Дальневосточный федеральный университет

Школа естественных наук

Лабораторная работа №2 по дифференциальным уравнениям

Потоцкая Анастасия Б8203а

В лабораторной работе использовалась система компьютерной алгебры wxMaxima.

1.

$$y^3y'' + 4 = 0; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2$$

Тип: Дифференциальное уравненние 2-го порядка без независимой переменной

Понизим порядок данного уравнения.

Пусть y - независимая переменная, $p(y) = y'$ - новая функция. Тогда $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = p'p$

Подставим в уравнения

$$y^3p'p + 4 = 0$$

$$2p'p = -\frac{8}{y^3}$$

$$(p^2)' = -\frac{8}{y^3}$$

$$p^2 = \frac{4}{y^2} + C_1$$

Подставим $p = y'$

$$(y')^2 = \frac{4}{y^2} + C_1$$

Из начальных условий получаем: $4 = 4 + C_1$, следовательно $C_1 = 0$

$$(y')^2 = \frac{4}{y^2}$$

$$y' = \pm\frac{2}{y}$$

$$2yy' = \pm 4$$

$$(y^2)' = \pm 4$$

$$y^2 = \pm 4x + C_2$$

Из начальных условий получаем: $C_2 = 1$

Частное решение: Находим два частных решения

$$y^2 = 1 + 4x, \quad y^2 = 1 - 4x$$

Решим уравнения с помощью wMaxima

Общее решение:

$$[\frac{\sqrt{1 - 2C_1 y^2}}{4C_1} = x + C_2, -\frac{\sqrt{1 - 2C_1 y^2}}{4C_1} = x + C_2]$$

Частное решение: Частное решение не единственно

$$y^2 = 1 + 4x, y^2 = 1 - 4x$$

Команды вводимые в wxMaxima:

```
ode2('diff(y, x) = 2 / y, y, x);
ic1(%, y = -1, x = 0);

ode2('diff(y, x) = 2 / y, y, x);
ic1(%, y = -1, x = 0);

ode2('diff(y, x) = 2 / y, y, x);
ic1(%, y = -1, x = 0);
```

2.

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = 12x^2 - 6x$$

Составим характеристический многочлен

$$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$$

Найдем корни $k_{1,2} = -1, k_{2,3} = 0$

```
eq: x^4+2*x^3 + x^2 = 0;
allroots(eq);
```

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$$

Найдем частное решения неоднородного уравнения по виду правой части

$$y_{ch} = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Найдем производные y_{ch}

$$y_{ch}^{(1)} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y_{ch}^{(2)} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y_{ch}^{(3)} = 24Ax + 6B$$

$$y_{ch}^{(4)} = 24A$$

```
d: A*x^4 + B*x^3 + C*x^2;
diff(d, x);
diff(d, x, 2);
diff(d, x, 3);
diff(d, x, 4);
```

Составим систему

$$\begin{cases} 12A = 12 \\ 6B + 48A = -6 \\ 2C + 12B + 24A = 0 \end{cases}$$

Находим решение системы $A = 1 \quad B = -9 \quad C = 42$

```
diff(d, x, 4) + 2*diff(d, x, 3)+ diff(d, x, 2) = 12*x^2 - 6*x;
ratsimp(%, x);
[coeff(%, x, 2), coeff(%, x, 1), coeff(%, x, 0)];
solve(%, [A, B, C]);
```

$$y_{ch} = x^4 - 9x^3 + 42x^2$$

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + x^4 - 9x^3 + 42x^2$$

3.

$$y^{(3)} + y^{(2)} - 6y^{(1)} = (20x + 14)e^{2x}$$

Составим характеристический многочлен

$$k^3 + k^2 - 6k = 0$$

Найдем корни $k_1 = -3, k_2 = 2, k_3 = 0$

```
eq: k^3 + k^2 - 6*k = 0 ;
allroots(eq, k);
```

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + C_3$$

Найдем частное решения неоднородного уравнения по виду правой части

$$y_{ch} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$$

Найдем производные y_{ch}

$$y_{ch}^{(')} = e^{2x}(2Ax^2 + (2B + 2A)x + B)$$

$$y_{ch}^{('')} = e^{2x}(4Ax^2 + (4B + 8A)x + 4B + 2A)$$

$$y_{ch}^{(''')} = e^{2x}(8Ax^2 + (8B + 24A)x + 12B + 12A)$$

```
d: (A*x^2 + B*x)*exp(2*x);
ratsimp(diff(d, x), x);
```

```
ratsimp(diff(d, x, 2), x);
ratsimp(diff(d, x, 3), x);
```

Составим систему

$$\begin{cases} 8A + 4A - 12A = 0 \\ 8B + 24A + 4B + 8A - 6(2B + 2A) = 20 \\ 12B + 12A + 4B + 2A - 6B = 14 \end{cases}$$

Находим решение системы $A = 1 \quad B = 0$

```
diff(d, x, 3) + diff(d, x, 2)- 6*diff(d, x) = (20*x + 14)*exp(2*x);
ratsimp(%, x);
[coeff(%, x, 2), coeff(%, x, 1), coeff(%, x, 0)];
solve(%, [A, B]);
```

$$y_{ch} = x^2 e^{2x}$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + C_3 + x^2 e^{2x}$$

4.

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} = 4e^x(\sin x + \cos x)$$

Составим характеристический многочлен

$$k^2 + 2k = 0$$

Найдем корни $k_1 = -2, k_2 = 0$

```
eq: k^2+ 2*k = 0;
allroots(eq, k);
```

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2$$

Найдем частное решения неоднородного уравнения по виду правой части

$$y_{ch} = e^x(A\sin x + B\cos x)$$

Найдем производные y_{ch}

$$y_{ch}^{(')} = e^x((A-B)\sin x + (A+B)\cos x)$$

$$y_{ch}^{('')} = e^x(2A\cos x - 2B\sin x)$$

```
d: exp(x)*(A*sin(x) + B*cos(x) );
ratsimp(diff(d, x), cos(x), sin(x));
ratsimp(diff(d, x, 2), cos(x), sin(x));
```

Составим систему

$$\begin{cases} 2A - 4B = 4 \\ 2B + 4A = 4 \end{cases}$$

Находим решение системы $A = \frac{6}{5} \quad B = -\frac{2}{5}$

```
diff(d, x, 2) + 2*diff(d, x) = 4*exp(x)*(sin(x) + cos(x));
ratsimp(%, cos(x), sin(x));
[coeff(%, sin(x)),  coeff(%, cos(x))];
solve(%,[A, B]);
```

$$y_{ch} = e^x(\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x)$$

Общее решение:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2 + e^x(\frac{6}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x)$$

5.

$$y^{(3)} - 16y^{(1)} = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$$

Составим характеристический многочлен

$$k^3 - 16k = 0$$

Найдем корни $k_1 = -4, k_2 = 4, k_3 = 0$

```
eq: k^3- 16*k = 0;
allroots(eq, k);
```

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x} + C_3$$

Найдем частное решения неоднородного уравнения по виду правой части

$$y_{ch} = Axe^{4x} + B\cos 4x + C\sin 4x$$

Найдем производные y_{ch}

$$y_{ch}^{(')} = (4x+)Ae^{4x} + 4C\cos 4x - 4B\sin 4x$$

$$y_{ch}^{('')} = (16x+8)Ae^{4x} - 16B\cos 4x - 16C\sin 4x$$

$$y_{ch}^{(''')} = (64x+48)Ae^{4x} - 64B\cos 4x + 64C\sin 4x$$

```
d: A*x*exp(4*x) + B*cos(4*x) + C*sin(4*x);
ratsimp(diff(d, x), cos(4*x), sin(4*x));
ratsimp(diff(d, x, 2), cos(4*x), sin(4*x));
ratsimp(diff(d, x, 3), cos(4*x), sin(4*x));
```

Составим систему

$$\begin{cases} 64Ax + 48A - 16(4Ax + A) = 48 \\ -64C - 64C = 64 \\ 64B + 64B = -64 \end{cases}$$

Находим решение системы $A = \frac{3}{2} \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2}$

```
diff(d, x, 3) - 16*diff(d, x) = 48*exp(4*x) + 64*cos(4*x) - 64*sin(4*x);
ratsimp(%, exp(4*x), cos(4*x), sin(4*x));
```

```
    [coeff(%, sin(4*x)),  coeff(%, cos(4*x)), coeff(%, exp(4*x)) ];
solve(%, [A, C, B]);
```

$$y_{ch} = \frac{3}{2}xe^{4x} - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x$$

Общее решение:

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x} + C_3 + \frac{3}{2}xe^{4x} - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x$$

6.

$$y^{(2)} - 6y^{(1)} + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3$$

Составим характеристический многочлен

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

Найдем корни $k_1 = 2, k_2 = 4$

```
eq:  k^2- 6*k + 8 = 0;
allroots(eq, k);
```

Найдем общее решение однородного уравнения

$$y_{oo} = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$$

Найдем частное решения неоднородного уравнения методом вариации произвольного постоянного

$$y_{ch} = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{4x}$$

Составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{4x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{4x} + 4C_2'(x)e^{4x} = \frac{4}{2+e^{-2x}} \end{cases}$$

Находим решение системы C_1', C_2' и проинтегрируем

$$C_1(x)' = -\frac{2}{2e^{2x}+1} \quad C_2(x)' = \frac{2}{2e^{4x}+e^{2x}}$$

$$C_1(x) = \log\left(2e^{2x}+1\right) - 2x + c_1$$

$$C_2(x) = -e^{-2x}\left(1 + 4xe^{2x} - 2e^{2x}\log\left(2e^{2x}+1\right)\right) + c_2$$

```
d_1: C_1(x)*exp(2*x) + C_2(x)*exp(4*x) = 0;
d_2:  C_1(x)*2*exp(2*x) + C_2(x)*4*exp(4*x) = (4)/(2 + exp(-2*x));
solve([d_1, d_2], [C_1(x), C_2(x)]);
integrate(-2/(2*%e^(2*x)+1), x); ratsimp(%, x);
integrate(2/(2*%e^(4*x)+%e^(2*x)), x); ratsimp(%, x);
```

Общее решение:

$$y = c_1 * e^{2x} + c_2 * e^{4x} + e^{2x} * \left(\log\left(2e^{2x}+1\right) - 2x\right) - e^{2x} * \left(1 + 4xe^{2x} - 2e^{2x}\log\left(2e^{2x}+1\right)\right)$$

Решим задачу Коши

$$y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 + 3\ln 3 = c_1 + c_2 + 3\log(3) - 1 \\ y'(0) = 10\ln 3 = 10\log(3) + 2c_1 + 4c_2 - 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 2 \quad c_2 = 0$$

Частное решение:

$$y = 2e^{2x} + e^{2x} * \left(\log\left(2e^{2x}+1\right) - 2x\right) - e^{2x} * \left(1 + 4xe^{2x} - 2e^{2x}\log\left(2e^{2x}+1\right)\right)$$

```
d1 : a + b - 2 = 0;
d2: 2*a + 4*b - 4= 0;
solve([d1, d2], [a, b]);
```

7.

$$(x+1)y^{(3)} + y^{(2)} = (x+1)$$

Сделаем замену переменных $z = y''$

$$(x+1)z' + z = (x+1)$$

Решим соответсвующие однородное уравнение

$$(x+1)z^{'} + z = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\ln z = -\ln{(x+1)} + \ln C$$

$$z = \frac{C}{x+1}$$

$$z = \frac{C(x)}{x+1}$$

$$z' = \frac{C^{'}(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2}$$

Подставим в уравнение

$$C^{'}(x) = (x+1)$$

$$C(x) = \int (x+1)\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^2}{2} + C_1$$

Найдем z

$$z = \frac{x+1}{2} + \frac{C_1}{x+1}$$

Подставляем $z = y^{''}$

$$y^{''} = \frac{x+1}{2} + \frac{C_1}{x+1}$$

$$y^{'} = \frac{2x+x^2}{4} + C_1\ln{(x+1)} + C_2$$

Общее решение:

$$y = \frac{x^3+3x^2}{12} + C_1((x+1)\ln{(x+1)} - (x+1)) + C_2x$$

```
integrate( (x + 1)/(2) + C_1/(x + 1) , x);
```


```
integrate( (x + 1)/(2) + C_1/(x + 1) , x);
```