2 лаба отчёт

Вводные данные

$[a, b] = [0, 2]$
$\epsilon = 0.05$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$

> $f'(x) = x^3 + 2x - 8$
> $f''(x) = 3x^2 + 2$

Метод половинного деления

- 1 итерация
  - Берём две точки вблизи интервала [a, b]:
    - $x_1 = (0.00000 + 2.00000 - 0.05)/2 = 0.97500$
    - $x_2 = (0.00000 + 2.00000 + 0.05)/2 = 1.02500$
  - Вычислим значения функций в этих точках
    - $y_1 = 5.37655$
    - $y_2 = 5.12658$
  - $y_1 > y_2$, следовательно:
    - $a = 0.97500$
    - $[a, b] = [0.97500, 2.00000]$
- 2 итерация
  - Берём две точки вблизи интервала [a, b]:
    - $x_1 = (0.97500 + 2.00000 - 0.05)/2 = 1.46250$
    - $x_2 = (0.97500 + 2.00000 + 0.05)/2 = 1.51250$
  - Вычислим значения функций в этих точках
    - $y_1 = 3.58264$
    - $y_2 = 3.49600$
  - $y_1 > y_2$, следовательно:
    - $a = 1.46250$
    - $[a, b] = [1.46250, 2.00000]$
- 3 итерация

- Берём две точки вблизи интервала [a, b]:
    - $x_1 = (1.46250 + 2.00000 - 0.05)/2 = 1.70625$
    - $x_2 = (1.46250 + 2.00000 + 0.05)/2 = 1.75625$
  - Вычислим значения функций в этих точках
    - $y_1 = 3.38019$
    - $y_2 = 3.41282$
  - $y_2 > y_1$, следовательно:
    - $b = 1.75625$
    - $[a, b] = [1.46250, 1.75625]$
- 4 итерация
  - Берём две точки вблизи интервала [a, b]:
    - $x_1 = (1.46250 + 1.75625 - 0.05)/2 = 1.58438$
    - $x_2 = (1.46250 + 1.75625 + 0.05)/2 = 1.63437$
  - Вычислим значения функций в этих точках
    - $y_1 = 3.41058$
    - $y_2 = 3.37998$
  - $y_1 > y_2$, следовательно:
    - $a = 1.58438$
    - $[a, b] = [1.58438, 1.75625]$
- 5 итерация
  - Берём две точки вблизи интервала [a, b]:
    - $x_1 = (1.58438 + 1.75625 - 0.05)/2 = 1.64531$
    - $x_2 = (1.58438 + 1.75625 + 0.05)/2 = 1.69531$
  - Вычислим значения функций в этих точках
    - $y_1 = 3.37659$
    - $y_2 = 3.37667$
  - $y_2 > y_1$, следовательно:
    - $b = 1.69531$
    - $[a, b] = [1.58438, 1.69531]$

> требуемая точность вручную не достигнута

$$x = \frac{a + b}{2}$$

$f(x) = f(x)$

Точка минимума 1.63984 и приближенное значение 3.37814

Метод золотого сечения

- 1 итерация
  - Вычислим точки по формулам $x_1 = a + 0.382(b - a)$, $x_2 = a + 0.618(b - a)$:
    - $x_1 = 0.00000 + 0.382(2.00000 - 0.00000) = 0.76400$
    - $x_2 = 0.00000 + 0.618(2.00000 - 0.00000) = 1.23600$
- 1 итерация
  - $f(0.76400) > f(1.23600)$ или $6.55687 > 4.22316$, следовательно:
    - отрезок $[x_1; b]$ или $[0.76400; 2.00000]$
    - $x1 = x2 = 1.23600$
    - $x2 = a + 0.618 * (b - a) = 0.76400 + 0.618 * (2.00000 - 0.76400) = 1.52785$
- 2 итерация
  - $f(1.23600) > f(1.52785)$ или $4.22316 > 3.47380$, следовательно:
    - отрезок $[x_1; b]$ или $[1.23600; 2.00000]$
    - $x1 = x2 = 1.52785$
    - $x2 = a + 0.618 * (b - a) = 1.23600 + 0.618 * (2.00000 - 1.23600) = 1.70815$
- 3 итерация
  - $f(1.52785) > f(1.70815)$ или $3.47380 > 3.38093$, следовательно:
    - отрезок $[x_1; b]$ или $[1.52785; 2.00000]$
    - $x1 = x2 = 1.70815$
    - $x2 = a + 0.618 * (b - a) = 1.52785 + 0.618 * (2.00000 - 1.52785) = 1.81964$
- 4 итерация
  - $f(1.70815) < f(1.81964)$ или $3.38093 < 3.49480$, следовательно:
    - отрезок $[a; x_2]$ или $[1.52785; 1.81964]$
    - $x2 = x1 = 1.70815$
    - $x1 = a + 0.382 * (b - a) = 1.52785 + 0.382 * (1.81964 - 1.52785) = 1.63931$
- 5 итерация
  - $f(1.63931) < f(1.70815)$ или $3.37830 < 3.38093$, следовательно:
    - отрезок $[a; x_2]$ или $[1.52785; 1.70815]$
    - $x2 = x1 = 1.63931$
    - $x1 = a + 0.382 * (b - a) = 1.52785 + 0.382 * (1.70815 - 1.52785) = 1.59672$

> требуемая точность вручную не достигнута

$x = \frac{b + a}{2}$

$f(x) = f(\frac{b + a}{2})$

Точка минимума 1.61800 и приближенное значение 3.38731

Метод хорд

- 1 итерация
  - $\widetilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 0.00000 - -8.00000/(-8.00000 - 4.00000) * (0.00000 - 2.00000) = 1.33333$
  - $f'(\widetilde{x}) = f'(1.33333) = -2.96296$
  - $f'(\widetilde{x}) <= 0$, следовательно $a = x$
- 2 итерация
  - $\widetilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 1.33333 - -2.96296/(-2.96296 - 4.00000) * (1.33333 - 2.00000) = 1.61702$
  - $f'(\widetilde{x}) = f'(1.61702) = -0.53784$
  - $f'(\widetilde{x}) <= 0$, следовательно $a = x$
- 3 итерация
  - $\widetilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 1.61702 - -0.53784/(-0.53784 - 4.00000) * (1.61702 - 2.00000) = 1.66241$
  - $f'(\widetilde{x}) = f'(1.66241) = -0.08090$
  - $f'(\widetilde{x}) <= 0$, следовательно $a = x$
- 4 итерация
  - $\widetilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 1.66241 - -0.08090/(-0.08090 - 4.00000) * (1.66241 - 2.00000) = 1.66911$
  - $f'(\widetilde{x}) = f'(1.66911) = -0.01181$
  - $f'(\widetilde{x}) <= 0$, следовательно $a = x$
  - $|f'(\widetilde{x})| <= e$ или $0.01181 <= 0.05 \Rightarrow$ заканчиваем итерации

$x^* = \widetilde{x}$

$f^* = f(\widetilde{x})$

Точка минимума 1.66911 и приближенное значение 3.37340

Метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

- 1 итерация
  - $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$ = 1.00000 - -5.00000 / 5.00000 = 2.00000$
- 2 итерация
  - $x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$ = 2.00000 - 4.00000 / 14.00000 = 1.71429$
- 3 итерация
  - $x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)}$ = 1.71429 - 0.46647 / 10.81633 = 1.67116$
- 4 итерация
  - $x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)}$ = 1.67116 - 0.00949 / 10.37832 = 1.67025$
  - $|f'(x_4)| <= e$, или $0.00949 <= 0.05 \Rightarrow$ заканчиваем итерации

$$x^* \approx x_k = 1.67116$$

$$f^* \approx f(x_k) = 3.37339$$

Точка минимума 1.67116 и приближенное значение 3.37339

Истинное значение