

Tarea 3

Profesor: Pablo Barceló

Auxiliares: Javier Oliva, Bernardo Subercaseaux

Ayudantes: Joaquín Cruz, Heinich Porro, Lucas Torrealba, Florencia Yáñez

Instrucciones.-

- Seguir el reglamento de políticas de colaboración publicado en material docente.
- Deberá entregar un único archivo en formato `.zip`, que, por cada pregunta, deberá contener un código y un archivo en formato `.pdf` con sus demostraciones y, de ser necesario, la explicación del código.
- Procure que sus demostraciones sean claras, sin ambigüedades y ordenadas. Se recomienda, aunque no es obligatorio, que elabore sus informes usando \LaTeX . Cabe mencionar que pueden entregar archivos escaneados.
- Puede programar en cualquiera de los siguientes lenguajes: Python3, Java, C++.
- Su código debe recibir input y escribir output de la manera descrita, no introduzca nada adicional. Debe imprimir un salto de línea (`'\n'`) al final de cada línea impresa.

P1.-

Definimos Σ^n como el conjunto de todas las palabras de largo n sobre el alfabeto $\{0, 1\}$. Una palabra u es subpalabra de otra palabra v si $v = x \cdot u \cdot y$ (Siendo \cdot la concatenación de palabras, y x e y palabras, potencialmente vacías).

Decimos que una palabra w es k -completa si toda palabra en Σ^k es una subpalabra de w .

Ejemplo: 00110110 es 2-completa pues podemos encontrar 00, 11, 01 y 10 que son todos los elementos de Σ^2 . Otra palabra 2-completa es 00110. Como se puede observar, hay múltiples palabras 2-completas, con distintos largos. En esta pregunta nos concentraremos en encontrar una tal que no exista otra más corta.

El objetivo es entonces, dado un número k , encontrar una palabra k -completa tal que no existan otras más cortas. Para ello realice los siguientes pasos.

1. Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, $\forall v \in V$ definimos

$$\begin{aligned} out(v) &= |\{(v, u) \in E : u \in V\}| \\ in(v) &= |\{(u, v) \in E : u \in V\}| \end{aligned}$$

Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que este es **fuertemente conexo** si $\forall u, v \in V$, existe un camino que conecta u y v .

Demuestre: Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido y fuertemente conexo tal que $\forall v \in V$ se cumple que $in(v) = out(v)$, entonces G tiene un circuito euleriano.

Hint: Dado un ciclo $V_1e_1V_2e_2V_3e_3V_1$ donde V_i son vértices y e_i arcos. Entonces podemos escoger cualquier vértice del camino como el vértice inicial. Es decir, el ciclo $V_2e_2V_3e_3V_1e_1V_2$ es válido.

2. Dado k , modele el problema utilizando grafos.

Hint: Utilice $V = \Sigma^k$ como conjunto de vértices.

3. Demuestre que existe una palabra k -completa cuyo largo es menor a $2^{k+1} + k - 1$.
4. Demuestre que si S es una palabra k -completa tal que no existen palabras k -completas más cortas entonces su largo es $2^k + k - 1$.

Hint: Utilice el grafo que modela el problema para $k - 1$ y la solución anterior.

5. Algo interesante es que podemos construir una de las secuencia buscadas (Note que no es única) empezando con k símbolos 0's y agregando un 1 al final siempre que este agregue una secuencia de Σ^k al conjunto de subpalabras, en caso contrario agregar 0.

Entregue un archivo `MiStringBinario.{py,java,cpp}` que reciba por entrada estándar un natural k e imprima una palabra k -completa de largo mínimo.

EJEMPLOS:

Entrada 1:

2

Salida 1:

00110

Entrada 2:

3

Salida 2:

0001110100

P2.- *Harry* y sus amigos *Hermione*, *Ron*, *Neville*, *Luna*, *Ginny*, *Fred* y *George* quieren derrotar al señor tenebroso mientras duerme. Para lograrlo, deberán llegar a su habitación sin ser descubiertos por los innumerables guardias que lo protegen. Parece una tarea imposible, pero para su fortuna cuentan con la capa de invisibilidad, que les permitirá desplazarse sin ser vistos por los guardias. Para derrotar al señor tenebroso necesitarán el poder de los 8 magos, es decir, todos deben llegar a su habitación. Además, la capa de invisibilidad solo puede ser usada por dos magos al mismo tiempo.

Los miembros del grupo caminan a distinta velocidad, y cuando 2 miembros comparten la capa de invisibilidad, deben caminar a la velocidad del más lento entre los 2.

Dadas sus diferentes velocidad, listamos a continuación el tiempo que le toma a cada uno la caminata entre Hogwarts y la habitación del enemigo.

- *Harry*: 40 minutos
- *Hermione*: 30 minutos
- *Ron*: 40 minutos
- *Neville*: 50 minutos

- *Luna*: 50 minutos
- *Ginny*: 1 hora y 15 minutos
- *Fred*: 2 horas
- *George*: 40 minutos

¿Cuál es la mínima cantidad de tiempo que necesitan para derrotar al señor tenebroso?

Ejemplo: Haremos entrar a Harry, Ron, Hermione y Neville al cuarto del señor tenebroso:

Harry y Hermione usan $T_1 = 40$ minutos de tiempo para llegar al destino. Después Hermione vuelve a *Hogwarts* con la capa de invisibilidad usando $T_2 = 30$ minutos. Luego Ron y Neville usan $T_3 = 50$ minutos para llegar al cuarto. Después Harry vuelve a *Hogwarts* con la capa usando $T_4 = 40$ minutos y vuelve con Hermione usando $T_5 = 40$ minutos. El tiempo total es $T = 200$ minutos. Note que todavía nos faltaría desplazar a los 4 magos restantes.

1. Entregue una forma cualquiera de hacer llegar a todos los magos al cuarto del señor tenebroso.
2. Modele el problema de hacerlo en el menor tiempo posible como uno de distancia mínima en un grafo. Especifique el grafo usado.
3. ¿Cuál es el menor tiempo posible con los tiempos entregados? Describa una secuencia de traslados que permita obtener ese tiempo total.
4. Entregue un archivo `hogwarts.{py,java,cpp}` que al ejecutarlo reciba por entrada estandar 1 entero n la cantidad de magos disponibles (Todos deben llegar al cuarto del señor tenebroso) seguido de n enteros t_i que indica el tiempo que toma el mago número i y entregue en la salida el tiempo mínimo que tomaría a esos magos llegar al cuarto del señor tenebroso.