Домашняя работа № 5

Потоцкая Анастасия
Б8303а

28 марта 2019 г.

№18

Терм M разрешимый, если найдутся переменные $x_1, \ldots, x_m$ и термы $N_1, \ldots, N_n$ такие, что $(\lambda x_1, \ldots, x_m.M)N_1, \ldots, N_n = I$. Определить, какие из термов разрешимые:

$$Y, Y\,\mathrm{not}, K, YI, x\Omega, YK, n$$

Доказательство.

1. Представим Y в форме $\lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))$.
   Пусть $N_1 = (\lambda z.(\lambda x.x))$

   $$(\lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))))(\lambda z.(\lambda x.x)) \to$$

   $$\to (\lambda z.(\lambda x.x))((\lambda x.(\lambda z.(\lambda x.x))(xx))(\lambda x.(\lambda z.(\lambda x.x))(xx))) \to$$
   $$\to \lambda x.x \equiv I$$

   Терм Y разрешимый.

2. Так как $Y\,\mathrm{not}$ не имеет HNF, то для любых $x:\ \lambda x.Y\,\mathrm{not} \to Y\,\mathrm{not}$.
   Откуда следует, что не сущетвует таких $x_1 \ldots x_m,\ N_1 \ldots N_n$, что

   $$(\lambda x_1 \ldots x_m.(Y\,\mathrm{not}))N_1 \ldots N_n = I$$

3. Представим K в форме $\lambda xy.x$.
   Пусть $N_1 = \lambda z.z, N_2 = b$.

   $$(\lambda xy.x)(\lambda z.z)b \to (\lambda y.(\lambda z.z))b \to \lambda z.z \equiv I$$

   Терм K разрешимый.

4. Тоже, что и 2 пункте. Так как YI не определен, то терм неразрешимый.

5. Представим $x\Omega$ в форме $\lambda x.(x\Omega)$.
   Пусть $N_1 = \lambda z.(\lambda y.y)$.

   $$(\lambda x.(x\Omega))(\lambda z.(\lambda y.y)) \to (\lambda z.(\lambda y.y))\Omega \to \lambda y.y \equiv I$$

   Терм $x\Omega$ разрешимый.

6. Тоже, что и 2 пункте. Так как YK не определен, то терм неразрешимый.

7. Представим $\underline{n}$ в форме $\lambda fx.f(f(\ldots f(fx)))$.
   Пусть $N_1 = \lambda z.(\lambda y.y), N_2 = a$ Терм K разрешимый.

$$(\lambda fx.f(f(\ldots f(fx))))(\lambda z.(\lambda y.y))a \to$$
$$\to (\lambda x.(\lambda z.(\lambda y.y))(\ldots))a \to$$
$$\to (\lambda x.\lambda y.y)a \to \lambda y.y \equiv I$$

№19

Терм M называется разрешимым, если $\exists x_1, \ldots, x_m,\ N_1, \ldots, N_n$, такие, что $(\lambda x_1 \ldots x_m.M)N_1 \ldots N_n = I$. Доказать, что если M терм определенный, то он разрешимый.

Доказательство:

Представим M в HNF: $M = \lambda y_1 \ldots y_k.yM_1 \ldots M_l$. Пусть

$$x_1, \ldots, x_m = y, z_1, \ldots, z_q,$$

где $z_1, \ldots, z_m$ - свободные переменные в $M_1, \ldots, M_l$.
Тогда колличество $N_1, \ldots, N_n$ равно $n = m + k = 1 + q + k$.
Найдем представления для $N_1, \ldots, N_n$, такие, чтобы выполнялось

$$(\lambda yz_1 \ldots z_q.(\lambda y_1 \ldots y_k.yM_1 \ldots M_l))N_1 \ldots N_n\ = I$$

Пусть N_1 имеет вид: $(\lambda u_1 \ldots u_l.(\lambda x.x))$. Тогда:

$$(\lambda yz_1 \ldots z_q.(\lambda y_1 \ldots y_k.yM_1 \ldots M_l))((\lambda u_1 \ldots u_l.(\lambda x.x)))N_2 \ldots N_n \to$$
$$\to (\lambda z_1 \ldots z_q y_1 \ldots y_k.(\lambda u_1 \ldots u_l.(\lambda x.x))M_1 \ldots M_k)N_2 \ldots N_n \to$$
$$\to (\lambda z_1 \ldots z_q y_1 \ldots y_k.(\lambda x.x))N_2 \ldots N_n \to (\lambda x.x)$$

Откуда следует, что $N_2 \ldots N_n$ могут иметь любой вид.

№20

Проверить, имеет ли головную нормальную форму терм RR, где $R = \lambda x.\operatorname{not}(xx)$.

$$RR \to (\lambda x.\operatorname{not}(xx))(\lambda x.\operatorname{not}(xx)) \to \operatorname{not}((\lambda x.\operatorname{not}(xx))(\lambda x.\operatorname{not}(xx))) \equiv \operatorname{not}(RR)$$

RR - не имеет HNF.