Дальневосточный федеральный университет

Школа естественных наук

Лабораторная работа №3 по дифференциальным уравнениям

Потоцкая Анастасия Б8203а

В лабораторной работе использовалась система компьютерной алгебры wxMaxima.

1.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -11x - 8y \\ \dot{y} = 8x + 5y \end{cases}$$

Тип: Однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(\frac{\sin(t)}{2}(3y(0) - 2x(0)) + x(0)\cos(t)) \\ y(t) = e^{2t}(\frac{\sin(t)}{2}(2y(0) - 4x(0)) + y(0)\cos(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -8y(0)te^{-3t} - 8x(0)te^{-3t} + x(0)e^{-3t} \\ y(t) = 8y(0)te^{-3t} + 8x(0)te^{-3t} + y(0)e^{-3t} \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость нулевое решение:

Корни характеристического уравнения первой системы:

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \imath$

Решение неусточиво.

Корни характеристического уравнения второй системы:

$\lambda_{1,2} = -3, 2$

Решение неусточиво.

Фазовый портрет в окрестности нуля:

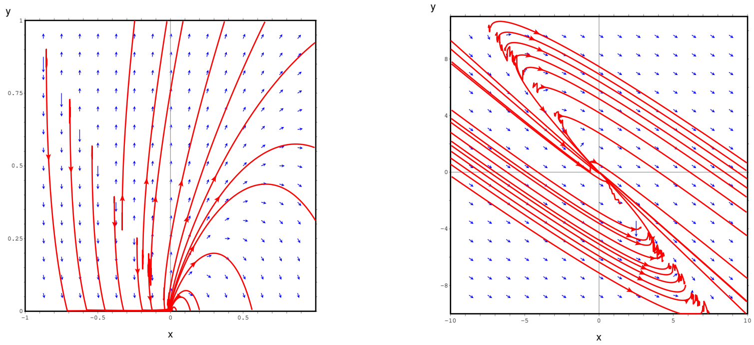

Рис. 1: Фазовые портреты

Команды вводимые в wxMaxima:

```
eqn_1:'diff(x(t), t) = x(t) + y(t);
eqn_2:'diff(y(t), t) = -2*x(t) + 3*y(t);
desolve([eqn_1, eqn_2], [x(t), y(t)]);

eqn_1:'diff(x(t),t)=-11*x(t)-8*y(t);
eqn_2:'diff(y(t),t)=8*x(t)+5*y(t);
desolve([eqn_1,eqn_2],[x(t),y(t)]);

plotdf((-2*x + 3*y)/(x + y), [x, -1, 1], [y, 0, 1]);
plotdf((8*x + 5*y)/(-11*x - 8*y), [x, -10, 10], [y, -10, 11]);
```

2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3x - y \qquad x(0) = 0, y(0) = -4 \end{cases}$$

Тип: Однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам

Частное решение:

$$\begin{cases} x(t) = -3e^{2t} - e^{-2t} \\ y(t) = 3e^{-2t} - 3e^{2t} \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость нулевое решение:

Корни характеристического уравнения:

$\lambda_{1,2} = -2, 2$

Решение неусточиво.

Команды вводимые в wxMaxima:

```
a: matrix([1,1],[3,-1]);
eigenvalues(a);

de1:'diff(x(t),t)=x(t)+y(t);
de2:'diff(y(t),t)=3*x(t)-y(t);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(x(t),t=0,-4);
desolve([de1,de2],[y(t),x(t)]);
```

3.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 7y \\ \dot{y} = x + 9y + t \end{cases}$$

Тип: Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{e^{8t}}{384}(448y(0) + 64x(0) + 7) + \frac{e^{2t}}{24}(28y(0) + 28x(0) + 7) - \frac{7t}{16} - \frac{35}{128} \\ y(t) = \frac{e^{8t}}{384}(448y(0) + 64x(0) + 7) - \frac{e^{2t}}{24}(4y(0) + 4x(0) + 1) - \frac{t}{16} + \frac{3}{128} \end{cases}$$

Команды вводимые в wxMaxima:

```
de1:'diff(x(t),t)=x(t)-7*y(t);
de2:'diff(y(t),t)=x(t) + 9 * y(t) + t;
desolve([de1,de2],[y(t),x(t)]);
```

4.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 9y + 8z \\ \dot{y} = 2y + 3z \\ \dot{z} = 6z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x - 9y - 3z \\ \dot{y} = 3x + 4y + 9z \\ \dot{z} = 3x + 7z + 6z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x + y + 4z \\ \dot{y} = 2x - y + 2z \\ \dot{z} = 4x - 6y + z \end{cases}$$

Тип: Однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам

Общее решение первой системы:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{59}{20}z(0)e^{6t} - \frac{e^{2t}}{4}(27z(0) - 36y(0)) + \frac{e^{t}}{5}(19z(0) - 45y(0) + 5x(0)) \\ y(t) = \frac{3}{4}z(0)e^{6t} - \frac{e^{2t}}{4}(3z(0) - 4y(0)) \\ z(t) = z(0)e^{6t} \end{cases}$$

Общее решение второй системы:

$$\begin{cases} x(t) = -30z(0)te^{7t} + 18y(0)te^{7t} - 6x(0)te^{7t} + (9z(0) - 9y(0) + x(0))e^{7t} + \\ \qquad +(9y(0) - 9z(0))e^{4t} \\ y(t) = 15z(0)te^{7t} - 9y(0)te^{7t} + 3x(0)te^{7t} + (3y(0) - 2z(0))e^{7t} + \\ \qquad +(2z(0) - 2y(0))e^{4t} \\ z(t) = 15z(0)te^{7t} - 9y(0)te^{7t} + 3x(0)te^{7t} + \\ \qquad +(3y(0) - 2z(0))e^{7t} + (3z(0) - 3y(0))e^{4t} \end{cases}$$

Общее решение третьей системы:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}(\frac{\sin(t)}{2}(\frac{(2(31z(0)-85y(0)+31x(0)))}{26} + \frac{(4(3z(0)+14y(0)+3x(0)))}{26}) + \\ \qquad +\frac{((3z(0)+14y(0)+3x(0))\cos(t))}{13}) - \frac{e^{-3t}}{13}(3z(0) + 14y(0) - 10x(0)) \\ y(t) = e^{2t}(\frac{\sin(t)}{2}(4z(0) - 6y(0) + 4x(0)) + y(0)\cos(t)) \\ z(t) = e^{2t}((\frac{4}{26}(10z(0) - 14y(0) + 10x(0)) - \frac{2}{26}(18z(0) - 20y(0) + 18x(0)))\frac{\sin(t)}{2} + \\ \qquad +\frac{\cos(t)}{13}(10z(0) - 14y(0) + 10x(0)) + +\frac{e^{-3t}}{13}(3z(0) + 14y(0) - 10x(0)) \end{cases}$$

Исследуем на устойчивость нулевое решение:

Корни характеристического уравнения первой системы:

$\lambda_{1,2,3} = 1, 2, 6$

Решение неусточиво.

Корни характеристического уравнения второй системы:

$\lambda_{1,2,3} = 7, 7, 4$

Решение неусточиво.

Корни характеристического уравнения третьей системы:

$\lambda_{1,2,3} = -3, 2 \pm \imath$

Решение неусточиво.

Команды вводимые в wxMaxima:

```
a: matrix([1,9,8],[0,2,3],[0,0,6]);
eigenvalues(a);

a: matrix([1,-9,-3],[3,4,9],[3,0,13]);
eigenvalues(a);

a: matrix([1,1,4],[2,-1,2],[4,-6,1]);
eigenvalues(a);

de1:'diff(x(t),t)=x(t) + 9*y(t) + 8*z(t);
de2:'diff(y(t),t)=2*y(t)+3*z(t);
de3:'diff(z(t),t)=6*z(t);
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);



de1:'diff(x(t),t)=x(t)-9*y(t)-3*z(t);
de2:'diff(y(t),t)=3*x(t)+4*y(t)+9*z(t);
de3:'diff(z(t),t)=3*x(t)+13*z(t);
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);

de1:'diff(x(t),t)=x(t)+y(t)+4*z(t);
de2:'diff(y(t),t)=2*x(t)-y(t)+2*z(t);
de3:'diff(z(t),t)=4*x(t)-6*y(t)+z(t);
```

```
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);
```

5.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y - 6z + 13t^2 - 12t + 36 \\ \dot{y} = 2x - 6y - 2z + 6t^2 - 6t + 24 \\ \dot{z} = x + 6y - 4z + 3t^2 - 4t + 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y - 3z + 35e^{2t} \\ \dot{y} = -9x - y - 9z + 51e^{2t} \\ \dot{z} = -4x + 8y + 2z - 20e^{2t} \end{cases}$$

Тип: Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}(\frac{\sin(2t)}{4}(-16z(0) - 16y(0) + 16x(0) + 180)+ \\ \qquad +(2z(0) + 8y(0) - 2x(0) - 25)\cos(2t))- \\ \qquad -(6z(0) + 24y(0) - 9x(0) - 106)\frac{e^{-3t}}{3} + 3t^2 + 2t - \frac{31}{3} \\ y(t) = e^{-2t}\frac{\sin(2t)}{4} * (-4z(0) - 8y(0) + 4x(0) + 46) + \frac{\cos(2t)}{2}(2y(0) - 1))+ \\ \qquad +t^2 + \frac{1}{2} \\ z(t) = e^{-2t}(\frac{\sin(2t)}{4}(-8z(0) - 4y(0) + 8x(0) + 30)+ \\ \qquad +\frac{\cos(2t)}{2}(6z(0) + 16y(0) - 6x(0) - 71))- \\ \qquad -\frac{e^{-3t}}{3}(6z(0) + 24y(0) - 9x(0) - 106) + 3t^2 - 2t + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{6t}}{49}(51z(0) - 56y(0) + 100x(0) - 94) - e^{2t}- \\ \qquad -72z(0)t\frac{e^{-t}}{7} - 72x(0)t\frac{e^{-t}}{7}+ \\ \qquad +360t\frac{e^{-t}}{7} - \frac{e^{-t}}{49}(51z(0) - 56y(0) + 51x(0) - 143) \\ y(t) = 2e^{2t} - 9e^{-t}z(0)t * -9e^{-t}x(0)t + 45e^{-t}t + e^{-t}(y(0) - 2) \\ z(t) = -\frac{e^{6t}}{49}(51z(0) - 56y(0) + 100x(0) - 94)+ \\ \qquad +6e^{2t} + 72z(0)t\frac{(e^{-t}}{7} + 72x(0)t\frac{e^{-t}}{7} - 360t\frac{e^{-t}}{7} + \frac{e^{-t}}{49}(100z(0) - 56y(0) + 100x(0) - 388) \end{cases}$$

Команды вводимые в wxMaxima:

```
de1:'diff(x(t),t)=3*x(t)-4*y(t)-6*z(t)+13*t^2-12*t+36;
de2:'diff(y(t),t)=2*x(t)-6*y(t)-2*z(t)+6*t^2-6*t+24;
```

```
de3:'diff(z(t),t)=x(t)+6*y(t)-4*z(t)+3*t^2-4*t+6;
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);


de1:'diff(x(t),t)=3*x(t)-8*y(t)-3*z(t)+35*exp(2*t);
de2:'diff(y(t),t)=-9*x(t)-y(t)-9*z(t)+51*exp(2*t);
de3:'diff(z(t),t)=-4*x(t)+8*y(t)+2*z(t)-20*exp( de1:'diff(x(t),t)=3*x(t)-8*y(t)-3*z(t
de2:'diff(y(t),t)=-9*x(t)-y(t)-9*z(t)+51*exp(2*t);
de3:'diff(z(t),t)=-4*x(t)+8*y(t)+2*z(t)-20*exp(2*t);
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);2*t);
desolve([de1,de2,de3],[x(t),y(t),z(t)]);
```