Домашняя работа № 3

Потоцкая Анастасия
Б8303а

26 марта 2019 г.

№10

Показать, что

$$\text{null?}(\text{cons}\,MN) = \text{false}$$

$$\text{head}(\text{cons}\,MN) = M$$

$$\text{tail}(\text{cons}\,MN) = N$$

1.

$$\text{null?}(\text{cons}\,MN) \equiv (\lambda z.\,\text{first}\,z)((\lambda xy.\,\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,xy))MN) \to$$
$$\to \text{first}(\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,MN))) \to \text{false}$$

2.

$$\text{head}(\text{cons}\,MN) \equiv (\lambda z.\,\text{first}(\text{second}\,z))(\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,MN)) \to$$
$$\to \text{first}(\text{second}(\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,MN))) \to \text{first}(\text{pair}\,MN) \to M$$

3.

$$\text{tail}(\text{cons}\,MN) \equiv (\lambda x.\,\text{second}(\text{second}\,z))(\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,MN)) \to$$
$$\to \text{second}(\text{second}(\text{pair}\,\text{false}(\text{pair}\,MN))) \to \text{second}(\text{pair}\,MN) \to N$$

№11

Описать натуральные числа использую списки. Ввести на них операцию сложения и умножения.
Зададим натуральные числа ввиде.

$$\underline{0} = \text{nil}$$

$$\underline{1} = \text{cons}\ x\ \text{nil}$$
$$\underline{2} = \text{cons}\ x(\text{cons}\ x\ \text{nil})$$
$$\underline{n} = \underbrace{\text{cons}(\ldots\text{cons}\ x\ \text{nil})}_{n}$$

Тогда операции сложения и умножения примут вид

$$\text{add} \equiv \text{append}$$

$$\text{mult} \equiv \lambda NZ.\text{if}\ (\text{null?}\ Z)\underline{0}\ (\text{append}\ N(\text{mult}\ N(\text{tail}\ Z)))$$

№12

Показать, что функции prefn и pre удовлетворяют спецификации. Рассмотрим функцию

$$\text{prefn} \equiv \lambda fp.\text{pair } (f(\text{first } p))(\text{first } p)$$

Покажем, что

$$\underline{n+1} \text{ (prefn } f)(\text{pair } xx) = \text{pair } (f^{n+1}x)(f^n x)$$

Доказательство

$$\underline{n+1} \text{ (prefn } f)(\text{pair } xx) = (\text{prefn } f)^{n+1}(\text{pair } xx) = (\text{prefn } f)^n \text{ prefn } f \text{ (pair } xx) =$$

$$= (\text{prefn } f)^n \text{ pair}(fx)x = (\text{prefn } f)^{n-1}\text{prefn } f \text{ pair } (fx)x =$$
$$= (\text{prefn } f)^{n-1} \text{ pair } (f^2x)fx = \text{pair } (f^{n+1}x)(f^n x)$$

Покажем теперь, что

$$\text{pre } \underline{n+1} = \lambda fx.\text{ second } (\underline{n+1} \text{ (prefn } f)(\text{pair } xx)) =$$

$$= \lambda fx.\text{second } (\text{pair } (f^{n+1}x)(f^n x)) = \lambda fx.f^n x = \underline{n}$$

$$\text{pre } \underline{0} = \lambda fx.\text{second } (\underline{0} \text{ (prefn } f)(\text{pair } xx)) = \lambda fx.\text{second } (\text{pair } xx) = \lambda fx.x = \underline{0}$$

№13

Показать

$$\text{sub } \underline{m} \; \underline{n} \to \underline{m-n}$$

Доказательство

$$\text{sub } \underline{m} \; \underline{n} \to \underline{n} \text{ pre } \underline{m} \to \text{pre}^n \; \underline{m} \to \text{pre}^{n-1}\text{pre } \underline{m}$$

$$\to \text{pre}^{n-1} \; \underline{m-1} \to \underline{m-n}$$

№14

Показать, что для функции

$$\text{ack} \equiv \lambda m.m(\lambda fn.nf(f\underline{1})) \text{ suc}$$

выполнены свойства

1. $$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{0} = \text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1}$$

2. $$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n+1} = \text{ack}\ \underline{m}(\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n})$$

Рассмотрим выражение

$$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n} = \underline{m+1}(\lambda fn.nf(f\underline{1}))\ \text{suc}\ \underline{n}$$

$$\underline{m+1} = \lambda fx.f^{m+1}x = \lambda fx.ff^{m}x = \lambda fx.f(\underline{m}fx)$$

$$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n} = (\lambda fn.nf(f\underline{1}))\ (\underline{m}\ (\lambda fn.nf(f\underline{1}))\ \text{suc})\underline{n} =$$

$$= (\lambda fn.nf(f\underline{1}))\ (\text{ack}\ \underline{m})\ \underline{n} = \underline{n}\ (\text{ack}\ \underline{m})(\text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1})$$

Рассмотрим первое свойствой

$$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{0} = \underline{0}\ (\text{ack}\ \underline{m})(\text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1}) = \text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1}$$

Рассмотрим второе свойство

$$\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n+1} = \underline{n+1}(\text{ack}\ \underline{m})(\text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1}) =$$

$$= \text{ack}\ \underline{m}\ (\underline{n}\ (\text{ack}\ \underline{m})(\text{ack}\ \underline{m}\ \underline{1})) = \text{ack}\ \underline{m}(\text{ack}\ \underline{m+1}\ \underline{n})$$