MAT 2777
Probabilités et statistique pour ingénieur.e.s

Chapitre 2
Variables aléatoires discrètes

P. Boily (uOttawa)

Hiver 2023

Aperçu

2.1 – Variables aléatoires

Rappelons que, pour toute "expérience" aléatoire, l'ensemble de tous les résultats possibles est désigné par $\mathcal{S}$.

une **variable aléatoire** (v.a.) est une fonction $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, c-à-d une règle qui associe un nombre (réel) à chaque résultat de l'expérience.

$\mathcal{S}$ est le **domaine** de la v.a. X ; $X(\mathcal{S}) \subseteq \mathbb{R}$ est son **étendue** (image).

Une **densité de probabilité** (f.d.p.) est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui spécifie les probabilités des valeurs que peut prendre $X(\mathcal{S})$.

Lorsque $\mathcal{S}$ est discret, on dit que X est une **v.a. discrète** et la f.p.d. est appelée une **fonction de masse (de probabilité)** (f.m.p.).

Notation

Nous utilisons la notation suivante :

- les lettres romaines majuscules (X, Y, etc.) désignent des v.a. ;
- les lettres romaines minuscules correspondantes (x, y, etc.) désignent des *valeurs génériques* prisent par les v.a. ;
- la f.m.p. de X est $f(x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}) := P(X = x)$.
- la **fonction de répartition** (f.r.c.) de X est $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés de la f.m.p. et de la f.r.c.

Si X est une v.a. discrète avec une f.m.p. $f(x)$ et une f.r.c. $F(x)$, alors

- $0 < f(x) \leq 1$ pour tout $x \in X(\mathcal{S})$;
- $\sum_{s\in\mathcal{S}} f(X(s)) = \sum_{x\in X(\mathcal{S})} f(x) = 1$;
- pour tout événement $A \subseteq \mathcal{S}$, $P(X \in A) = \sum_{x\in A} f(x)$;
- pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$P(a < X) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$
$$P(X < b) = P(X \leq b) - P(X = b) = F(b) - f(b)$$

- pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(a \leq X) &= 1 - P(X < a) = 1 - (P(X \leq a) - P(X = a)) \\ &= 1 - F(a) + f(a) \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser ces résultats pour calculer la probabilité d'une v.a. **discrète** X tombant dans divers intervalles :

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) + P(X = a) = F(b) - F(a) + f(a)$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) - P(X = b) = F(b) - F(a) - f(b)$$

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) - P(X = b) = F(b) - F(a) + f(a) - f(b)$$

Exemples:

1. Lancez une pièce de monnaie; vous avez alors $\mathcal{S} = \{\text{Face, Pile}\}$. Soit $X : S \to \mathbb{R}$, avec $X(\text{Face}) = 1$ et $X(\text{Pile}) = 0$. Alors X est une v.a. discrète (on écrit $X = 1$ et $X = 0$ par souci de commodité).

   Si la pièce est **équilibrée**, la f.m.p. de X est $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où

   $$f(0) = P(X = 0) = 1/2,\ f(1) = P(X = 1) = 1/2,\ f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0, 1.$$

2. Lancez un dé; vous avez alors $\mathcal{S} = \{1, \ldots, 6\}$. Soit $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, avec $X(i) = i$ pour $i = 1, \ldots, 6$. Alors X est une v.a. discrète.

   Si le dé est **équilibré**, la f.m.p. de X est $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où

   $$f(i) = P(X = i) = 1/6,\ \text{pour } i = 1, \ldots, 6,\ f(x) = 0 \text{ si } x \neq 1, \ldots, 6.$$

3. Pour la v.a. X de l'exemple précédent, la f.r.c. est $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ i/6 & \text{si } i \leq x < i+1, \text{ pour } i = 1, \ldots, 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

4. Pour la même variable aléatoire, nous pouvons calculer $P(3 \leq X \leq 5)$, disons, directement :

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

nous pouvons également utiliser la f.r.c. :

$$P(3 \leq X \leq 5) = F(5) - F(3) + f(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} + \frac{1}{6}.$$

5. Le **nombre d'appels reçus**, X, sur une période de temps spécifique, est une v.a. discrète, avec valeurs potentielles $0, 1, 2, \ldots$.

6. Considérons une main de poker de 5 cartes composée de cartes choisies au hasard dans un jeu de 52 cartes. Trouvez la f.m.p. de X, où X est la v.a. indiquant le nombre de cartes rouges ($\diamondsuit$ et $\heartsuit$) dans la main.

   Solution: il y a en tout $\binom{52}{5}$ façons d'obtenir une main de poker de 5 cartes à partir d'un jeu à 52 cartes.

   Par construction, X peut prendre les valeurs $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Si $X = 0$, alors aucune des cartes n'est $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$; elles sont toutes $\spadesuit$ ou $\clubsuit$.

Il y a donc $\binom{26}{0} \cdot \binom{26}{5}$ mains à 5 cartes qui ne contiennent que des cartes noires, et

$$P(X = 0) = \frac{\#\text{ mains sans carte rouge}}{\#\text{ mains total}} = \frac{\cdot\binom{26}{0} \cdot \binom{26}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

En général, si $X = x$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, il y a $\binom{26}{x}$ façons d'avoir x $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ dans la main, et $\binom{26}{5-x}$ façons d'avoir $5 - x$ $\spadesuit$ et $\clubsuit$ dans la main, de sorte que

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{26}{x} \cdot \binom{26}{5-x}}{\binom{52}{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \; f(x) = 0 \text{ autrement.}$$

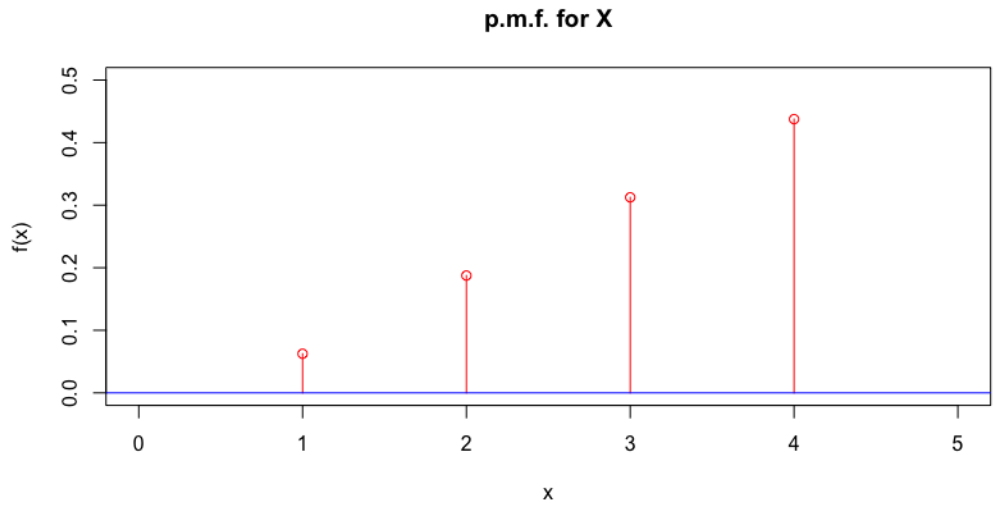
7. Trouvez la f.r.c. $F(x)$ d'une v.a. discrète X avec une f.m.p. $f(x)$ définie par $f(x) = x/10$ si $x \in \mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$, et $f(x) = 0$ autrement.

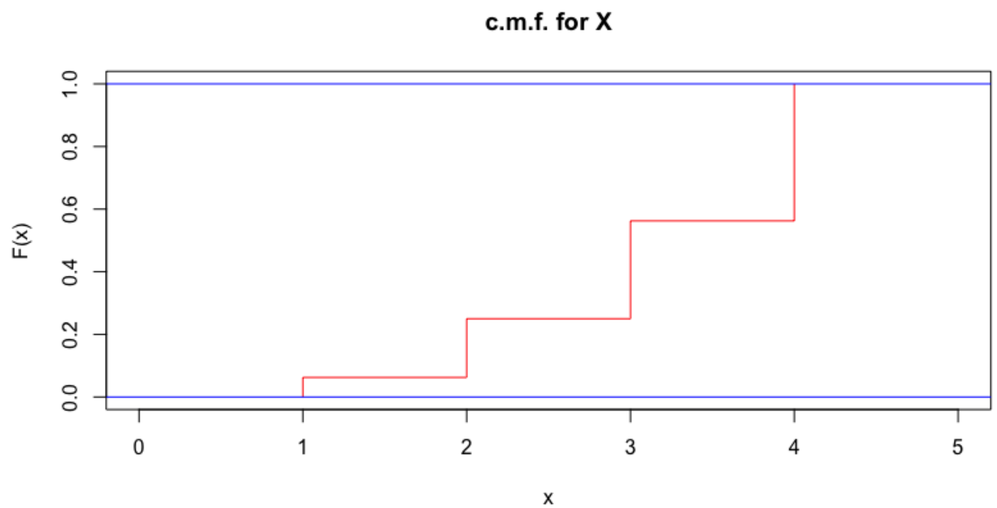
   Solution: $f(x)$ est bien une f.m.p. car $0 < f(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathcal{S}$ et

$$\sum_{x=1}^{4} \frac{x}{10} = \frac{1}{10} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4(5)}{2} = 1.$$

   Ainsi,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/10 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3/10 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 6/10 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$


p.m.f. for X
f(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
4
5
x


c.m.f. for X
F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
x

2.2 – L'espérance d'une v.a. discrète

L'**espérance** d'une variable aléatoire discrète X est définie comme suit :

$$\mathrm{E}[X] = \sum_x x \cdot P(X = x) = \sum_x x f(x)\,,$$

où la somme se calcule sur toutes les valeurs de x prises par X.

La définition peut être étendue à une fonction générale d'une v.a. X :

$$\mathrm{E}[u(X)] = \sum_x u(x) P(X = x) = \sum_x u(x) f(x).$$

Un **cas spécial** important: $\mathrm{E}[X^2] = \sum_x x^2 P(X = x) = \sum_x x^2 f(x).$

Exemples:

1. Quelle est l'espérance sur le lancer Z d'un dé équilibré à 6 faces ?

   Solution: $\mathrm{E}[Z] = \sum_{z=1}^{6} z \cdot P(Z = z) = \frac{1}{6} \sum_{z=1}^{6} z = \frac{1}{6} \cdot \frac{6(7)}{2} = \frac{7}{2} = 3.5.$

2. Pour chaque $1\$$ misé dans un jeu de hasard, un joueur peut gagner $3\$$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et perdre $1\$$ supplémentaire avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Trouvez l'espérance de X, le gain net/la perte nette du jeu.

   Solution: X peut prendre la valeur $2\$$ (pour un gain) et $-2\$$ (pour une perte). L'espérance de X est ainsi

$$\mathrm{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

3. Si Z est le nombre apparaissant sur le lancer d'un dé équilibré à 6 faces, trouvez $\mathrm{E}[Z^2]$ et $\mathrm{E}[(Z-3.5)^2]$.

Solution:

$$\mathrm{E}[Z^2] = \sum_z z^2 P(Z=z) = \frac{1}{6}\sum_{z=1}^{6} z^2 = \frac{1}{6}(1^2+\cdots+6^2) = \frac{91}{6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(Z-3.5)^2] &= \sum_{z=1}^{6}(z-3.5)^2 P(Z=z) = \frac{1}{6}\sum_{z=1}^{6}(z-3.5)^2 \\ &= \frac{(1-3.5)^2+\cdots+(6-3.5)^2}{6} = \frac{35}{12} = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Moyenne et variance d'une v.a. discrète

Nous pouvons interpréter l'espérance comme la **moyenne** de X, souvent désignée par $\mu = \mu_X$.

Par exemple, dans l'exemple du dé équilibré, $\mu_Z = \mathrm{E}[Z] = 3.5$.

Notez que dans le dernier exemple, nous aurions pu écrire

$$\mathrm{E}[(Z - 3.5)^2] = \mathrm{E}[(Z - \mathrm{E}[Z])^2].$$

C'est une quantité importante associée à une v.a. X, sa **variance** $\mathrm{Var}[X]$.

La **variance** d'une variable aléatoire discrète X est l' **espérance du carré de la différence avec la moyenne** :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] &= \sum_x (x-\mu_X)^2 P(X=x) \\ &= \sum_x \left(x^2 - 2x\mu_X + \mu_X^2\right) f(x) \\ &= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu_X \sum_x x f(x) + \mu_X^2 \sum_x f(x) \\ &= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu_X\mu_X + \mu_X^2 \cdot 1 = \mathrm{E}[X^2] - \mu_X^2.\end{aligned}$$

Ceci est aussi parfois présenté sous la forme $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$.

Écart-type

L'**écart type** d'une v.a. discrète X est définie directement à partir de la variance :

$$\mathrm{ET}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,.$$

La moyenne donne une idée de l'endroit où se situe le **"gros"** d'une distribution ; c'est une mesure de la **centralité** (nous y reviendrons).

La variance et l'écart-type fournissent des informations sur la **dispersion** ; les distributions avec une variance/écart-type plus élevée sont plus **"étalées"** autour de la la **moyenne**.

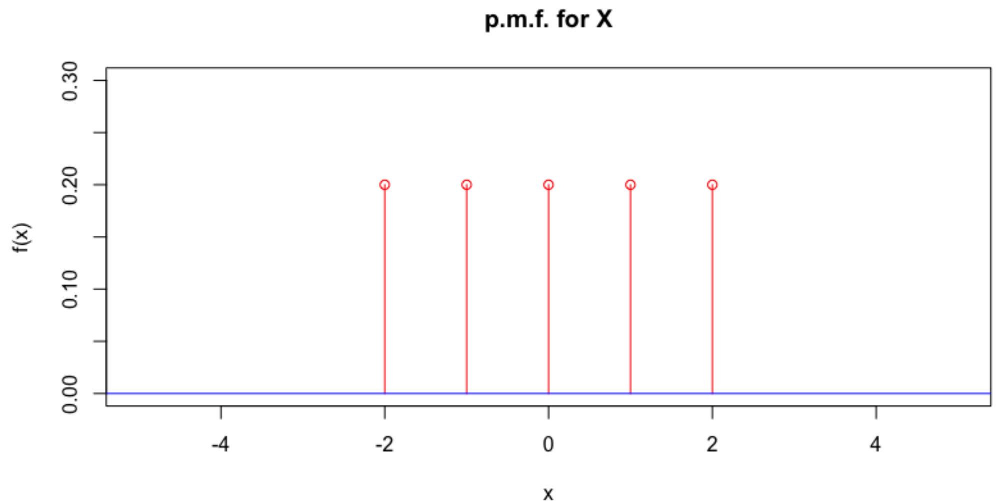
Exemple: Soit X et Y des v.a. discrètes avec les f.m.p. suivantes :

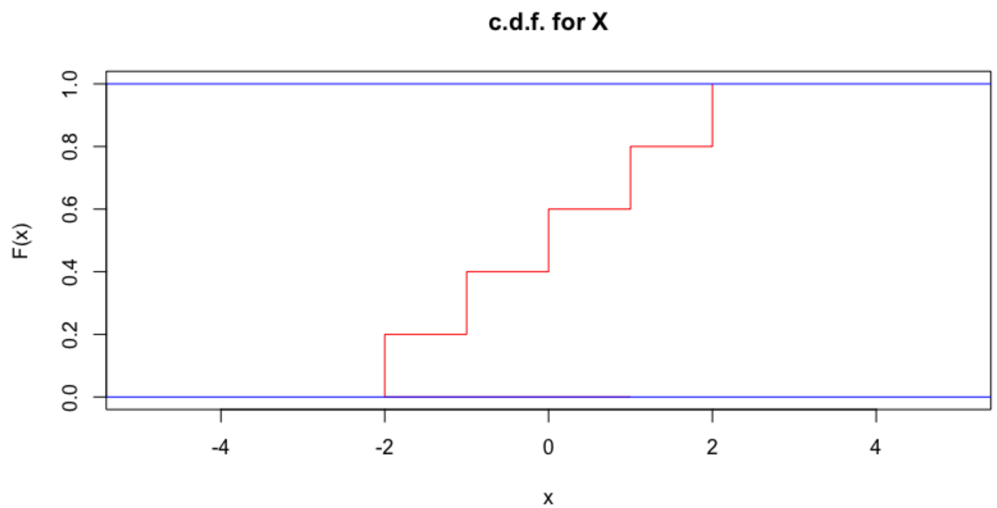
x	$P(X=x)$
-2	$1/5$
-1	$1/5$
0	$1/5$
1	$1/5$
2	$1/5$

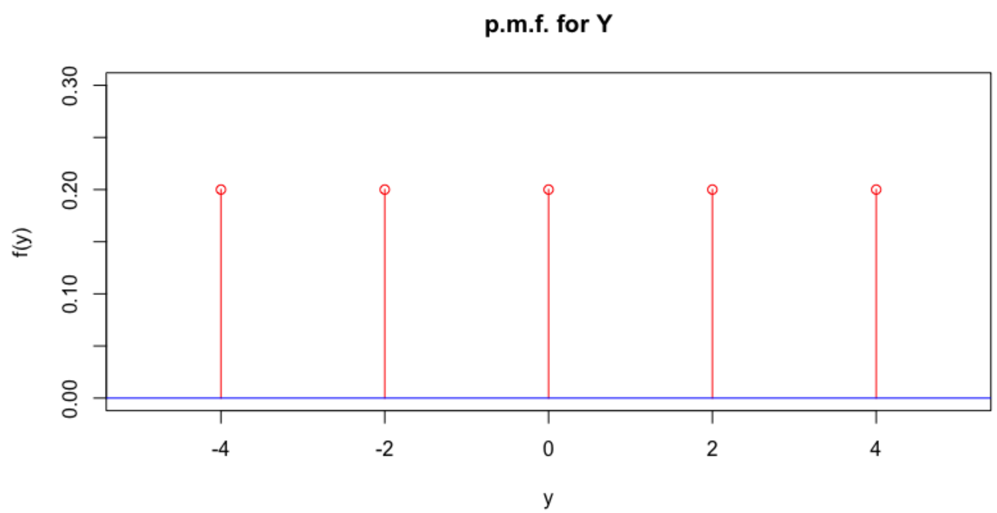
y	$P(Y=y)$
-4	$1/5$
-2	$1/5$
0	$1/5$
2	$1/5$
4	$1/5$

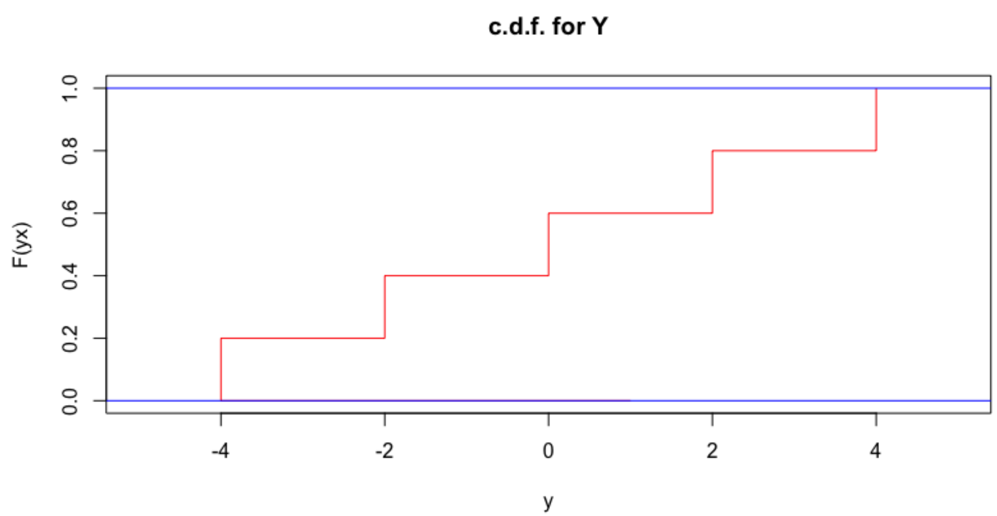
Calculez les espérances et comparez les variances.

Solution: Nous avons $0 = \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$ et $2 = \mathrm{Var}[X] < \mathrm{Var}[Y] = 8$, ce qui signifie que nous nous attendons à ce que les deux distributions soient centrées sur 0, mais que la distribution de Y devrait être **plus étalée** que celle de X.


p.m.f. for X
f(x)
0.00
0.10
0.20
0.30
-4
-2
0
2
4
x


c.d.f. for X
F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
x


p.m.f. for Y
f(y)
0.00
0.10
0.20
0.30
-4
-2
0
2
4
y


c.d.f. for Y
F(yx)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4
y

Propriétés de l'espérance

Soient X, Y des v.a. discrètes et $a \in \mathbb{R}$:

- $\mathrm{E}[a] = a$; $\mathrm{E}[aX] = a\mathrm{E}[X]$;
- $\mathrm{E}[X + a] = \mathrm{E}[X] + a$;
- $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$;
- En général, $\mathrm{E}[XY] \neq \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$;
- $\mathrm{Var}[aX] = a^2\mathrm{Var}[X]$; $\mathrm{ET}[aX] = |a|\mathrm{ET}[X]$;
- $\mathrm{Var}[X + a] = \mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{ET}[X + a] = \mathrm{ET}[X]$.

2.3 – Lois binomiales

Rappelons que le nombre d'échantillons non ordonnés de taille r provenant d'un ensemble de taille n est :

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}. $$

- $2! \times 4! = (1 \times 2) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4) = 48$, mais $(2 \times 4)! = 8! = 40320$.
- $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{5}{1} = 5$; $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{4! \times 5 \times 6}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$
- $\binom{27}{22} = \frac{27!}{22! \times 5!} = \frac{22! \times 23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27}{5! \times 22!} = \frac{23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27}{120} = 80730$

Expériences binomiales

Un **essai de Bernoulli** est une expérience aléatoire avec **deux** résultats possibles, “succès” et “échec”. Soit p la probabilité d'un succès.

Une **expérience binomiale** consiste en n essais de Bernoulli indépendants répétés, ayant chacun la même probabilité de succès, p.

Exemples:

- naissances féminines/masculines ;
- articles satisfaisants/défectueux sur une chaîne de production;
- échantillonnage avec remplacement avec deux types d'articles, etc.

Fonction de masse

Dans une expérience binomiale de n événements indépendants, chacun avec une probabilité de succès p, le nombre de succès X est une v.a. discrète qui suit une **loi binomiale** avec les paramètres (n, p) :

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{ pour } x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ceci est souvent abrégé sous la forme "$X \sim \mathcal{B}(n, p)$".

Si $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ alors $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$, d'où

$$\mathrm{E}[X] = (1-p) \cdot 0 + p \cdot 1 = p\,.$$

Espérance et variance pour $\mathcal{B}(n,p)$

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, on peut montrer que

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{n} xP(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = np, \text{ et}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] = \sum_{x=0}^{n}(x-np)^2P(X=x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} - (np)^2 = np(1-p)\,.$$

Nous verrons plus tard une façon plus facile de les dériver en interprétant X comme une somme d'autres v.a. discrètes.

Exemples:

1. Supposons que chaque échantillon d'eau prélevé dans une région bien définie ait une probabilité de 10% d'être pollué.

   Si 12 échantillons sont sélectionnés indépendamment, alors il est raisonnable de modéliser le nombre X d'échantillons pollués à l'aide de $\mathcal{B}(12, 0.1)$. Trouvez

   a) $\mathrm{E}[X]$ et $\mathrm{Var}[X]$;
   b) $P(X = 3)$;
   c) $P(X \leq 3)$.

   Solution :

   a) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathrm{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$, d'où

$$\mathrm{E}[X] = 12 \times 0.1 = 1.2; \quad \mathrm{Var}[X] = 12 \times 0.1 \times 0.9 = 1.08\,.$$

b) Par définition, $P(X=3)=\binom{12}{3}(0.1)^3(0.9)^9\approx 0,0852$.

c) Par définition,

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\cdots$$

Cependant, pour de petites valeurs de n et certaines valeurs de p, $P(X\leq k)$ est prśenté dans des tableaux spécialisés. À la page suivante, on peut voir que $P(X\leq 3)\approx 0.9744$.

Le tableau peut également être utilisé pour calculer

$$P(X=3)=P(X\leq 3)-P(X\leq 2)=0.9744-0.8891\approx 0.0853.$$

Notez l'erreur d'arrondissement.

12	0	0.2824	0.0687	0.0138	0.0022	0.0002	0.0000			
	1	0.6590	0.2749	0.0850	0.0196	0.0032	0.0003	0.0000		
	2	0.8891	0.5583	0.2528	0.0834	0.0193	0.0028	0.0002		
	3	0.9744	0.7946	0.4925	0.2253	0.0730	0.0153	0.0017	0.0000	
	4	0.9957	0.9274	0.7237	0.4382	0.1938	0.0573	0.0095	0.0006	
	5	0.9995	0.9806	0.8822	0.6652	0.3872	0.1582	0.0386	0.0039	0.0000
	6	0.9999	0.9961	0.9614	0.8418	0.6128	0.3348	0.1178	0.0194	0.0005
	7	1.0000	0.9994	0.9905	0.9427	0.8062	0.5618	0.2763	0.0726	0.0043
	8		0.9999	0.9983	0.9847	0.9270	0.7747	0.5075	0.2054	0.0256
	9		1.0000	0.9998	0.9972	0.9807	0.9166	0.7472	0.4417	0.1109
	10			1.0000	0.9997	0.9968	0.9804	0.9150	0.7251	0.3410
	11				1.0000	0.9998	0.9978	0.9862	0.9313	0.7176
	12					1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tableau de la f.r.c. $F(x) = P(X \leq x)$ pour $X \sim \mathcal{B}(12, p)$, $p = 0.1, \ldots, 0.9$.

2. Une compagnie aérienne vend 101 billets pour un vol à 100 sièges. On sait que chaque passager possédant un billet a une probabilité $p = 0.97$ de se présenter. Quelle est la probabilité de surréservation (101 passagers se présentent) Supposez les hypothèses appropriées. Que se passe-t-il si la compagnie aérienne vend 125 billets ?

   Solution: Soit X le nombre de passagers qui se présentent. Nous voulons calculer $P(X > 100)$. Si tous les passagers se présentent indépendamment les uns des autres (pas de familles ou de bus en retard, mettons), nous pouvons modéliser la v.a. $X \sim \mathcal{B}(101, 0.97)$ et obtenir

$$P(X > 100) = P(X = 101) = \binom{101}{101}(0.97)^{101}(0.03)^{0} \approx 0.046.$$

Si la compagnie aérienne vend $n = 125$ billets, nous pouvons modéliser la v.a. par $X \sim \mathcal{B}(125, 0.97)$, d'où

$$\begin{aligned} P(X > 100) &= 1 - P(X \leq 100) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{100} \binom{125}{x} (0.97)^x (0.03)^{125-x}. \end{aligned}$$

C'est une quantité plus encombrante à calculer directement, mais elle est **très** près de 1 ; essayez-le dans `R` :

$$1 - P(X \leq 100) = 1 - \texttt{pbinom}(100, 125, 0.97) = 1 - 5.94253 \times 10^{-14}.$$

2.4 – Les lois géométriques

Considérons maintenant une séquence d'essais de Bernoulli, avec une probabilité p de succès à chaque essai.

Soit X la v.a. **géométrique** qui compte le **nombre d'essai requis afin d'obtenir un premier succès**. La f.m.p. de X est

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Nous écrirons "$X \sim$ Geo(p)". Pour cette v.a., nous avons

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}p - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

.

Exemples:

- Un dé à 6 faces équilibré est lancé jusqu'à ce qu'il affiche un 6. Quelle est la probabilité que 5 lancers seront requis ?

  Solution: Si 5 lancers sont nécessaires, nous devons calculer $P(X=5)$, où $X \sim \text{Geo}(1/6)$:

$$P(X=5) = (1-p)^{5-1}p = (5/6)^4(1/6) \approx 0.0804.$$

- De combien de lancers auriez-vous besoin, en moyenne ?

  Solution: $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{1/6} = 6$.

2.5 – Les lois binomiales négatives

Considérons de nouveau une séquence d'essais de Bernoulli, avec une probabilité p de succès à chaque essai.

Soit X la v.a. **binomiale négative** désignant le **nombre de d'essais requis afin d'obtenir r succès**. La f.m.p de X est

$$f(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r, \quad x = r, r+1, \ldots$$

Nous écrirons "$X \sim \text{NegBin}(p, r)$". Pour cette v.a., nous avons

$$\text{E}[X] = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Exemples:

- Un dé à 6 faces équilibré est lancé jusqu'à ce qu'il affiche trois 6. Quelle est la probabilité que 5 lancers seront requis ?

  Solution: Si 5 lancers sont nécessaires, nous devons calculer $P(X=5)$, où $X \sim \text{NegBin}(1/6, 3)$:

$$P(X=5) = \binom{5-1}{3-1}(1-p)^{5-3}p^3 = \binom{4}{2}(5/6)^2(1/6)^3 \approx 0.0193.$$

- De combien de lancers auriez-vous besoin, en moyenne ?

  Solution: $\mathrm{E}[X] = \frac{3}{1/6} = 18$.

2.6 – Les lois de Poisson

Nous nous intéressons au nombre de “changements” qui se produisent dans un intervalle de temps ou d'espace continu (comme le nombre de défauts sur une ligne de production sur une période de 1 h, le nombre de clients qui se présentent à un guichet sur un intervalle de 15 min, etc.)

C'est un **processus de Poisson** avec un taux λ, dénoté par $\mathcal{P}(\lambda)$, si :

a) le nombre de changements se produisant dans des intervalles ne se chevauchant pas sont indépendants ;
b) la probabilité d'exactement un changement dans un court intervalle de longueur h est approximativement λh, et
c) la probabilité de $2+$ changements dans un intervalle suffisamment court est essentiellement 0.

Supposons qu'une expérience satisfasse aux propriétés ci-dessus. Soit X le nombre de changements dans une **unité d'intervalle** (cela peut être 1 jour, ou 15 minutes, ou 10 années, ou 1 km, etc.)

Qu'est-ce que $P(X = x)$, pour $x = 0, 1, \ldots$?

Divisons l'intervalle unitaire en n sous-intervalles disjoints de longueur $1/n$.

1. Par la condition b), la probabilité qu'un changement se produise dans l'un des sous-intervalles est approximativement de λ/n.

2. Par la condition c), la probabilité de $2+$ changements est ≈ 0.

3. Par la condition a), nous avons une séquence de n essais de Bernoulli avec une probabilité $p = \lambda/n$.

Par conséquent,

$$f(x) = P(X = x) \approx \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-x)!} \cdot \frac{1}{n^x}}_{\text{terme 1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\text{terme 2}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{terme 3}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, nous obtenons la f.m.p.

$$P(X = x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-x)!} \cdot \frac{1}{n^x}}_{\text{terme 1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\text{terme 2}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\text{terme 3}}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot 1 \cdot \exp(-\lambda) \cdot 1 = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On peut montrer que

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} \left(x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right) - \lambda^2 = \lambda \ ;$$

la moyenne et la variance d'une v.a. de Poisson sont **identiques** !

Exemples:

1. Le traffic est généralement modélisé par une loi de Poisson. Si, en moyenne, 6 voitures/min passent par une intersection, quelle est la probabilité qu'aucune voiture n'y passe sur une période de 30 secondes ?

   Solution: 6 voitures/min $=$ 3 voitures/30 sec. Ainsi $\lambda = 3$ et

$$P(X=0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{e^{-3}}{1} \approx 0.0498.$$

2. Un hôpital a besoin de programmer des équipes de nuit dans le service de maternité.

On sait qu'il y a 3000 accouchements par an ; si ceux-ci se produisaient de façon aléatoire 24 heures sur 24 (est-ce une hypothèse raisonnable ?), on s'attendrait à 1000 accouchements entre minuit et 8 heures du matin, heure à laquelle une grande partie du personnel est en congé.

Il est donc important de s'assurer que le personnel de l'équipe de nuit est suffisant pour permettre à la maternité de faire face à la charge de travail d'une nuit donnée, ou du moins, d'une grande partie des nuits.

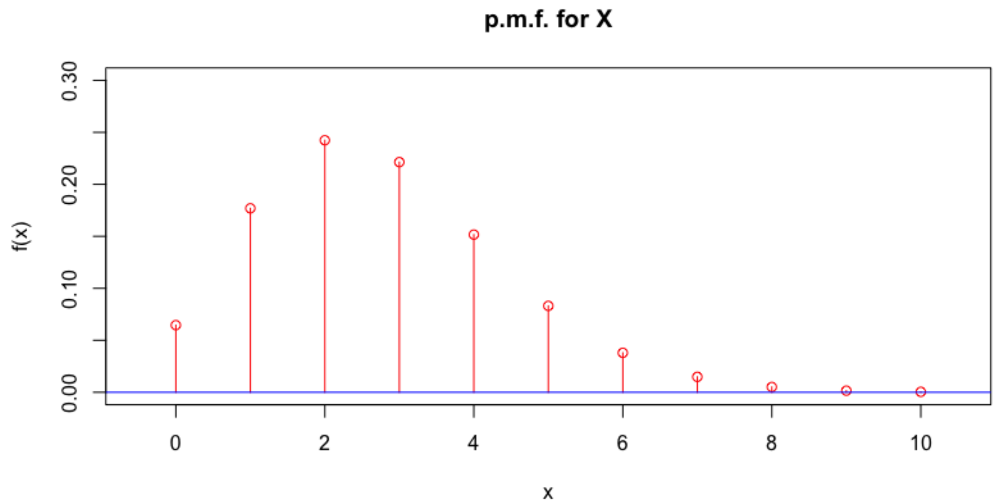
Le nombre moyen de livraisons par nuit est de $\lambda = 1000/365.25 \approx 2.74$. Si le nombre quotidien X de accouchements nocturnes suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, nous pouvons calculer la probabilité de s'occuper de $x = 0, 1, 2, \ldots$ accouchements par nuit.

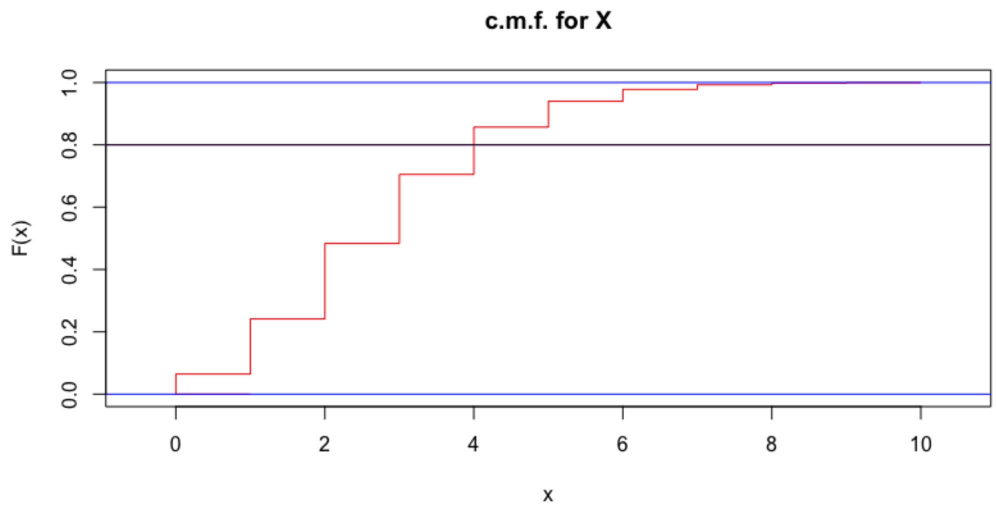
Certaines de ces probabilités sont :

$P(X=x)$	$\lambda^x \cdot \exp(-\lambda)/x!$
$P(X=0)$	0.065
$P(X=1)$	0.177
$P(X=2)$	0.242
$\cdots$	$\cdots$

3. Si la maternité veut se préparer à la plus grande affluence possible sur au moins 80% des nuits, combien d'accouchements faut-il prévoir ?

   Solution: on cherche x t.q. $P(X \leq x-1) \leq 0.80 \leq P(X \leq x)$: puisque `ppois(3,2.74)=.705` et `ppois(4,2.74)=.857`, s'ils se préparent à 4 accouchements par nuit, ils seront prêts dans au moins 80% des nuits (plus près de 85.7%, en fait). Cela diffère de la question de savoir combien d'accouchements sont attendus chaque nuit ($\mathrm{E}[X]=2.74$).


p.m.f. for X
f(x)
0.00
0.10
0.20
0.30
0
2
4
6
8
10
x


c.m.f. for X
F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x

4. À combien de nuits par année peut-on s'attendre à $5+$ accouchements ?

   Solution: nous devons évaluer

$$\begin{aligned} 365.25 \cdot P(X \geq 5) &= 365.25(1 - P(X \leq 4)) \\ &= 365.25 * (1 - \texttt{ppois}(4, 2.74)) \approx 52.27. \end{aligned}$$

5. Sur une période d'un an, quel est le plus grand nombre d'accouchements prévus pour une nuit quelconque ?

   Solution: on cherche le plus grand x pour lequel $365.25 \cdot P(X = x) \geq 1$.

```
> nights=c() # initialization
> for(j in 0:10){nights[j+1]=365.25*dpois(j,2.74)}; # f.m.p.
> max(which(nights>1))-1 # identifier l'indice
```

$\Rightarrow x = 8$.

Annexe – Résumé

X	**Description**	$P(X=x)$	**Domaine**	$\mathrm{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$
Uniforme (discrète)	Résultats également probables	$\frac{1}{b-a+1}$	$a,\ldots,b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+2)(b-a)}{12}$
Binomiale	# succès dans n essais	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$0,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Poisson	# arrivées dans une période de temps fixe	$\frac{\lambda^x\exp(-\lambda)}{x!}$	$0,1,\ldots$	λ	λ

Résumé

X	**Description**	$P(X=x)$	**Domaine**	$\mathrm{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$
Géométrique	# essais jusqu'à 1 succès	$(1-p)^{x-1}p$	$1,2,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Négative binomiale	# essais jusqu'à k succès	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$k,k+1,\ldots$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$