4 лаба отчёт

Найти экстремум функции $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y$ с точностью $\epsilon \leq 1e - 06$.

Метод градиентного спуска

Найдем градиент функции:

$$\frac{df}{dx} = 2x - 4; \quad \frac{df}{dy} = 6 - 2y$$

$$\nabla f(X) = ((2x-4);(6-2y))$$

Возьмем в качестве первого приближения $X^{(0)} = (0;0)$, т. е. $x^{(0)} = y^{(0)} = 0$ Тогда значение функции $f(X^{(0)}) = 0$, а вектор-строка градиента функции равен $\nabla f(X^{(0)}) = (-4;6)$. Выберем шаг итерации $\lambda = 0,25$

Рассчитаем параметры первой точки:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda \cdot \nabla f(x^{(1)})) = 0 + 0.001 \cdot (-4) = 0.004$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \lambda \cdot \nabla f(y^{(1)})) = 0 + 0.001 \cdot 6 = -0.006$$

Вычислим значение функции цели в новой точке и определим степень приближения:

$$f(X^{(1)}) = 0.004^2 - -0.006^2 - 4 \cdot 0.004 + 6 \cdot -0.006 = 0.00002 - 0.00004 - 0.016 + -0.036 = -0.05202$$

$$|f(X^{(1)}) - f(X^{(0)})| = |-0.05202 - 0| = 0.05202 > \epsilon(1e-06)$$

Так как заданная точность не достигнута, продолжим итерационный процесс. Градиент функции в новой точке будет определяться вектором-строкой $\nabla f(X^{(1)}) = (0.004; -0.006)$.

Рассчитаем параметры второй точки:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda \cdot \nabla f(x^{(2)})) = 0.004 + 0.001 \cdot (-3.992) = 0.00799$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} + \lambda \cdot \nabla f(y^{(2)})) = -0.006 + 0.001 \cdot 6.012 = -0.01201$$

Вычислим значение функции цели в новой точке и определим степень приближения:

$$f(X^{(2)}) = 0.00799^2 - -0.01201^2 - 4 \cdot 0.00799 + 6 \cdot -0.01201 = 0.00006 - 0.00014 - 0.03197 + -0.07207 = -0.10412$$

$$|f(X^{(2)}) - f(X^{(1)})| = |-0.10412 - (-0.05202)| = 0.0521 > \epsilon(1e-06)$$

Так как заданная точность не достигнута, продолжим итерационный процесс. Градиент функции в новой точке будет определяться вектором-строкой $\nabla f(X^{(2)}) = (0.00799; -0.01201)$.

Рассчитаем параметры третьей точки:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda \cdot \nabla f(x^{(3)})) = 0.00799 + 0.001 \cdot (-3.98402) = 0.01198$$

$$y^{(3)} = y^{(2)} + \lambda \cdot \nabla f(y^{(3)})) = -0.01201 + 0.001 \cdot 6.02402 = -0.01804$$

Вычислим значение функции цели в новой точке и определим степень приближения:

$$f(X^{(3)}) = 0.01198^2 - -0.01804^2 - 4 \cdot 0.01198 + 6 \cdot -0.01804 = 0.00014 - 0.00033 - 0.0479 + -0.10822 = -0.1563$$

$$|f(X^{(3)}) - f(X^{(2)})| = |-0.1563 - (-0.10412)| = 0.05218 > \epsilon(1e-06)$$

Требуемая точность не достигнута.

В пределах ограничения количества итераций, минимум найден:
(x = 0.01198, y = -0.01804), f(x,y) = -0.1563

Метод наискорейшего спуска

Целевая функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.5x_1x_2$, начальная точка $M_0 = (1.0, 2.0)$

Итерация 1

Вычислим градиент в точке $M_0 = (1, 2)$

$$\frac{df}{dx_1}(M_0) = 2x_1 + 1.5x_2 = -7$$
$$\frac{df}{dx_2}(M_0) = 2x_2 + 1.5x_1 = 11$$

Направление спуска: $s = -\nabla f(M_0) = (7, -11)$
Оптимальный шаг λ_1 найден: $\lambda_1 = 0.34413$
Обновляем координаты: $x_1 = x_0 + \lambda_1 s_1 = 3.40891$
$y_1 = y_0 + \lambda_1 s_2 = -1.78543$
Новое значение функции: $f(x_1, y_1) = -17.25101$

Итерация 2

Вычислим градиент в точке $M_1 = (3.40891, -1.78543)$

$$\frac{df}{dx_1}(M_1) = 2x_1 + 1.5x_2 = 1.60324$$
$$\frac{df}{dx_2}(M_1) = 2x_2 + 1.5x_1 = 1.02024$$

Направление спуска: $s = -\nabla f(M_1) = (-1.60324, -1.02024)$
Оптимальный шаг λ_2 найден: $\lambda_2 = 0.91398$
Обновляем координаты: $x_2 = x_1 + \lambda_2 s_1 = 1.94358$
$y_2 = y_1 + \lambda_2 s_2 = -2.71791$
Новое значение функции: $f(x_2, y_2) = -18.90132$

Итерация 3

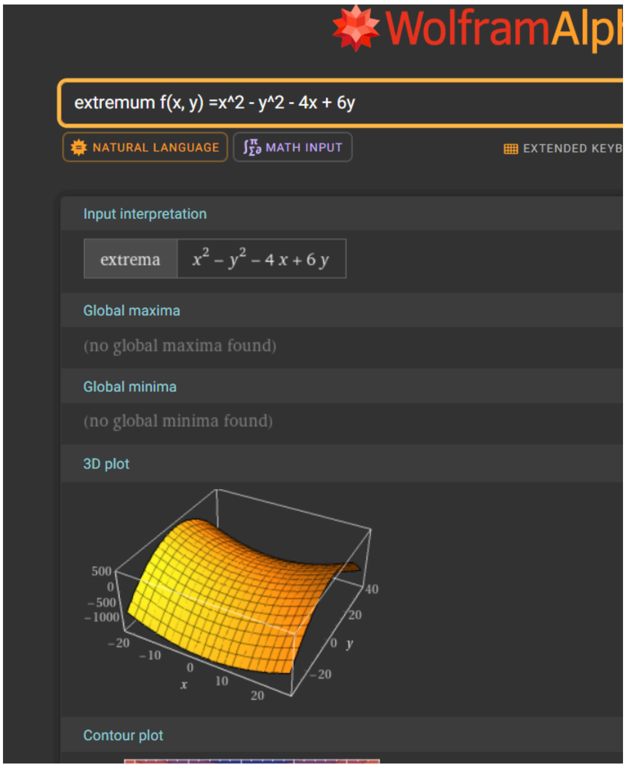
Вычислим градиент в точке $M_2 = (1.94358, -2.71791)$

$$\frac{df}{dx_1}(M_2) = 2x_1 + 1.5x_2 = -0.39493$$
$$\frac{df}{dx_2}(M_2) = 2x_2 + 1.5x_1 = 0.62061$$

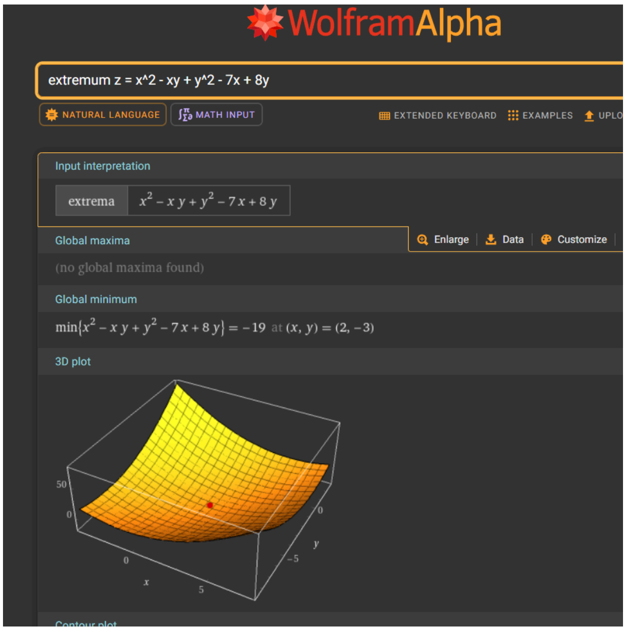
Направление спуска: $s = -\nabla f(M_2) = (0.39493, -0.62061)$
Оптимальный шаг λ_3 найден: $\lambda_3 = 0.34413$
Обновляем координаты: $x_3 = x_2 + \lambda_3 s_1 = 2.07949$
$y_3 = y_2 + \lambda_3 s_2 = -2.93147$
Новое значение функции: $f(x_3, y_3) = -18.99443$
Минимум найден в точке $(x^*, y^*) = (2.07949, -2.93147)$
$f_{min} = -18.99443$

Итог: Минимум найден в точке x = 2.079489034793048, y = -2.931474970303357, f(x,y) = -18.994432802122496

3 вариант



свой вариант



Desmos:

https://www.desmos.com/3d/yvnifrejvb