с одним параметром. Параметр был выбран равный 0.

$$c_1 = \left[1, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right]$$

$$c_2 = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right]$$

$$v_1 = \left[1, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{18}, \frac{-\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{18}\right]$$

$$v_2 = \left[\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$$

$$b_1 = \left[\frac{-1}{17} - \frac{3\sqrt{2}}{17}, \frac{3}{4}, \frac{21}{68} + \frac{3\sqrt{2}}{17}\right]$$

$$b_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ \frac{-\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}, 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{18}, 0 \end{pmatrix}$$

$$X2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6}, 0, 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}, -1, 0 \end{pmatrix}$$

Удовлетворенные условия порядка в общем виде можно посмотреть в репозитории [1].

Глава 3. Численные эксперименты

Будем проводить эксперименты для установления порядка метода. Для эксеприментов будем использовать мною написанный код с вышепредложенным методом [1].

Рассмотрим задачу вида

$$
\begin{aligned}
&y_1' = -y_2 + e^{-x}\\
&y_2' = y_1 + e^{-x}\\
&x_0 = 0, y_1(0) = y_2(0) = 1, x_{end} = 1
\end{aligned}
$$

Аналитическое решение выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
&y_1 = 2\cos(x) - \sin(x) - e^{-x}\\
&y_2 = 2\sin(x) + \cos(x)
\end{aligned}
$$

Далее приведена таблица с максимальным модулем разности с аналитическим решением и соответствующим шагом.

0.1	0.05	0.025	0.0125
$1.46050 \cdot 10^{-6}$	$8.32381 \cdot 10^{-8}$	$5.20788 \cdot 10^{-9}$	$3.29724 \cdot 10^{-10}$

Из чего можем сделать вывод, что порядок для этой задачи соблюдается. Далее рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
&y_1' = -y_2 + e^{-20x}\\
&y_2' = y_1 + e^{-20x}\\
&x_0 = 0, y_0 = (1, 1), x_{end} = 1
\end{aligned}
$$

Аналитическое решение выглядит следующим образом

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{422}{401}\cos(x) - \frac{420}{401}\sin(x) - \frac{21}{401e^{20x}}\\
y_2 &= \frac{420}{401}\cos(x) + \frac{422}{401}\sin(x) - \frac{19}{401e^{20x}}
\end{aligned}
$$

Далее приведена таблица с максимальным модулем разности с аналитическим решением и соответствующим шагом.

0.1	0.05	0.025	0.0125
$2.97881 \cdot 10^{-4}$	$2.10493 \cdot 10^{-5}$	$1.37051 \cdot 10^{-6}$	$8.69485 \cdot 10^{-8}$

Глава 4. Устойчивость метода

4.1 Функция устойчивости в общем виде

$$\begin{cases} y_1'(x) = \lambda y_2(x) \\ y_2'(x) = \lambda y_1(x) \end{cases} \tag{3}$$

Для получения функции устойчивости для предложенного метода рассмотрим результат применения одного шага метода (2) к системе (3). Можем рассматривать уравнение с одинаковыми собственными числами, поскольку систему с любыми двумя собственными числами можно свести к такому виду [5].

$$y_{11} = y_{10} + zb_1^T Y_{12}$$
$$y_{21} = y_{20} + zb_2^T Y_{21}$$

$$Y_{12i} = (1 - v_{1i})y_{20} + v_{1i}y_{21} + \sum_{j=1}^{i-1} x_{12ij} f_2(Y_{21j})$$

$$Y_{21i} = (1 - v_{2i})y_{10} + v_{2i}y_{11} + \sum_{j=1}^{i} x_{21ij} f_1(Y_{12j})$$

$$Y_{21} = (I_{s2} - v_2)y_{10} + v_2 y_{11} + zX_{21}Y_{12}$$
$$Y_{12} = (I_{s1} - v_1)y_{20} + v_1 y_{21} + zX_{12}Y_{21}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (I_{s1} - v_1)y_{20} + v_1 y_{21} \\ (I_{s2} - v_2)y_{10} + v_2 y_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} b_1^T & 0\dots0 \\ 0\dots0 & b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (I_{s1} - v_1)y_{20} + v_1 y_{21} \\ (I_{s2} - v_2)y_{10} + v_2 y_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1^T & 0\dots0 \\ 0\dots0 & b_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -zX_{12} \\ -zX_{21} & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} (I_{s1} - v_1)y_{20} \\ (I_{s2} - v_2)y_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 y_{21} \\ v_2 y_{11} \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 - zd_{12}v_2 & -zd_{11}v_1 \\ -zd_{22}v_2 & 1 - zd_{21}v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + zd_{12}(I_{s2} - v_2) & zd_{11}(I_{s1} - v_1) \\ zd_{22}(I_{s2} - v_2) & 1 + zd_{21}(I_{s1} - v_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

$$P(z, w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 1 + zd_{12}w_2 & zd_{11}w_1 \\ zd_{22}w_2 & 1 + zd_{21}w_1 \end{pmatrix}$$

$$R(z) = P^{-1}(z, -v_1, -v_2)P(z, I_{s1} - v_1, I_{s2} - v_2) \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = R(z) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

4.2 Функция устойчивости для метода

Подставим в (4) коэффициенты из 2.3.

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+5} & \frac{3}{4} & \frac{6\sqrt{2}+9}{8\sqrt{2}+20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z(\frac{-\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z(\frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{18}) & 0 \\ z\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -z(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}) & z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = \left[\frac{-\sqrt{3}(36\sqrt{6} + 17z^2 + 12\sqrt{3})}{612}, \frac{3}{4}, \frac{21}{68} + \frac{3\sqrt{2}}{17} \right]$$

$$d_{12} = \left[\frac{\sqrt{3}z}{6}, 0 \right]$$

$$d_{21} = \left[\frac{-(\sqrt{6} - 3\sqrt{3})z(36\sqrt{6} + 7z^2 + 24\sqrt{3})}{1512}, \frac{-z}{2}, 0 \right]$$

$$d_{22} = \left[\frac{(\sqrt{6} - 3\sqrt{3})(-18\sqrt{3} + 7z^2 - 6\sqrt{6})}{252}, \frac{1}{2} \right]$$

$$R(z) = \begin{pmatrix} \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4-228\sqrt{3}z^2-132z^2-576\sqrt{3}-432)}{13(z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432)} & \frac{(-2+\sqrt{3})(z^2+12)(z^2-12\sqrt{3})z}{z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432} \\ \frac{12(-5+3\sqrt{3})(z^2+6\sqrt{3}+18)z}{z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432} & \frac{(-11+6\sqrt{3})(13z^4-228\sqrt{3}z^2-132z^2-576\sqrt{3}-432)}{13(z^4-12\sqrt{3}z^2+12z^2+288\sqrt{3}-432)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

4.3 Область устойчивости

Далее для нахождения области устойчивости рассмотрим собственные числа (5).

$$\lambda_1 = \frac{-(6\sqrt{3}z^4 - 11z^4 + 132\sqrt{3}z^2 - 204z^2 + 288\sqrt{3}}{-z^4 + 12\sqrt{3}z^2 - 12z^2 - 288\sqrt{3} + 432} + \frac{2\sqrt{57z^8 - 33\sqrt{3}z^8 + 2304z^6 - 1332\sqrt{3}z^6 + 28512z^4 - 16416\sqrt{3}z^4 + 108864z^2 - 62208\sqrt{3}z^2} - 432)}{-z^4 + 12\sqrt{3}z^2 - 12z^2 - 288\sqrt{3} + 432}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(6\sqrt{3}z^4 - 11z^4 + 132\sqrt{3}z^2 - 204z^2 + 288\sqrt{3}}{(-z^4 + 12\sqrt{3}z^2 - 12z^2 - 288\sqrt{3} + 432)} - \frac{2\sqrt{57z^8 - 33\sqrt{3}z^8 + 2304z^6 - 1332\sqrt{3}z^6 + 28512z^4 - 16416\sqrt{3}z^4 + 108864z^2 - 62208\sqrt{3}z^2} - 432)}{(-z^4 + 12\sqrt{3}z^2 - 12z^2 - 288\sqrt{3} + 432)}$$

Выводы

Здесь выводы

Заключение

тут заключение

Список литературы

[1] https://github.com/potomushozhenya/qualifWork

[2] Олемской И. В. «Методы интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений». Издательство С.-Петербургского университета, 2009, стр. 69-91.

[3] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений». Издательство Москва Мир, 1990, стр. 150-163.

[4] K. Burrage, F. H. Chipman, P. H. Muir «Order results for Mono-Implicit Runge-Kutta methods». SIAM J. Numer. Anal. Vol. 31, No. 3, pp. 876-891, 1994

[5] Винничек Н. Н. «Численная устойчивость разделяющихся методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений»Санкт-Петербургский государственный университет, 2018, стр. 9-31

Приложение