MAT 1708 - Exercices

1. {1.1} Évaluer la somme $\sum_{k=0}^{4} 3k^2$.

2. {1.1} Évaluer la somme $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{6}\right)^k$.

3. {1.1} Évaluer la série $\sum_{i=1}^{6} f(x_k)\Delta x$, où $f(x) = 1 + x^2$ et $\Delta x = 1/3$.

4. {1.2} Évaluer la série $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{9}{5}\right)^k$.

5. {1.2} Évaluer la série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n + 4^n}{5^n}\right)$.

6. {1.2} Évaluer la série $1 + 3 + 9 + \cdots 2187$.

7. {1.2} Évaluer la série $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{3}^{3n+6} + \sqrt[4]{4}^{2n-1}}{5^{n+3}}\right)$.

8. {1.2} Quelle est la forme rationnelle du nombre $0.232323232323\ldots$?

9. {1.3} Calculer la valeur capitalisée d'un placement initial de 1000\$ si l'intérêt est composé 2 fois par année à un taux de 10% pendant 20 années.

10. {1.3} Calculer la valeur actualisée d'un solde final de 1000\$ si l'intérêt est composé 2 fois par année à un taux de 10% pendant 20 années.

11. {1.3} Trouver une formule pour la valeur capitalisée d'une série de paiements annuels P si l'intérêt i% est composé mensuellement (c'est-à-dire 12 fois par année) pendant t années.

12. {1.3} Une nouvelle employée ouvre un compte (sans intérêt) et y dépose son salaire mensuel de 2400\$ qu'elle reçoit au début de chaque mois. Ses dépenses mensuelles augmentent: durant chaque mois, elle dépense 40% du montant se trouvant dans son compte au début du mois.

    Quel est le solde de son compte au début du $k-$ième mois?

13. {1.3} On dépose une somme de 2000\$ à la banque dans un compte dont l'intérêt annuel est de 3%, composé à chaque 3 mois. Quel est le solde du compte après 10 ans?

14. {2.1} Calculer la pente de la droite tangente à la courbe $y = x + x^3$ au point $(2, 10)$.

15. {2.1} Calculer la pente de la droite tangente à la courbe $y = \sqrt{x+1}$ au point $(0, 1)$.

16. {2.1} Démontrer que la droite tangente à la courbe $y = x^3$ au point (a, a^3) n'intersecte la courbe qu'à un seul autre endroit. Donner les corrdonnées du point d'intersection.

17. {2.2} Calculer le taux d'accroissement de la circonférence d'un cercle en fonction de son rayon, lorsque le rayon est r.

18. {2.2} Calculer le taux de variation de la demande $d(x) = 1/x^2$ lorsque $x = 2$.

19. {2.3} Évaluer la somme à gauche SG(4) pour la fonction définie par $f(x) = 3x$ sur l'intervalle $[-2, -1]$.

20. {2.3} Calculer l'aire sous la courbe de la fonction définie par $f(x) = 3x$ entre $x = -2$ et $x = -1$.

21. {3.1.2} Résoudre l'inéquation $|2x - 1| < 7$.

22. {3.2.4} Combien de solutions réelles sont-elles admises par l'équation
$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

23. {4.1} Quel est le domaine de la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}?$$

24. {4.1.3} Soient $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $g(x) = x^2$ et $f(x) = 3x + 1$. Soient $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$.

    Calculer $k(38)$, $h(2)$, $k(2)$ et $h(-2)$.

25. {4.1.4} Trouver l'inverse de la fonction définie par $f(x) = \frac{5x-1}{3x+4}$.

26. {4.1.4} Trouver l'inverse de la fonction définie par $f(x) = -1/x$.

27. {4.2} Évaluer la limite suivante, si elle existe:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{12\Delta t + \sqrt{\Delta t}}{\Delta t + 2}.$$

28. {4.2.1} Évaluer la limite suivante, si elle existe:
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| + x}{3 + x}.$$

29. {4.2.1} La population de poisson dans un lac varie brusquement lorsqu'une compagnie y déverse des BPC. Supposons que $P(t)$ représente la population dans le lac au temps t, et que le déversement a lieu lorsque $t = 10$:
$$P(t) = \begin{cases} 6000\left(\frac{t^2+6}{10t+21}\right)^{1/2}, & t < 10 \\ 3000\left(\frac{t+1}{10t^2+17}\right)^{1/3}, & t \geq 10 \end{cases}$$
les avocats de la compagnie soutienne que le déversement n'a pas causé de dommages intensifs à l'écosystème du lac. Qu'en pensez-vous?

30. {4.2.1} Évaluer la limite à droite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4}.$$

31. {4.2.2} Déterminer si la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}+2, & x < -1 \\ 3, & x > -1 \\ 6, & x = -1 \end{cases}$$

est continue en $x = -1$.

32. {4.2.2} Déterminer si la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ -4/x, & -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

est continue en $x = 0$.

33. {4.2.2} Déterminer la constante b telle que la fonction définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ bx, & x \geq -1 \end{cases}$$

soit continue en $x = -1$.

34. {4.2.2} Pour quelle valeur de k est-ce que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} k-x, & x < 1 \\ \frac{3}{k+x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

est continue?

35. {4.2.2} Trouver a, b tels que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -ax+2 & \text{si } x < -2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \\ bx^3-3x & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

soit continue partout.

36. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}.$$

37. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

38. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{1/4}-1}{x}.$$

39. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|2+h|-|2|}{h}.$$

40. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x}.$$

41. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

42. {4.3} Évaluer la limite suivante, si elle existe:

$$\lim_{s\to 0} \frac{s+2-\sqrt{s+4}}{s}.$$

43. {5.1} Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 1 \\ \frac{3}{2-x} & x > 1 \end{cases}.$$

Calculer $f'(1)$ en utilisant la définition de la dérivée.

44. {5.1} Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-4}$, $x \geq 4$. Trouver la dérivée $f'(x)$ en n'utilisant que la définition de la dérivée.

45. {5.5} Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe

$$y = \frac{x}{x-1} + \frac{2}{3}(7+x)^{3/2}$$

lorsque $x = 2$.

46. {5.5} Calculer la dérivée de $y = \sqrt[3]{1+x+x^2}$.

47. {5.5} Calculer la dérivée de $y = \sqrt{2x-x^2}$.

48. {5.5} Calculer la dérivée (vitesse) d'un objet se déplaçant selon

$$s(t) = \sqrt{\frac{t+1}{17t}}.$$

49. {5.5} La longeur des arrêtes d'un cube est variable et dépend du temps t. Lorsque le volume du cube est de 8 m^3, son volume change à un taux de 6 m^3 par heure. À quel taux est-ce que la longeur de l'arrête change à cet instant?

50. $\{5.5\}$ Calculer la dérivée de
$$d(x) = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}}.$$

51. $\{5.6\}$ Le coût C d'un produit est donné par
$$x^2C^2 - \frac{x}{C} = 2.$$
Si $C(2) = 1$, quel est le coût marginal $C'(2)$?

52. $\{5.6\}$ Soit une courbe définie implicitement par $x^3 + xy = 2y^3 - 4$. Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe au point $(-1, 1)$?

53. $\{5.6\}$ Trouver l'équation de la droite tangente au graphe de
$$f(x) = \frac{16}{\sqrt{3x-2}} \quad \text{lorsque } x = 2.$$

54. $\{5.6\}$ Trouver l'équation de la droite tangente au graphe de la courbe définie implicitement par
$$x^4 + 2xy^2 + y = 0,$$
au point $(-1, 1)$.

55. $\{6.1\}$ Un objet se déplace horizontalement et sa distance h de l'origine au tempts t est
$$h(t) = \frac{t}{t^2+36}, \quad t \geq 0.$$
À quel instant est-ce que l'objet commence à revenir sur ses pas? Quelle est l'accélération de l'objet à cet instant?

56. $\{6.1\}$ Supposons qu'un palmier se déplace selon la fonction $s_1(t) = \frac{t^3}{3} + 4t^2 + 1$ et qu'un kangourou se déplace selon la fonction $s_2(t) = 10t^2 - 36t$. Que sont les vitesses respectives du kangourou et du palmier au moment où leurs accélérations respectives sont identiques?

57. $\{6.1\}$ Soit $s = 4t^{3/2} - 3t^2$, $t > 0$. Trouver s et a lorsque $v = 0$.

58. $\{6.1\}$ Calculer les dérivées secondes, troisièmes et quatrièmes de la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

59. $\{6.1\}$ Calculer les dérivées secondes, troisièmes et quatrièmes de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}(x+1)^3$.

60. $\{6.2\}$ Une somme de 1000\$ est investie dans un fond mutuel à risque élevé. Pendant les trois premières années, la valeur de l'investissement est donnée par $V(t) = 1000(t-1)^{4/3}$, $0 \leq t \leq 3$. À quel instant la valeur de l'investissement est-elle minimale et à quel instant est-elle maximale dans les cas suivants?

61. $\{6.2\}$ Trouver le maximum et le minimum de la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)^2$, sur $[0, 4]$.

62. $\{6.2\}$ Combien de points critiques sont-ils admis par la fonction définie selon $f(x) = |x|(3 - x^2)$?

63. $\{6.2\}$ La fonction coût d'un produit est donnée par

$$C(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

Que vaut son minimum dans l'intervalle $[0, 3]$?

64. $\{6.2\}$ Une commerçente observe que pour toute haute/baisse de prix unitaire de 50$, elle vend 100 unités en moins/plus par mois. De plus, elle sait que lorsqu'elle vend son produit à un prix unitaire de 400$, elle vend 600 unités par mois.

    Si la demande pour le produit est affine (linéaire) en fonction du prix unitaire, trouver la fonction demande et la fonction revenu pour le produit.

    Trouver les revenus mensuels issus de la vente de ce produit? Que sont la demande et le prix unitaire correspondants?

65. $\{6.2\}$ La fonction demande d'un produit est $p(x) = 27 - x^2$. Pour quel prix unitaire x est-ce que la fonction revenu correspondante atteint sa valeur maximale?

66. $\{6.2.1\}$ Supposer qu'un feuille d'aluminium d'un mètre carré de surface coûte 0.30$. Quel est le prix minimal d'une boîte cubique pouvant contenir 800 centimètres cubes de farine à blé entier?

67. $\{6.2.1\}$ Une mince tige de métal est coupé en trois morceaux. La première partie est tordue pour former la circonférence d'un cercle, la seconde pour former un carré et la troisième pour former un triangle équilatéral. Si la circonférence du cercle est égale au périmètre du carré, où doit-on couper la tige pour que l'aire totale des trois figures soit maximale?

68. $\{6.2.1\}$ La différence de deux nombres est 10. Quel est le produit minimal de ces deux nombres?

69. $\{6.2.1\}$ On construit des boîtes ouvertes (c'est-à-dire, des boîtes sans couvercle) avec 27 cm^2 de matériel. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximisent son volume?

70. $\{6.2.1\}$ On construit des boîtes de conserves cylindriques avec 54π cm^2 de feuilles d'acier. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximisent son volume?

71. $\{6.2.1\}$ On construit des boîtes rectangulaires de base carrée et de volume 12 cm^3. Une des faces carrées est doublée (elle utilise 2 fois plus de matériel que l'autre face carrée). Si le matériel de construction se vend à 1$ par cm^2, quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût de construction?

72. $\{6.3.4\}$ Que sont les points d'inflexion de la fonction définie par

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 3x - 5?$$

73. $\{6.3.4\}$ Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

    est-elle concave vers le haut?

74. $\{6.3\}$ Esquisser le graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}.$$

75. {6.3} Esquisser le graphique de $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

76. {6.3} Esquisser le graphique de $y = \frac{x^3+x}{x^2}$.

77. {6.3} Esquisser le graphique de $V(t) = 2000 - 1000\left((t-\sqrt{2})^2 - 1\right)^{2/3}$.

78. {6.4} La demande p d'un produit qui se vent au prix unitaire x est

$$p(x) = 150 - x^3.$$

Trouver l'élasticité de la demande. Lorsque $x = 5$, est-ce que la demande est élastique, inélastique, ou unitaire?

Si le prix de vente augmente à 6\$ l'unité, par combien croît ou décroît la demande? Qu'en est-il du revenu?

79. {6.4} La demande d'un produit est $p(x) = x^2 + 49$, $x \geq 0$. Pour quels x la demande est-elle élastique?

80. {6.4} Quelle est l'élasticité de la demande $p(x) = \frac{10}{x+1}$ lorsque $x = 2$?

81. {6.4} Quantifier l'élastsicité de la demande $D(P) \equiv 4$.

82. {6.4} Quantifier l'élastsicité de la demande $D(P) = \frac{P^2}{P^2+1}$.

83. {7.1} Évaluer $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2} dx$.

84. {7.2} Évaluer $\displaystyle\int_{3.5}^{3} f(x)dx$ si $\displaystyle\int_{3}^{3.5} f(x)dx = 1$.

85. {7.2} Le revenu marginal d'un produit est $R'(x) = 2x + 4x^{-1/2}$. Si le revenu de vente d'une unité de ce produit est 10\$, quel est le revenu de vente de 4 unités?

86. {7.2} Le profit marginal d'un produit est donné par

$$P'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On sait que $P(1) = 10$. Trouver $P(4)$.

87. {7.2} Soit $f'(x) = 4x^3 + 3\sqrt{x+1} - 1$. Si $f(0) = 3$, quelle valeur prend $f(3)$?

88. {7.3} Calculer l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre $x = 1$ et $x = 4$.

89. {7.4.1} Évaluer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 dx$.

90. {7.4.1} Trouver la famille de primitives de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}.$$

91. {7.4.1} Trouver la famille de primitives de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}.$$

92. {7.4.1} Calculer l'aire sous la courbe $y = x^2(x^3+1)^3$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

93. {8.1} Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \frac{10}{2+x}$ et $y = -x+5$ sur l'intervlle $[0, 4]$.

94. {8.1} Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = x^2 - 1$ et $y = 1 - x$ sur l'intervlle $[-2, 2]$.

95. {8.1} Déterminer l'aire de la région bornée par les courbes $y = \sqrt{x+1}$ et $y = x^3$ sur l'intervalle $[0, 3]$ (le pt d'int se situe en $x \approx 1.135$).

96. {8.1} Déterminer l'aire de la région bornée par les courbes $y = x^4$ et $y = 2$.

97. {8.2} Calculer $s(\frac{1}{3})$ si $a(t) = 2\sqrt{t}$, $v(0) = 1$ et $s(1) = -2$.

98. {8.3} La fonction demande d'un produit est $p(x) = 26 - x^2$ et la fonction offre du même produit est $S(x) = x^2 + 2x + 2$. Déterminer le surplus du consommateur pour le produit.

99. {8.3} La fonction demande d'un produit est $p(x) = \frac{8}{x+1}$ et la fonction offre du même produit est $S(x) = x + 3$. Déterminer le surplus du producteur pour le produit.

100. {9.1} Résoudre l'équation $2^x = 3^{1-x}$.

101. {9.1} Trouver la solution de l'équation

$$\ln(x+2) - \ln(x-4) = \ln 3.$$

102. {9.1} Une nouvelle employée ouvre un compte (sans intérêt) et y dépose son salaire mensuel de 2400$ qu'elle reçoit au début de chaque mois. Ses dépenses mensuelles augmentent: durant chaque mois, elle dépense 40% du montant se trouvant dans son compte au début du mois.

     Quel est le solde de son compte au début du $k-$ième mois?

     Au début de quel mois est-ce que le solde dans son compte est le double de son salaire mensuel?

103. {9.1.3} Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ k \ln(1+2x) & x > 0 \end{cases}$$

     Pour quelle(s) valeur(s) de k est-ce que la dérivée $f'(0)$ existe?

104. {9.1.3, 9.2.1} Soit f la fonction définie par

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(1+x).$$

     Que vaut $f'(0)$?

105. {9.1.4} Évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx.$$

106. {9.1.4} Trouver la famille de primitives de la fonction définie par

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln x.$$

107. $\{9.1.4\}$ Trouver la famille de primitives de $x^2 \ln(x^3)$.

108. $\{9.1.4\}$ Trouver la famille de primitives de $\frac{1}{x \ln x}$.

109. $\{9.2.1\}$ Pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce que la fonction définie par $f(x) = xe^{-3x+2}$ possède une droite tangente horizontale?

110. $\{9.2.1\}$ Trouver tous les points critiques de la fonction définie pr

$$f(x) = xe^{5x}.$$

111. $\{9.2.2\}$ Trouver la famille de primitives de $e^{\sqrt{x}}$.

112. $\{9.2.2\}$ Trouver la famille de primitives de $x^4 e^{x^2}$.

113. $\{9.2.2\}$ Trouver la famille de primitives de $\ln e^x$.

114. $\{9.2.2\}$ Évaluer l'intégrale définie

$$\int_0^1 xe^{-2x}\,dx.$$

115. $\{9.3\}$ On dépose une somme de 2000\$ à la banque dans un compte dont l'intérêt annuel est de 3%, composé continuement. Quelle est la période de doublement du dépôt initial?

116. $\{9.3\}$ On dépose une somme de A à la banque dans un compte dont l'intérêt annuel est r, composé continuement. Soit $C(t)$ la valeur capitalisée de la somme après t années.

Si A double en 6 ans, trouver r.

Si $C(10) = 8000$, trouver A.

Quelle est la valeur du compte après 24 ans?

117. $\{10.2\}$ Combiens de points critiques sont admis par la fonction définie par

$$f(x,y) = y^2 + 2y + 2x^3 - 6x^2 + 7?$$

118. $\{10.2\}$ Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2y^3 + xy - 2x^2 + y^2.$$

Que vaut $f_{xy}(1,1)$?

119. $\{10.2\}$ Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2y^3 + xy.$$

Quelle valeur prend $f_{xy}(0,10)$?

120. $\{10.3\}$ Quelle est l'équation du plan tangent au graphe de la surface

$$z = f(x,y) = xy^2 - x^2 - y^2$$

au point $(2,1,-3)$?

121. $\{10.4\}$ Classifier les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

122. $\{10.4\}$ Classifier les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2.$$