MAT 1708
Introduction au calcul différentiel et intégral

Chapitre 7
L'intégrale

P. Boily (uOttawa)

Session d'automne – 2022

Aperçu

Résumé (p.56)
Exercices suggérés (p.57)

7.1 – La primitive d'une fonction

On sait calculer la dérivée $f'(x)$ de n'importe quelle fonction algébrique $f(x)$. Peut-on aussi trouver une fonction $F(x)$ dont $f(x)$ serait la dérivée?

Une **primitive** de $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in I;$$

la primitive est l' "inverse" de la dérivée.

Exemples:

1. $F(x) = 3x^2 + x + 7$ est une primitive de $f(x) = 6x + 1$ puisque

$$F'(x) = (3x^2 + x + 7)' = (3 \cdot 2x^{2-1} + 1x^{1-1} + 0) = 6x + 1 = f(x).$$

2. Ce n'est pas la seule primitive de $f(x)$: $G(x) = 3x^2 + x - 13$ et $H(x) = 3x^2 + x + \frac{1}{2}$ sont aussi des primitives de $f(x)$ puisque

$$G'(x) = H'(x) = f(x)$$

3. $K(x) = 3x^2 + 7$ n'est pas une primitive de $f(x)$ puisque $K'(x) \neq f(x)$.

La primitive d'une fonction n'est pas unique; les primitives d'une fonction $f(x)$ appartiennent toutes à une même "famille" de fonctions.

Théorème: soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, $F(x) + C$ est une primitive de $f(x)$.

Démonstration: on a alors $F'(x) = f(x)$, d'où

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x). \qquad \square$$

Théorème: si $F(x)$ et $G(x)$ sont des primitives de $f(x)$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + C$.

Ces deux théorèmes nous indiquent que toutes les primitives d'une même fonction diffèrent au plus par une constante.

Exemple: les fonctions $F(x) = 3x^2 + x$ et $G(x) = 3x^2 + 1$ ne peuvent pas être toutes deux primitives d'une même fonction $f(x)$ puisque

$$F(x) - G(x) = 3x^2 + x - (3x^2 + 1) = x - 1 \not\equiv k.$$

Si F est une primitive de f, on écrit

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

pour signifier que $F(x) + C$ est la famille de primitives de f. L'expression $\int f(x)\,dx$ est l'**intégrale de f par rapport à** x.

Exemples: vérifier la validité des expressions suivantes.

1. $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, puisque $(\frac{x^2}{2} + C)' = \frac{2x}{2} + 0 = x$.

2. $\displaystyle\int 1 \cdot dx = x + C$, puisque $(x + C)' = 1 + 0 = 1$.

3. $\displaystyle\int 0 \cdot\, dx = k$, puisque $(k)' = 0$.

4. $\displaystyle\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$, puisque $(\frac{x^4}{4} + C)' = \frac{4x^3}{4} + 0 = x^3$.

5. $\displaystyle\int (x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} + x + C$, puisque $(\frac{x^2}{2} + x + C)' = \frac{2x}{2} + 1 + 0 = x + 1$.

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$, puisque $(-\frac{1}{x} + C)' = -(-1x^{-2}) + 0 = \frac{1}{x^2}$.

7. $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$, puisque $(\frac{2}{3}x^{3/2} + C)' = (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{3/2-1}) + 0 = \sqrt{x}$.

⚠ En général, il est plus facile de vérifier si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ que de trouver une primitive $F(x)$ à partir de $f(x)$.

On vérifie tout simplement en dérivant $F(x)$: si $F'(x) = f(x)$, c'est un primitive, sinon, ce n'en est pas une.

Comme pour les dérivées, les puissances sont facile à intégrer.

Théorème: Si $n \neq -1 \in \mathbb{Q}$ alors

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Démonstration: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} + 0 = x^n$ $\square$.

Exemples:

1. $\displaystyle\int x^{13}\,dx =$

2. $\displaystyle\int x^{-7/3}\,dx =$

3. $\displaystyle\int x^{0}\,dx =$

Exemples (et solutions):

1. $\displaystyle\int x^{13}\,dx = \frac{x^{14}}{14} + C.$

2. $\displaystyle\int x^{-7/3}\,dx = \frac{x^{-4/3}}{-4/3} + C = -\frac{3}{4}x^{-4/3} + C.$

3. $\displaystyle\int x^{0}\,dx = \frac{x^{1}}{1} + C = x + C.$

Qu'en est-il de l'intégrale
$$\int \frac{1}{x}\,dx?$$
Si on utilise la formule précédente, on obtient

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C \qquad \Longrightarrow \text{ expression non-définie.}$$

⚠ **Cela ne veut pas dire que $\frac{1}{x}$ n'a pas de primitive, mais plutôt qu'on ne peut pas calculer sa primitive à l'aide de la formule.** Nous en reparlerons au chapitre 9.

Comme c'est le cas pour les dérivées, les intégrales se comportent bien par rapport aux sommes et aux multiplications par des constantes.

Les propriétés des primitives

Théorème: si $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions dont les primitives sont $F(x)$ et $G(x)$, respectivement, alors

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

Démonstration: Puisque $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = g(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx &= a(F(x) + C_1) + b(G(x) + C_2) \\ &= aF(x) + bG(x) + C. \end{aligned}$$

Mais

$$(aF(x) + bG(x) + C)' = aF'(x) + bG'(x) + C' = af(x) + bg(x),$$

d'où $aF(x) + bG(x) + C$ est une primitive de $af(x) + bg(x)$, et ainsi

$$\begin{aligned}\int (af(x) + bg(x))\,dx &= aF(x) + bG(x) + C \\ &= a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx. \qquad \square\end{aligned}$$

L'**intégrande** est la fonction se retrouvant sous le symbole de l'intégrale:

$$\int \underbrace{\qquad}\,dx.$$

Exemples:

1. $\displaystyle\int (x^{13} + x^{-7/3})\, dx =$.

2. $\displaystyle\int (4x^{1/2} - \frac{1}{7}x^3 + 2)\, dx =$.

Exemples (et solutions):

1. $$\int (x^{13} + x^{-7/3})\,dx = \int x^{13}\,dx + \int x^{-7/3}\,dx = \frac{x^{14}}{14} - \frac{3}{4}x^{-4/3} + C.$$

2. $$\begin{aligned}\int (4x^{1/2} - \frac{1}{7}x^3 + 2)\,dx &= 4\int x^{1/2}\,dx - \frac{1}{7}\int x^3\,dx + 2\int 1\cdot\,dx \\ &= \frac{8}{3}x^{3/2} - \frac{1}{28}x^4 + 2x + C.\end{aligned}$$

On a noté la distinction entre la fonction dérivée $f'(x)$ et la dérivée en un point $f'(a) \in \mathbb{R}$; une distriction semblable existe entre la primitive et l'intégrale définie.

7.2 – L'intégrale définie

Soit $F(x)$ une primitive d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. L'**intégrale définie de** $f(x)$ **entre** a **et** b est le nombre réel

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Le choix de primitive n'a pas d'effet sur la valeur de l'intégrale définie: si on utilise une autre primitive de $f(x)$, disons $G(x) = F(x) + C$, on obtient

$$[G(x)]_a^b = [F(x) + C]_a^b = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

En général, on choisit la primitive dont la **constante d'intégration** C est nulle afin d'alléger l'écriture.

Exemples:

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} 1 \cdot dx =$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx =$

3. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} (x+1)\,dx =$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \sqrt{x}\,dx =$

Exemples (et solutions):

1. $\displaystyle\int_{2}^{3} 1 \cdot dx = [x]_2^3 =.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =.$

3. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-7}^{-3} =$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \sqrt{x}\,dx$ n'est pas définie puisque $\sqrt{x}$ n'est pas définie sur $[-2, 0[$.

Exemples (et solutions^2):

1. $\displaystyle\int_2^3 1\cdot dx = [x]_2^3 = 3-2 = 1.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}.$

3. $\displaystyle\int_{-7}^{-3} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-7}^{-3} = \left(\frac{(-3)^2}{2}+(-3)\right) - \left(\frac{(-7)^2}{2}+(-7)\right) = -16.$

4. $\displaystyle\int_{-2}^1 \sqrt{x}\,dx$ n'est pas définie puisque $\sqrt{x}$ n'est pas définie sur $[-2,0[$.

Les propriétés de l'intégrale définie

Théorème: si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{pour tout } c \in [a, b].$$

Démonstration: soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur $[a, b]$. Par définition,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned} \qquad \square$$

Ce résultat est utile lorsque vient le temps d'évaluer des intégrales définies contenant des valeurs absolues.

Exemples:

1. Évaluer $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\, dx$.

Ce résultat est utile lorsque vient le temps d'évaluer des intégrales définies contenant des valeurs absolues.

Exemples:

1. Évaluer $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$.

   Solution: en se servant du théorème précédent, on obtient

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{1} |x|\, dx$$

Mais sur l'intervalle $[-1, 1]$, l'intégrande devient

$$|x| = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx &= \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

2. Évaluer $\displaystyle\int_{-2}^{4} |x-3|\,dx$.

2. Évaluer $\displaystyle\int_{-2}^{4} |x-3|\,dx$.

Solution: le principe est le même. En se servant du théorème précédent, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{4} |x-3|\,dx &= \int_{-2}^{3} |x-3|\,dx + \int_{3}^{4} |x-3|\,dx \\
&= \int_{-2}^{3} (3-x)\,dx + \int_{3}^{4} (x-3)\,dx \\
&= \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3} + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{3}^{4} = \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = 13.
\end{aligned}
$$

Finalement, remarquons qu'il est possible de définir l'intégrale définie de $f(x)$ pour toute les bornes possibles en posant

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

lorsque l'intégrale définie de droite existe.

Théorème: si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et toutes les intégrales définies existent, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exemples:

1. Si $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,dx = 4$ et $\displaystyle\int_5^6 f(x)\,dx = -2$, évaluer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Exemples:

1. Si $\int_3^6 f(x)\,dx = 4$ et $\int_5^6 f(x)\,dx = -2$, évaluer $\int_3^5 f(x)\,dx$.

Solution: en utilisant le théorème précédent, on obtient

$$\begin{aligned} 4 = \int_3^6 f(x)\,dx &= \int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx \\ &= \int_3^5 f(x)\,dx - 2, \end{aligned}$$

d'où $\int_3^5 f(x)\,dx = 6$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

3. Montrer que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

   Démonstration: selon le théorème précédent,

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi, l'intégrale définie sur un seul point est nulle.

4. Évaluer $\int_0^{-1} (x^2 + 2x + 1)\,dx$.

Solution: selon les théorème précédent,

$$\int_0^{-1}(x^2+2x+1)\,dx = -\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}.$$

Mais on peut aussi calculer directement:

$$\int_0^{-1}(x^2+2x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{-1} = -\frac{1}{3}.$$

⚠ **L'intégrale définie est un nombre, tandis que la primitive (ou intégrale indéfinie) est une fonction.**

7.3 – L'aire sous la courbe

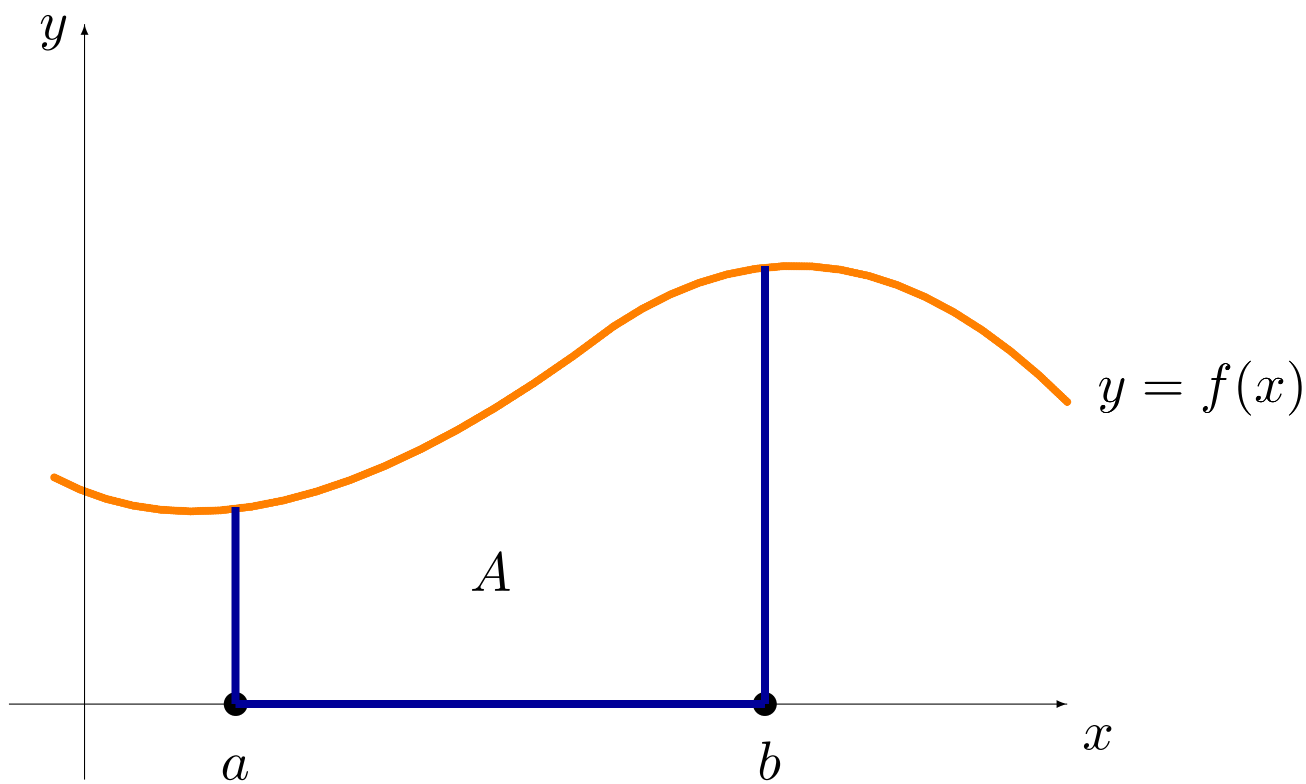
Nous allons maintenant faire le lien entre l'intégrale (définie ou indéfinie) et le calcul de l'aire d'une figure géométrique.

Puisque l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée, le calcul de l'aire est donc l'inverse du calcul de la pente de la droite tangente.

C'est un résultat profond; il n'était pas nécessaire qu'il en soit ainsi.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par **aire sous la courbe** $y = f(x)$ **entre** $x = a$ **et** $x = b$, on entend l'aire de la figure géométrique bornée par les droites $x = a$, $x = b$, l'axe des x et la courbe $y = f(x)$.

Par convention, si la courbe se retrouve sous l'axe des x, l'aire sous la courbe est négative.


y
$y = f(x)$
A
x
a
b

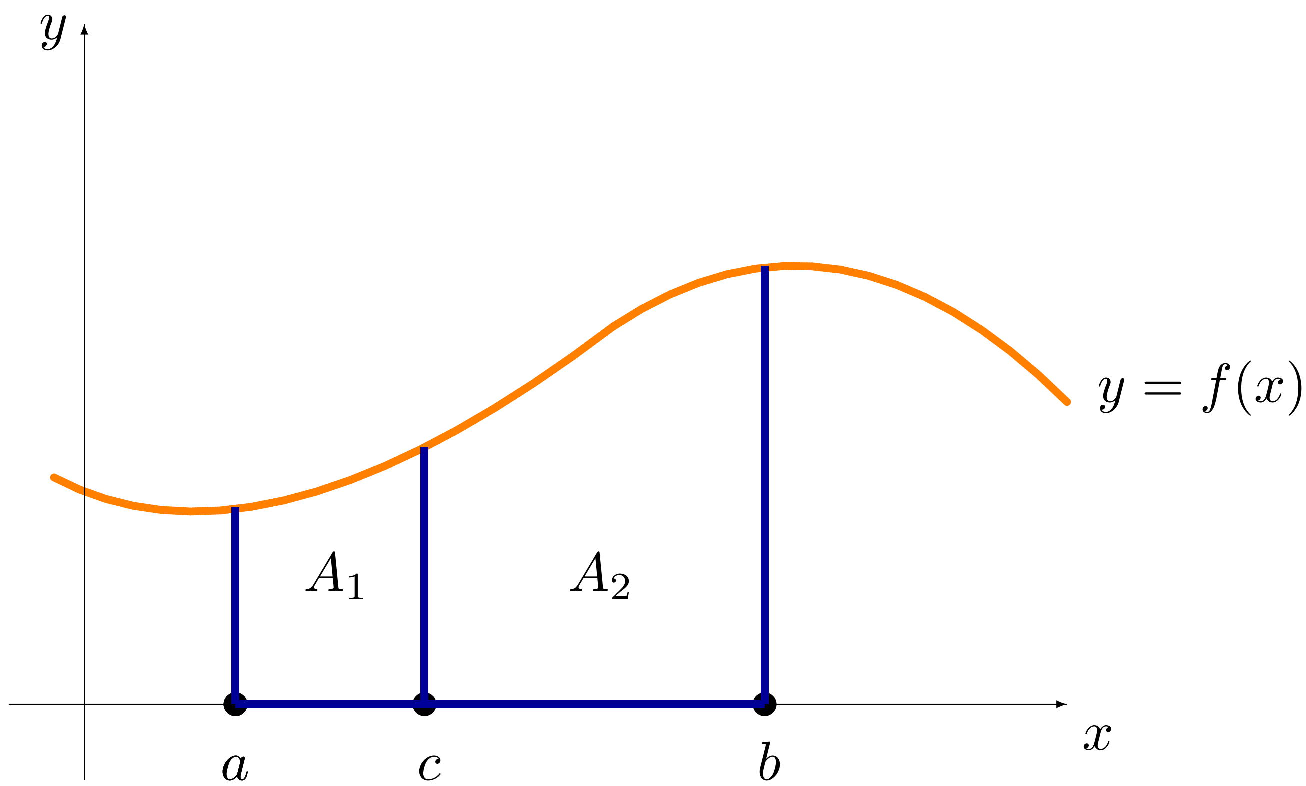
Si la courbe est parfois négative parfois positive, il est possible que l'aire sous la courbe soit nulle, même si la courbe ne l'est pas.

Exemples: l'aire sous la droite $y = x$ entre $x = -1$ et $x = 1$ est nulle, tout comme l'aire sous $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = a$.

Si c est un nombre entre a et b, il est possible d'obtenir l'aire sous la courbe entre $x = a$ et $x = b$ (A):

- en calculant l'aire sous la courbe entre $x = a$ et $x = c$ (A_1), et
- en y ajoutant l'aire sous la courbe entre $x = c$ et $x = b$ (A_2).

L'aire sous la courbe est **additive**, au sens défini à la section précédente.



$$A = A_1 + A_2$$

Le théorème fondamental du calcul

Théorème: si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.

Exemples:

1. Calculer l'aire sous la courbe $y = x^2$ entre $x = -2$ et $x = 0$.

Solution: selon le théorème précédent, l'aire recherchée est

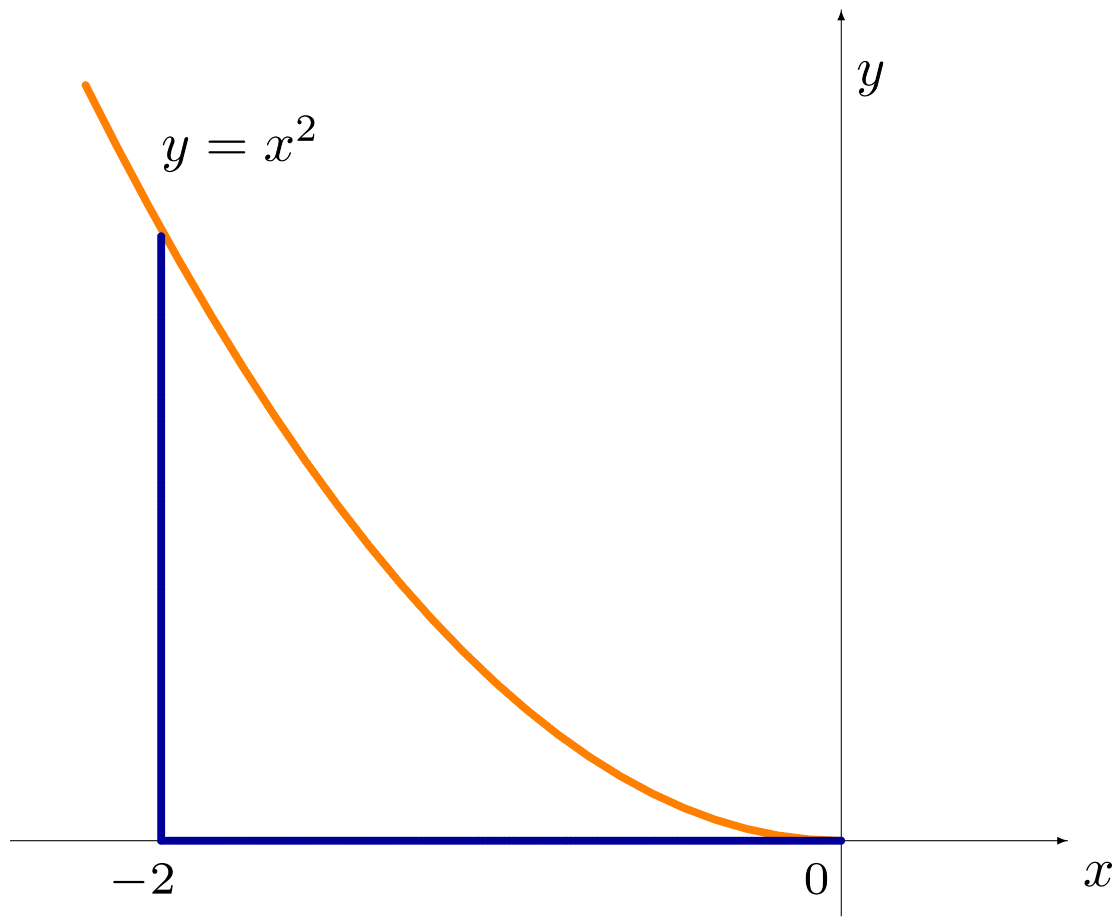
$$\int_{-2}^{0} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 0 - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

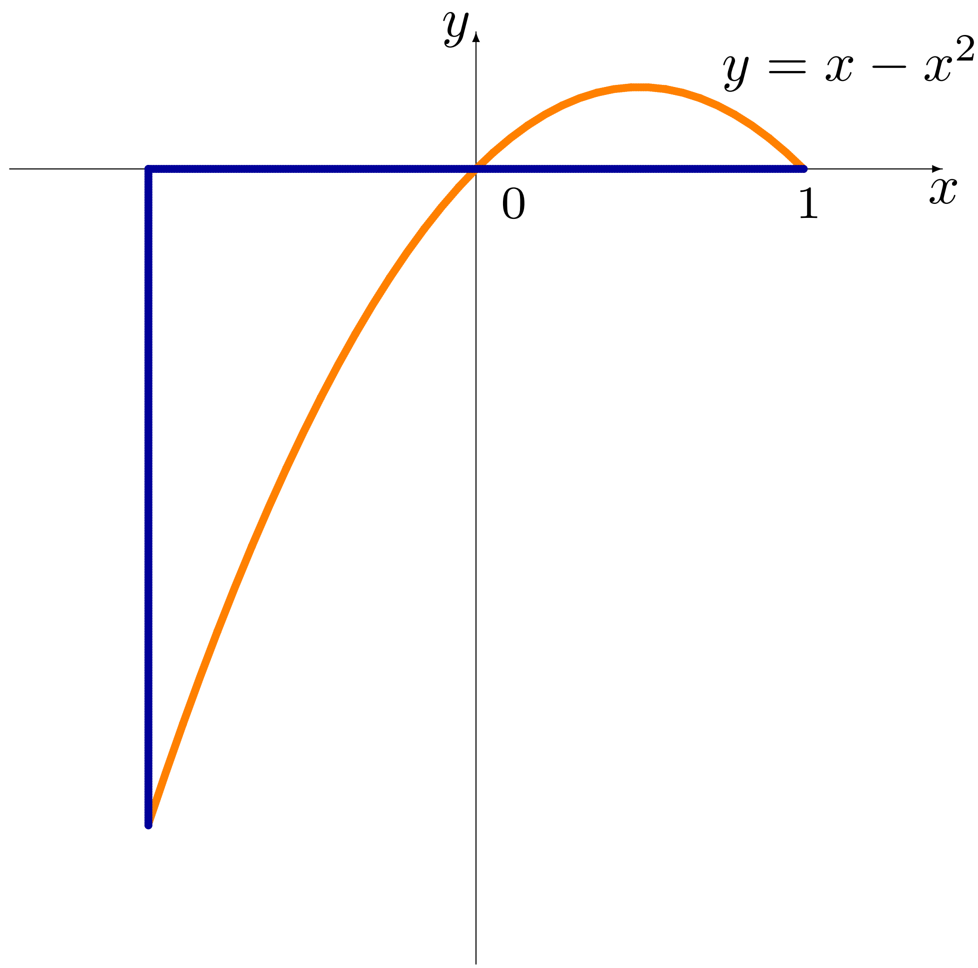
Comparer cette approche à celle utilisée au chapitre 2.

2. Calculer l'aire sous la courbe $y = x - x^2$ entre $x = -1$ et $x = 1$.

Solution: selon le théorème précédent, l'aire recherchée est

$$\int_{-1}^{1} (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}.$$


y
$y = x^2$
-2
0
x


y
$y = x - x^2$
0
1
x

La démonstration de ce théorème est disponible à la section 7.3 du livre.

Nous terminons cette section avec l'énoncé du **théorème fondamental du calcul différentiel**, qui est une conséquence directe du théorème précédent.

Théorème: soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Alors $F(x)$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

⚠ **Dans certains ouvrages, le théorème fondamental prend la forme**

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

7.4 – Les techniques d'intégration

La dérivée d'une fonction algébrique est nécessairement algébrique.

La primitive d'une fonction algébrique n'est pas nécessairement algébrique ($f(x) = \frac{1}{x}$, par exemple).

Conséquemment, le degré de difficulté associé au calcul d'une primitive est plus élevé que celui associé au calcul d'une dérivée.

Par exemple, la dérivée de

$$f(x) = 2x(x^2 - 3)^{17}$$

se calcule directement avec la règle du produit:

$$f'(x) = 2(x^2 - 3)^{17} + 2x(17)(x^2 - 3)^{16} 2x = 2(35x^2 - 3)(x^2 - 3)^{16}.$$

⚠ **Il n'y a pas de règle générale pour la primitive d'un produit.**

À l'aide des outils dont nous disposons à l'heure actuelle, la seule façon de calculer la primitive $F(x)$ de $f(x)$ consiste à effectuer l'expansion du polynôme et à l'intégrer terme-à-terme:

$$F(x) = \int 2(x^2-3)^{17}\,dx = \int \underbrace{\left(2x^{35} + \cdots + 258,280,326x\right)}_{\text{18 termes}}\,dx$$

$$= \underbrace{2\int x^{35}\,dx + \cdots + 258,280,326\int x\,dx}_{\text{18 termes}} = \text{ etc.}$$

Il existe des méthodes qui permettent **parfois** de simplifier le calcul des primitives.

Dans cette section, nous en présentons deux des plus communes.

L'intégration par substitution

L'**intégration par substitution** est une méthode d'intégration associée à la dérivée en chaîne.

Soient f et g deux fonctions différentiables telles que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est définie pour tout $x \in D_g$. Selon la règle de dérivée en chaîne,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

En intégrant de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$\int (f \circ g)'(x)\, dx = \int f'(g(x))g'(x)\, dx.$$

Mais, $f \circ g$ est une primitive de $(f \circ g)'$, d'où

$$(f \circ g)(x) = f(\underbrace{g(x)}_{u}) = \int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\, \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = \int f'(u)\, du.$$

Si on réussi à associer deux parties de l'intégrande à $g(x)$ et $g'(x)$, respectivement, on peut alors se servir d'une substitution qui simplifier le calcul de l'intégrale.

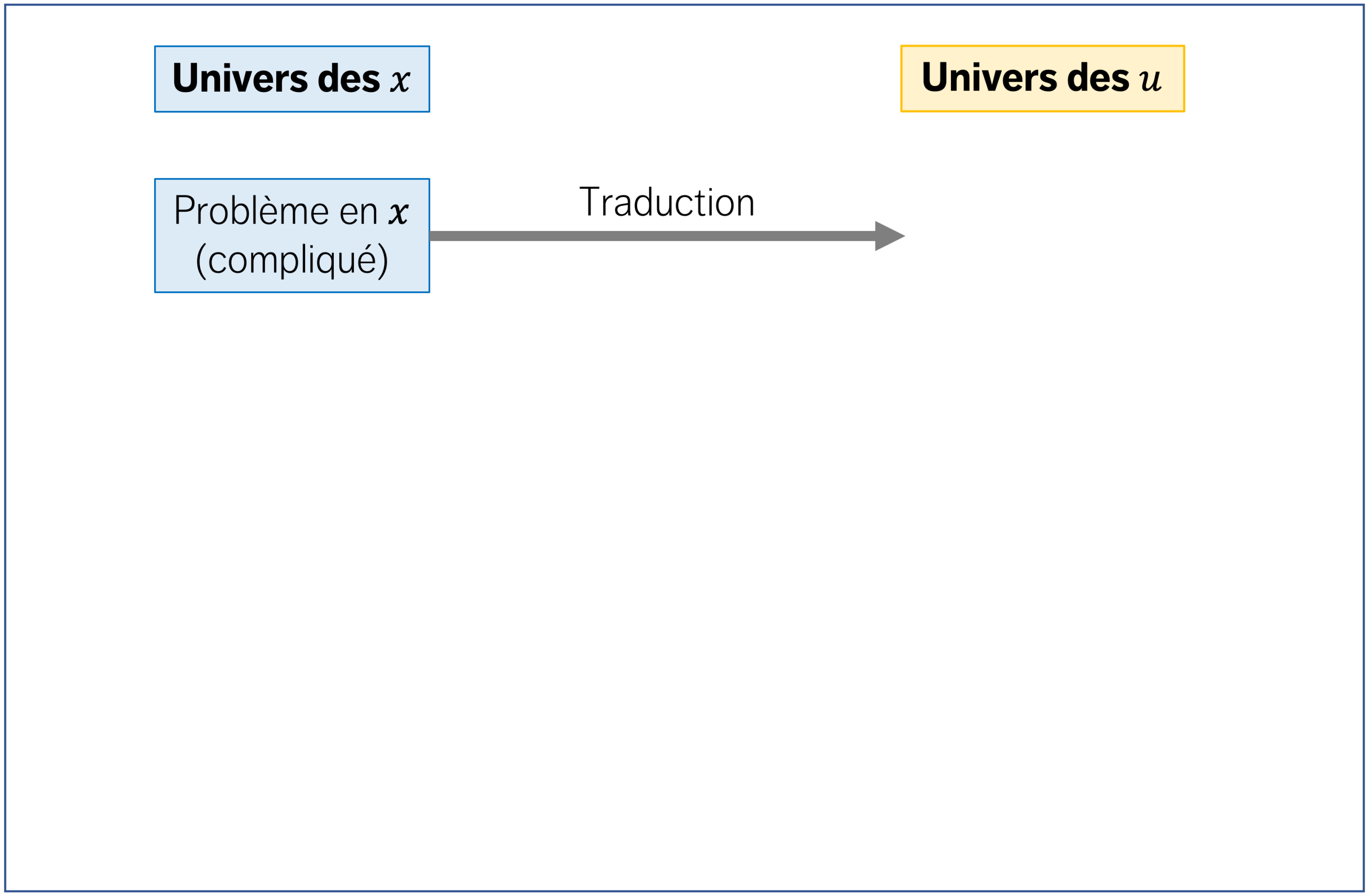
Exemples:

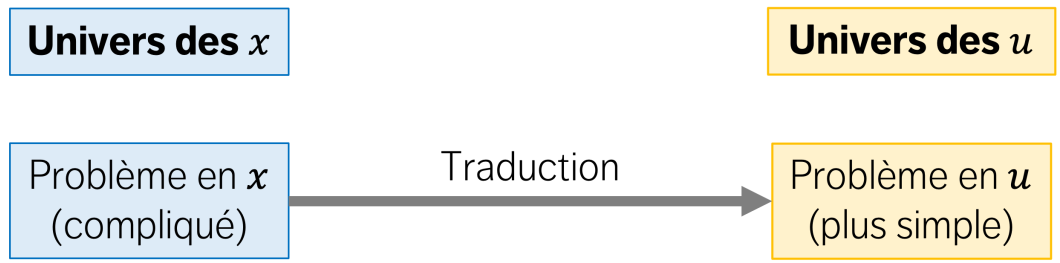
1. Évaluer $\int 2x(x^2 - 3)^{17}\, dx$.

Univers des x

Univers des u

Problème en $\boldsymbol{x}$
(compliqué)


Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction


Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction
Problème en u (plus simple)

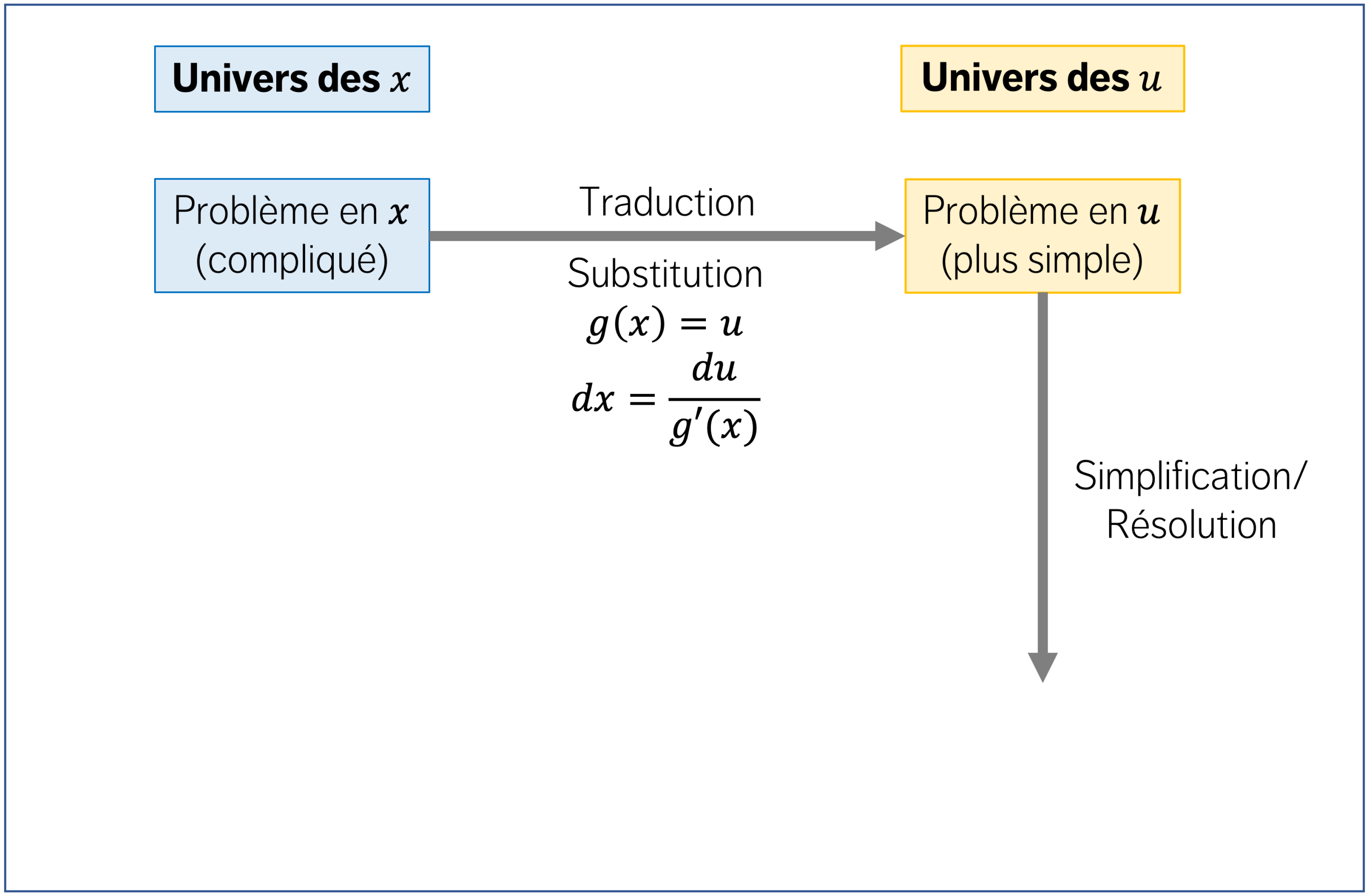
Univers des x | **Univers des u**

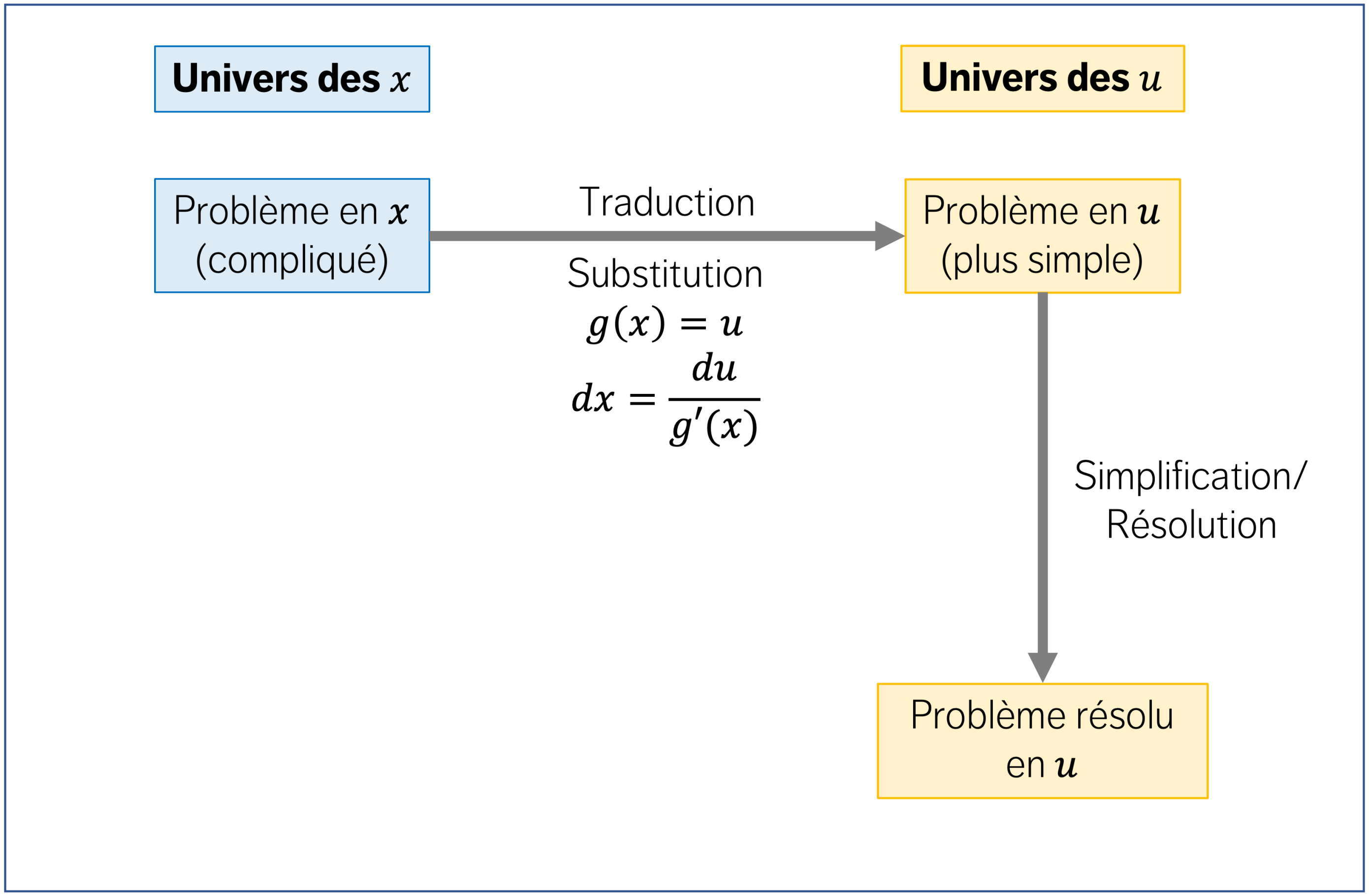
Problème en $\boldsymbol{x}$ (compliqué) $\xrightarrow{\text{Traduction}}$ Problème en $\boldsymbol{u}$ (plus simple)

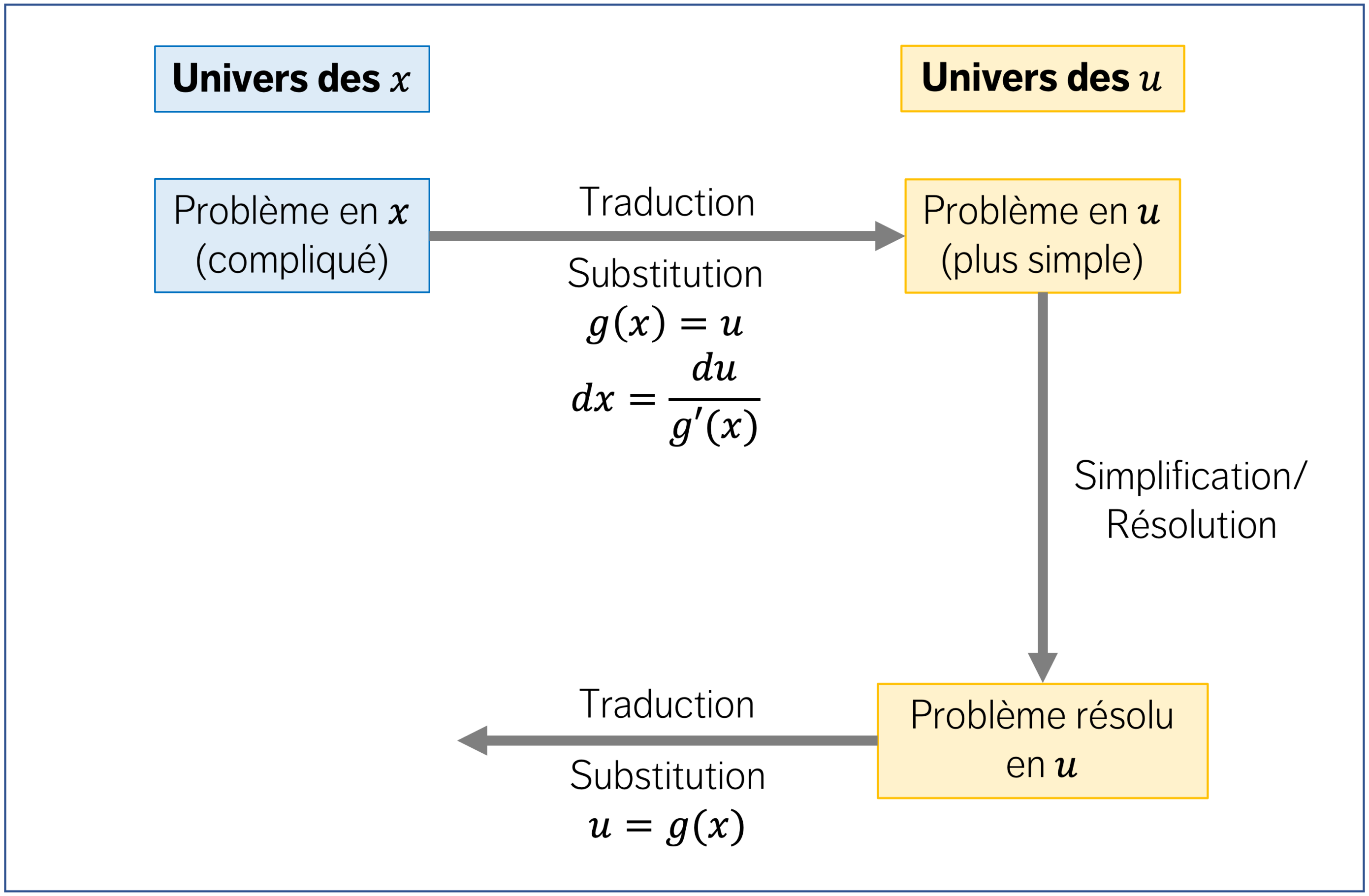
Substitution

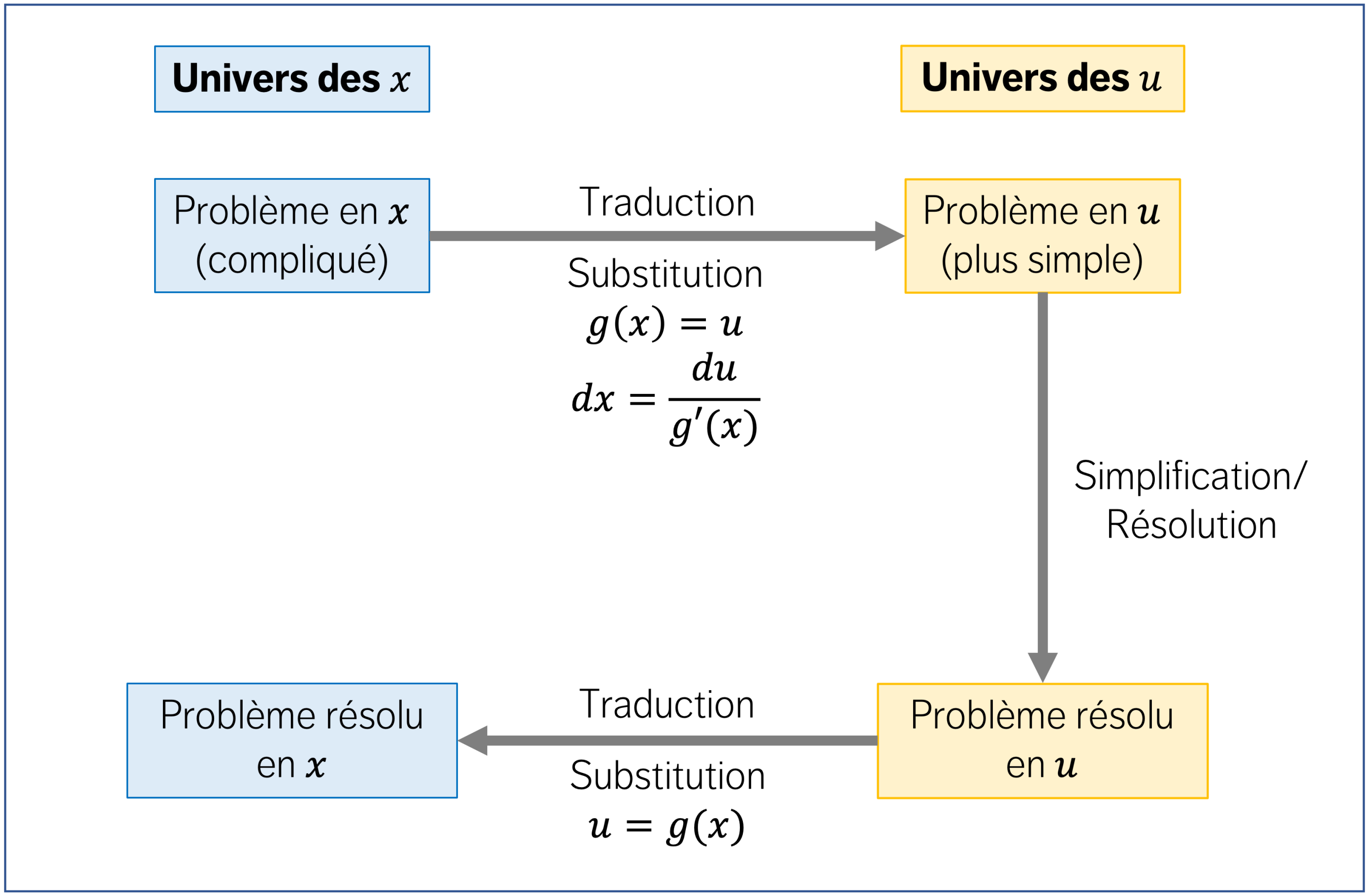
$$g(x) = u$$

$$dx = \frac{du}{g'(x)}$$

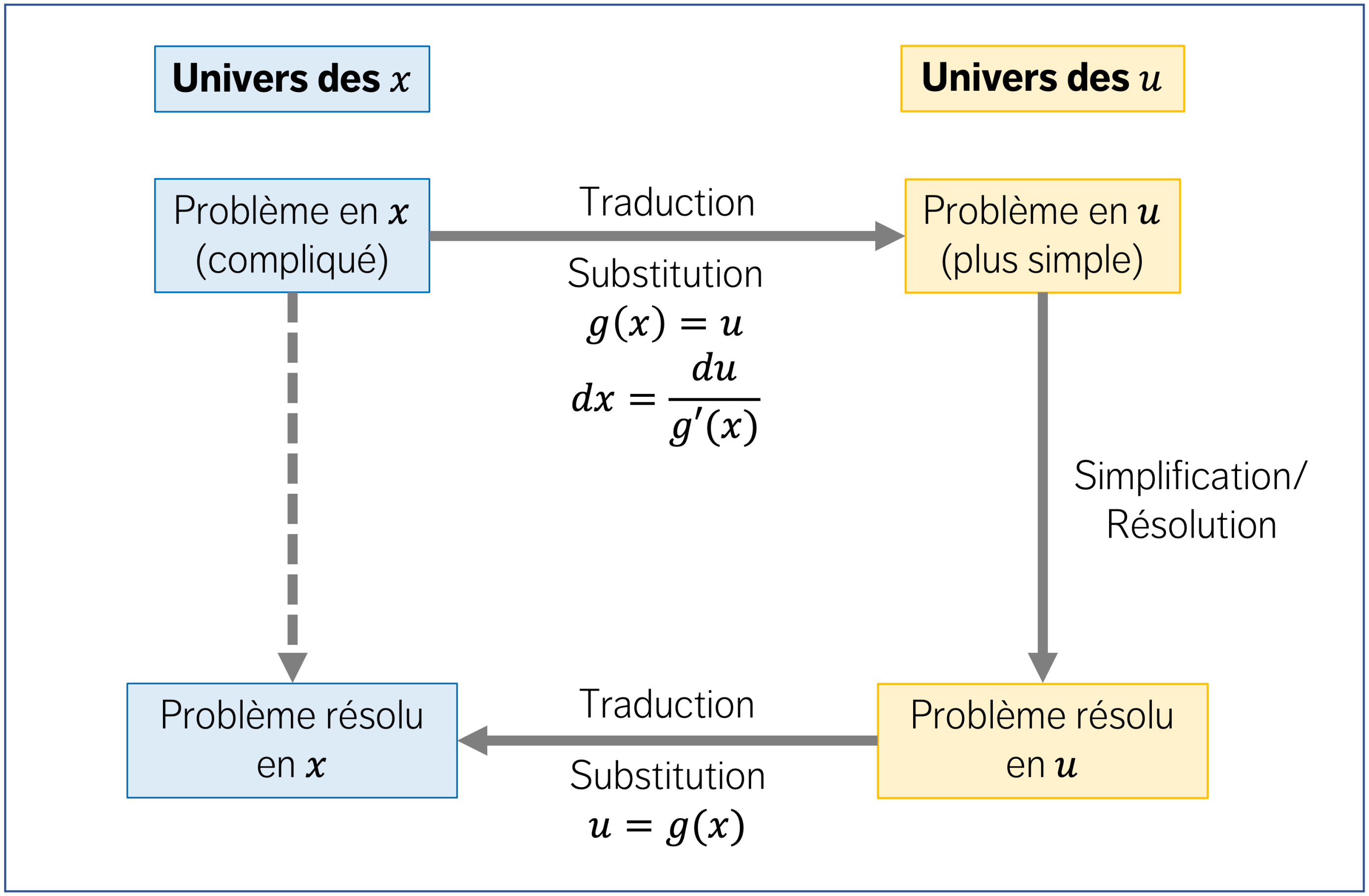

Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction
Substitution
$g(x) = u$
$dx = \frac{du}{g'(x)}$
Problème en u (plus simple)
Simplification/ Résolution


Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction
Substitution
$g(x) = u$
$dx = \frac{du}{g'(x)}$
Problème en u (plus simple)
Simplification/ Résolution
Problème résolu en u


Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction
Substitution
$g(x) = u$
$dx = \dfrac{du}{g'(x)}$
Problème en u (plus simple)
Simplification/ Résolution
Problème résolu en u
Traduction
Substitution
$u = g(x)$



Univers des x
Univers des u
Problème en $\boldsymbol{x}$ (compliqué)
Traduction
Substitution
$g(x) = u$
$dx = \dfrac{du}{g'(x)}$
Problème en $\boldsymbol{u}$ (plus simple)
Simplification/ Résolution
Problème résolu en $\boldsymbol{u}$
Traduction
Substitution
$u = g(x)$
Problème résolu en $\boldsymbol{x}$


Univers des x
Univers des u
Problème en x (compliqué)
Traduction
Substitution
$g(x) = u$
$dx = \frac{du}{g'(x)}$
Problème en u (plus simple)
Simplification/ Résolution
Problème résolu en u
Traduction
Substitution
$u = g(x)$
Problème résolu en x

Solution: on doit commencer par trouver un candidat pour la composante interne $u = g(x)$.

Il y a plusieurs possibilités: $2x$, $x^2 - 3$, $(x^2-3)^{17}$, $2x(x^2-3)^{17}$, etc.

On essaye $u = g(x) = x^2 - 3$. Alors

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = 2x \implies du = 2x\,dx. \qquad ⚠$$

On remplace $2x\,dx$ par du, puis chaque instance de $x^2 - 3$ par u:

$$\int 2x(x^2-3)^{17}\,dx = \int \underbrace{(x^2-3)}_{u}{}^{17}\,\underbrace{(2x\,dx)}_{du} = \int \underbrace{u^{17}}_{f'(u)}\,du = \frac{u^{18}}{18} + C.$$

Mais $u = x^2 - 3$, d'où $\dfrac{u^{18}}{18} + C = \dfrac{(x^2-3)^{18}}{18} + C$.

On dérive la primitive pour vérifier qu'elle est égale à l'intégrande:

$$\left(\frac{(x^2-3)^{18}}{18} + C\right)' = \frac{1}{18} \cdot 18(x^2-3)^{18-1}(2x) = 2x(x^2-3)^{17}.$$

Avec la substitution $u = (x^2-3)^{17}$, on a $du = 17(x^2-3)^{16} 2x\, dx$, d'où

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2-3)^{17}\, dx = \int \frac{2x(x^2-3)^{17}}{2x \cdot 17(x^2-3)^{16}}\, du = \frac{1}{17}\int (x^2-3)\, du \\ = \frac{1}{17}\int u^{1/17}\, du = \frac{1}{17} \cdot \frac{u^{18/17}}{18/17} + C = \frac{(x^2-3)^{18}}{18} + C.\end{aligned}$$

Univers des x

Univers des u

$$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$$

Univers des x

Univers des u

$$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$$

Traduction

Substitution

$$x^2-3=u$$

$$dx=\frac{du}{2x}$$

Univers des x

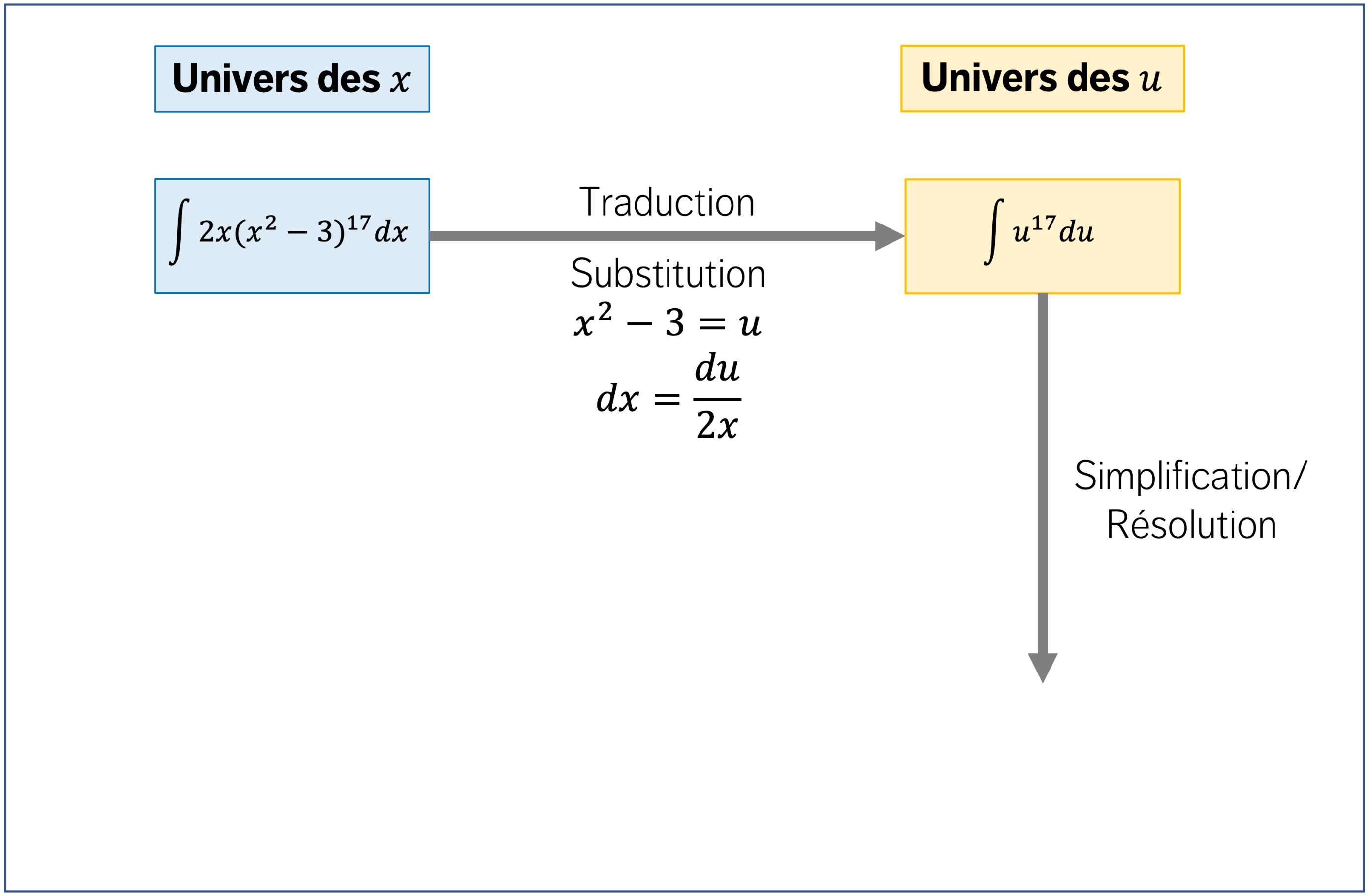
Univers des u

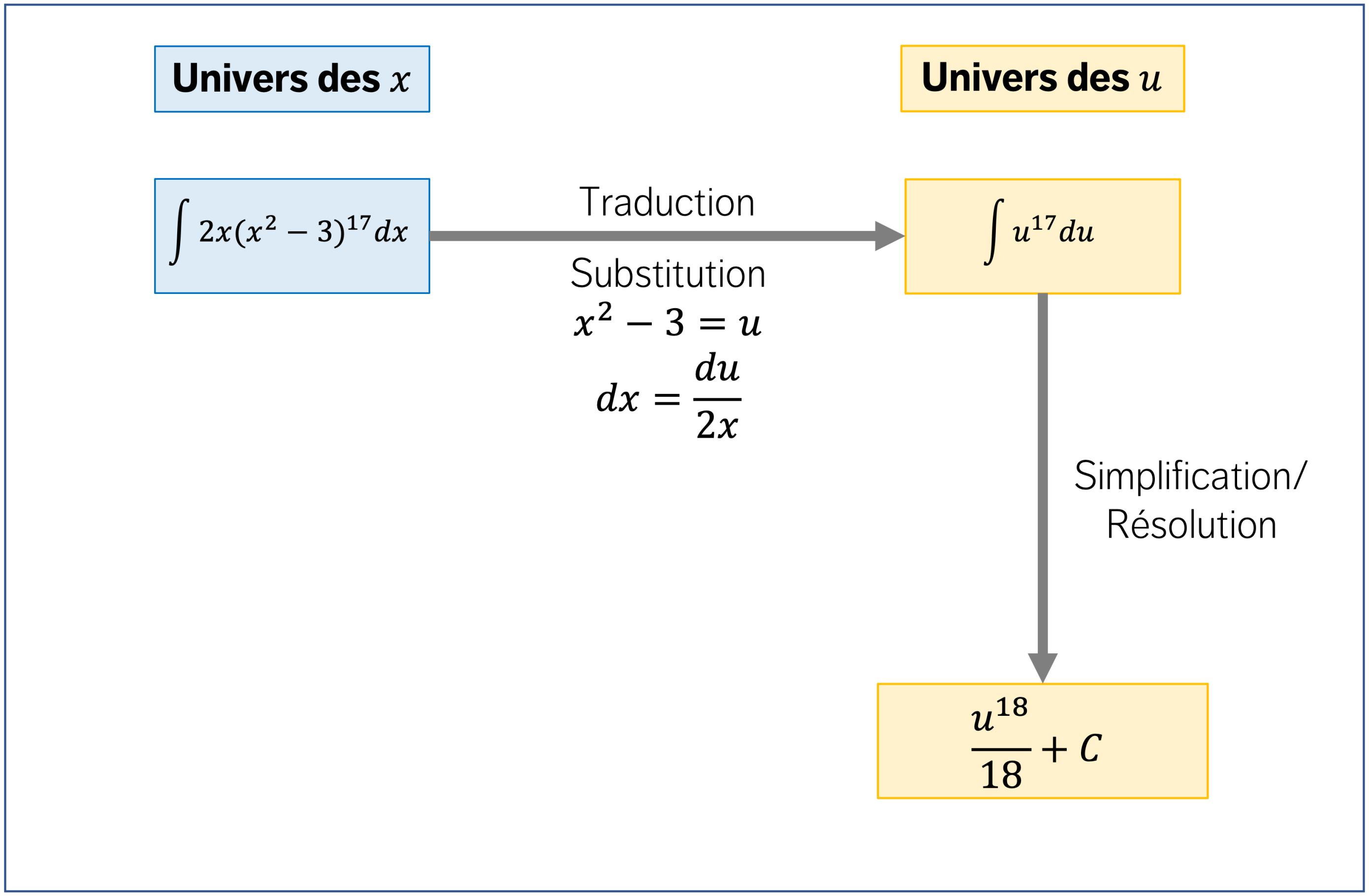
$$\int 2x(x^2-3)^{17}dx \xrightarrow{\text{Traduction}} \int u^{17}du$$

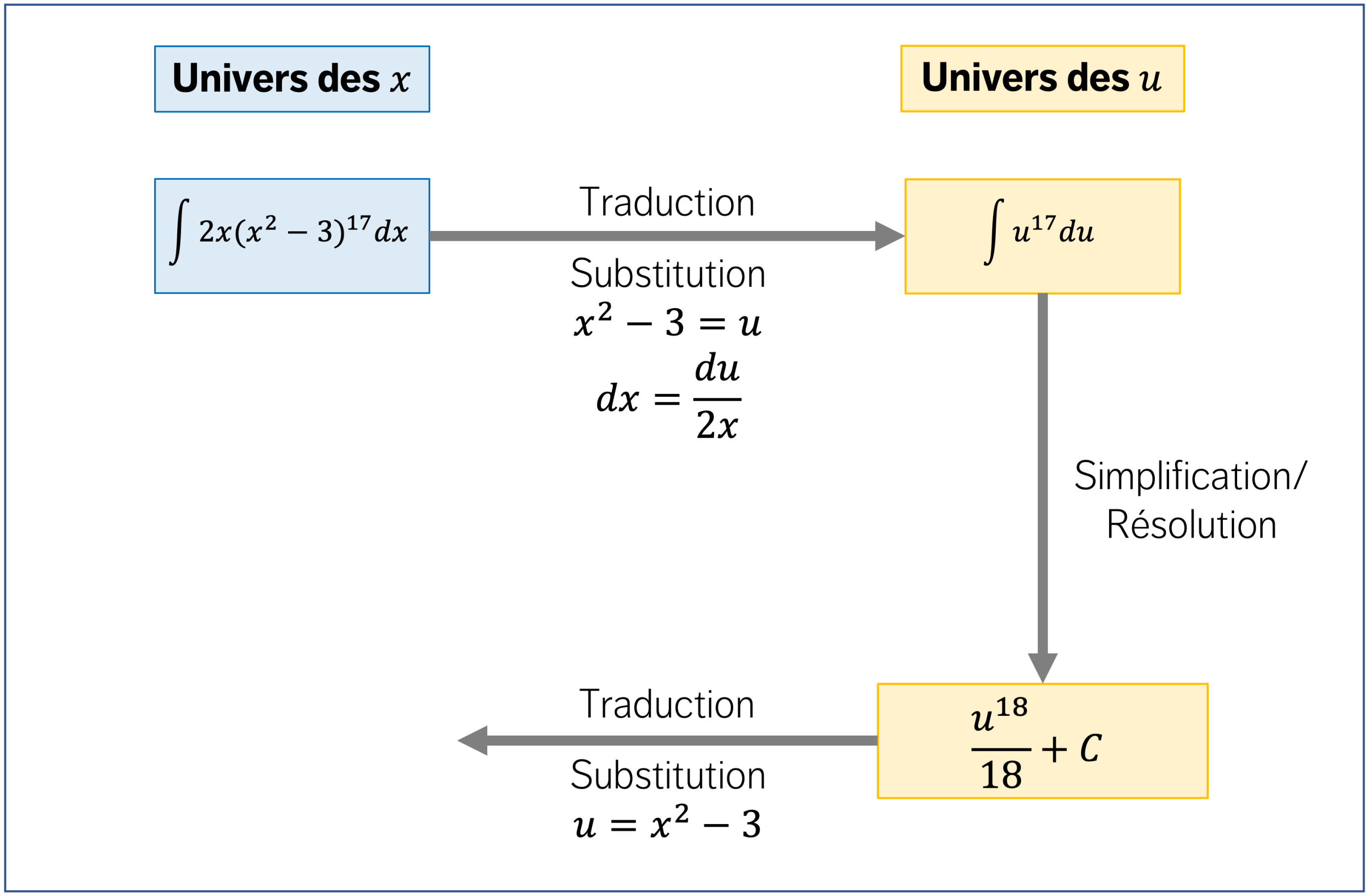
Substitution

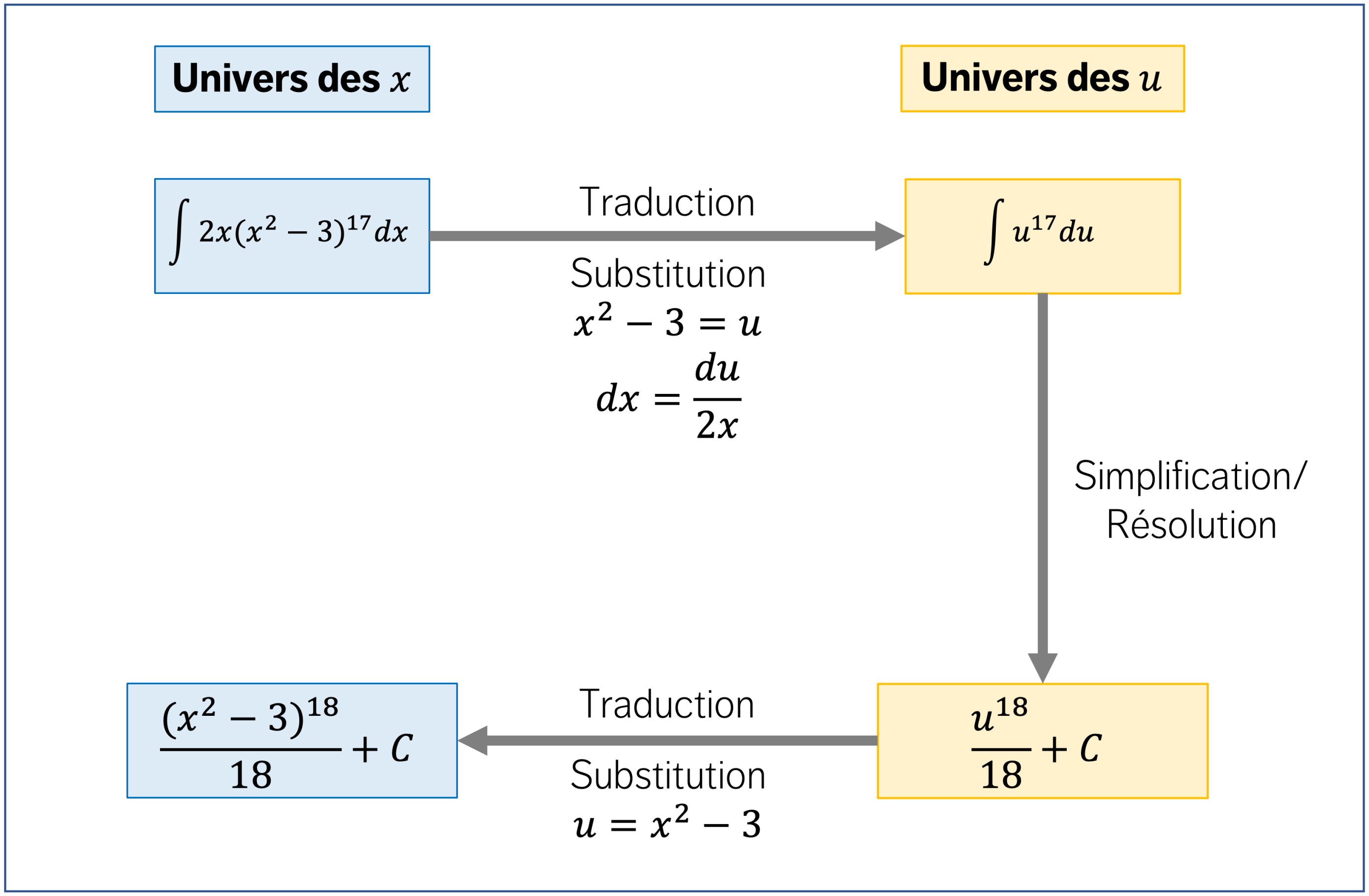
$$x^2 - 3 = u$$

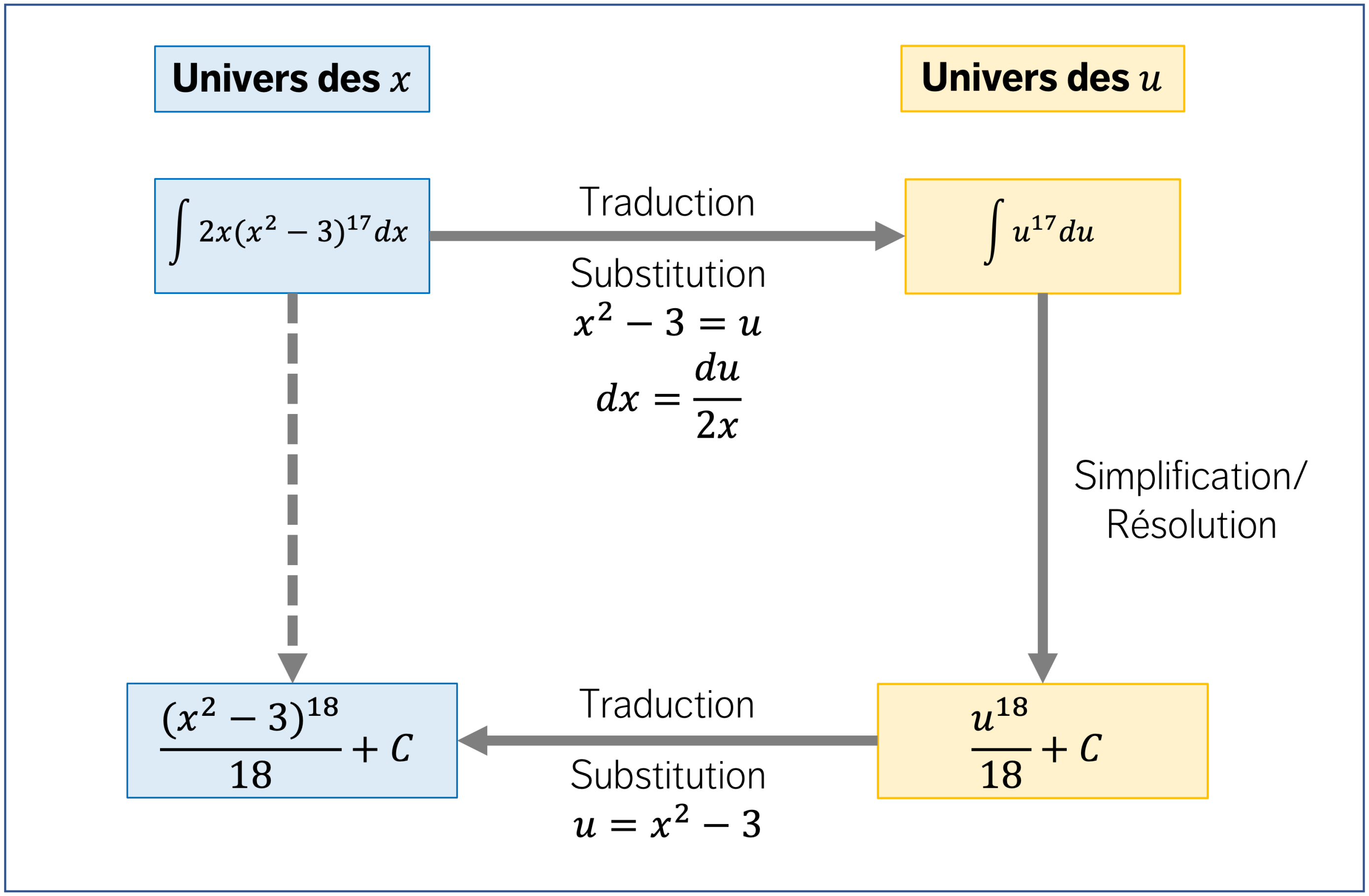
$$dx = \frac{du}{2x}$$


Univers des x
Univers des u
$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$
Traduction
Substitution
$x^2 - 3 = u$
$dx = \frac{du}{2x}$
$\int u^{17}du$
Simplification/
Résolution


Univers des x
Univers des u
$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$
Traduction
Substitution
$x^2 - 3 = u$
$dx = \frac{du}{2x}$
$\int u^{17}du$
Simplification/
Résolution
$\frac{u^{18}}{18} + C$


Univers des x
Univers des u
$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$
Traduction
Substitution
$x^2 - 3 = u$
$dx = \frac{du}{2x}$
$\int u^{17}du$
Simplification/
Résolution
$\frac{u^{18}}{18} + C$
Traduction
Substitution
$u = x^2 - 3$


Univers des x
Univers des u
$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$
Traduction
Substitution
$x^2 - 3 = u$
$dx = \frac{du}{2x}$
$\int u^{17}du$
Simplification/
Résolution
$\frac{u^{18}}{18} + C$
Traduction
Substitution
$u = x^2 - 3$
$\frac{(x^2-3)^{18}}{18} + C$


Univers des x
Univers des u
$\int 2x(x^2-3)^{17}dx$
Traduction
$\int u^{17}du$
Substitution
$x^2 - 3 = u$
$dx = \frac{du}{2x}$
Simplification/
Résolution
$\frac{(x^2-3)^{18}}{18} + C$
Traduction
$\frac{u^{18}}{18} + C$
Substitution
$u = x^2 - 3$

2. Évaluer $\displaystyle\int x^5(x^3+1)^2\,dx$.

2. Évaluer $\displaystyle\int x^5(x^3+1)^2\,dx$.

   Solution: on commence par trouver un candidat pour la composante interne u; mettons $u = g(x) = x^3 + 1$. Alors

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies \frac{du}{3x^2} = dx.$$

   On remplace dx par $\frac{du}{3x^2}$, puis chaque instance de x^3+1 par u:

$$\int x^5(x^3{+}1)^2\,dx = \int x^5(x^3{+}1)^2\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int x^3(x^3{+}1)^2\,du = \frac{1}{3}\int x^3u^2\,du.$$

Mais $x^3 = u - 1$, alors

$$\frac{1}{3}\int x^3u^2\,du = \frac{1}{3}\int (u-1)u^2\,du = \frac{1}{3}\int (u^3-u^2)\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right)+C.$$

Puisque $u = x^3 + 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right) + C &= \frac{1}{3}\left(\frac{(x^3+1)^4}{4} + \frac{(x^3+1)^3}{3}\right) + C \\ &= \frac{x^{12}}{12} + \frac{2x^9}{9} + \frac{x^6}{6} + C.\end{aligned}$$

Il n'est pas toujours nécéssaire d'utiliser la méthode de substitution:

$$x^5(x^3+1)^2 = x^{11} + 2x^8 + x^5,$$

d'où

$$\int x^5(x^3+1)^2\,dx = \int x^{11}+2x^8+x^5\,dx = \frac{x^{12}}{12}+\frac{2x^9}{9}+\frac{x^6}{6}+C.$$

⚠ **Les substitutions ne sont pas toutes créées égales**.

Si on utilise $u = x^5$, on se retrouve avec

$$\int x^5(x^3+1)^2\,dx = \frac{1}{5}\int u^{1/5}(u^{3/5}+1)^2\,du;$$

la nouvelle intégrale a sensiblement le même degré de difficulté $\Longrightarrow$ la substitution n'est pas idéale.

3. Évaluer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1+1/x)^2}\,dx.$

3. Évaluer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1+1/x)^2}\,dx$.

Solution: on commence par trouver un candidat pour la composante interne u; mettons $u = g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Alors

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \implies -x^2\,du = dx.$$

On remplace dx par $-x^2\,du$, puis chaque instance de $1 + \frac{1}{x}$ par u:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+1/x)^2}\,dx &= -\int \frac{x^2}{x^2(1+1/x)^2}\,du = -\int \frac{1}{u^2}\,du \\ &= -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C.\end{aligned}$$

Puisque $u = 1 + \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{1}{u} + C = \frac{1}{(1 + 1/x)} + C = \frac{x}{x+1} + C.$$

On remarque cependant que

$$\frac{1}{x^2(1+1/x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2};$$

en substituant $u = x + 1$, on obtient $du = dx$, d'où

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,du = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x+1} + C.$$

⚠ **Comment expliquer que $\frac{x}{x+1}$ et $-\frac{1}{x+1}$ soient toutes deux des primitives de l'intégrande?**

Rappel: deux fonctions F et G sont des primitives de f si $F' = G' = f$ et $F - G =$ constante; puisque

$$\frac{x}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

est constant, ces deux fonctions sont effectivement des primitives de la même intégrande.

4. Il y a des intégrales que l'on ne peut évaluer par substitution, par exemple:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Cela ne veut pas dire que l'intégrale n'existe pas; mais il faut utiliser une autre méthode.

⚠ **Lorsque l'on évalue une intégrale définie par substitution, les bornes d'intégration doivent aussi changer puisque la variable d'intégration change.**

Si la substitution est $u = g(x)$, l'intégrale définie devient

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du.$$

Exemples:

1. Évaluer $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} 2x(x^2-3)^{17}\,dx.$

Solution: soit $u = x^2 - 3 = g(x)$. Alors

$$a = \sqrt{3}, b = 2 \implies g(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3 = 0, g(2) = 2^2 - 3 = 1$$

et

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} 2x(x^2-3)^{17}\,dx = \int_0^1 u^{17}\,du = \left[\frac{u^{18}}{18}\right]_0^1 = \frac{1^{18}}{18} - \frac{0}{18} = \frac{1}{18}.$$

2. Évaluer $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5(x^3+1)^2\,dx$.

Solution: soit $u = x^3 + 1 = g(x)$. Alors

$$a = -1, b = 1 \implies g(-1) = (-1)^3 + 1 = 0, g(1) = (1)^3 + 1 = 2$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^5(x^3+1)^2\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 (u^3 - u^2)\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

3. Évaluer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2(1+1/x)^2}\,dx$.

Solution: soit $u = 1 + \frac{1}{x} = g(x)$. Alors

$$a = 1, b = 3 \implies g(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2, g(3) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

et

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2(1+1/x)^2}\,dx = -\int_2^{4/3} \frac{1}{u^2}\,du = \left[\frac{1}{u}\right]_2^{4/3} = \frac{1}{4/3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

L'intégration par substitution ne permet pas toujours de simplifier le calcul. Quand c'est le cas, on peut aussi essayer la technique suivante.

L'intégration par parties

L'**intégration par parties** est une méthode d'intégration associée à la règle de la dérivée d'un produit.

Soient f et g deux fonctions différentiables et $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Selon la règle de dérivée d'un produit,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En intégrant de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$\int (fg)'(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Mais, fg est une primitive de $(fg)'$, d'où

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

En général, il y a plusieurs choix possible pour $f(x)$ et $g'(x)$; idéalement, on trouve un $g'(x)$ qui est aisément intégrable. Ce n'est pas toujours possible.

⚠ **Dans certains ouvrages, on écrit plutôt** $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Exemples:

1. Évaluer $\displaystyle\int (x+1)^2 x^3\,dx$.

Solution: on commence par trouver un candidat pour $f(x)$ et un candidat pour $g'(x)$:

$$f(x) = (x+1)^2,\ g'(x) = x^3 \implies f'(x) = 2(x+1),\ g(x) = \frac{x^4}{4}.$$

(la constante d'intégration est incorporée à la fin).

On intègre par parties pour obtenir

$$\int \underbrace{(x+1)^2}_{f(x)} \underbrace{x^3}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{(x+1)^2}_{f(x)} \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{g(x)} - \int \underbrace{2(x+1)}_{f'(x)} \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{g(x)}\, dx$$

$$= \frac{(x+1)^2 x^4}{4} - \frac{1}{2} \int (x+1) x^4\, dx.$$

En général, si on a fait le bon choix, la nouvelle intégrale devrait être aussi simple (ou préférablement encore plus simple) à évaluer que l'originale; c'est bien le cas ici.

Puisque

$$\int (x+1)x^4\,dx = \int (x^5+x^4)\,dx = \frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+C,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int (x+1)^2x^3\,dx &= \frac{(x+1)^2x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}+C\right)\\ &= \frac{1}{6}x^6+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+C.\end{aligned}$$

Il n'est pas toujours nécéssaire d'utiliser l'intégration par parties:

$$(x+1)^2x^3 = x^5 + 2x^4 + x^3, \quad \text{d'où}$$

$$\int (x+1)^2x^3\,dx = \int (x^5 + 2x^4 + x^3)\,dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Si on fait l'autre choix au départ, on a

$$f(x) = x^3,\ g'(x) = (x+1)^2 \implies f'(x) = 3x^2,\ g(x) = \frac{(x+1)^3}{3},$$

d'où

$$\int (x+1)^2x^3\,dx = x^3 \cdot \frac{(x+1)^3}{3} - \int 3x^2 \cdot \frac{(x+1)^3}{3};$$

cette nouvelle intégrale ne simplifie pas vraiment la tâche...

2. Évaluer $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 x^3\,dx$.

2. Évaluer $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 x^3\,dx$.

   Solution: selon l'exemple précédent, la primitive est $\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+C$. Ainsi,

$$\int_0^1 (x+1)^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{49}{60}.$$

3. Il est parfois préférable de ne pas utiliser l'intégration par parties:

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

   ne peut être évaluée par parties; la substition $u=x^3+1$ fera l'affaire.

Résumé

Exercices suggérés