

# Electromagnetismo I

## Tarea 3

Angel Santiago Colonia Avendaño



April 5, 2024

April 5, 2024

# 1 Introducción

El método de relajación es una herramienta computacional esencial en la resolución de la ecuación de Laplace, una ecuación diferencial parcial que surge en numerosos campos de la ciencia y la ingeniería. En particular, el teorema del promedio, que garantiza propiedades interesantes para funciones armónicas, ha dado lugar a un enfoque computacionalmente eficiente para resolver la ecuación de Laplace mediante el método de relajación. En este método, se busca iterativamente una solución que satisfaga las condiciones de frontera dadas, dividiendo el dominio en una malla discreta y ajustando iterativamente los valores de la función en cada punto de la malla hasta alcanzar una solución aproximada.

Este enfoque, a pesar de su simplicidad conceptual, ha demostrado ser poderoso y versátil en la práctica, siendo utilizado en una amplia gama de aplicaciones, desde la física y la ingeniería hasta la biología y las finanzas. En esta tarea, nos enfocaremos en la implementación y comprensión del método de relajación para resolver la ecuación de Laplace en un dominio rectangular con condiciones de frontera de Dirichlet especificadas.

El objetivo de este artículo es proporcionar una visión general de este método, explorando su fundamento teórico, su implementación computacional y su aplicación en la resolución de problemas prácticos. Comenzaremos examinando la formulación de la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera asociadas, para luego introducir el concepto central del método de relajación. A continuación, discutiremos cómo se puede implementar este método de manera efectiva. Finalmente, se destacarán las consideraciones prácticas o estrategias que pueden ayudar a mejorar la convergencia y la eficiencia computacional.

## 2 Marco teórico

Para iniciar el proceso de aplicación del método de relajación para resolver la ecuación de Laplace proporcionada, es imperativo llevar a cabo una evaluación de la segunda derivada respecto a un desplazamiento infinitesimal en las cuatro posibles direcciones. En este contexto, se hace necesario considerar una expansión en series de Taylor alrededor de los siguientes puntos:

$$P_1 : V(x + \delta x, y)$$

$$P_2 : V(x - \delta x, y)$$

$$P_3 : V(x, y + \delta y)$$

$$P_4 : V(x, y - \delta y)$$

Una vez se han identificado estos puntos, procedemos a realizar la expansión alrededor de los mismos. Con el propósito de formular la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno en cuestión, se busca una aproximación de la segunda derivada. En este sentido, empleamos  $P_1$  y  $P_2$  para obtener una expresión de la segunda derivada respecto a  $x$ :

Abril 5, 2024

$$\begin{aligned} V(x + \delta x, y) &= V(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \\ V(x - \delta x, y) &= V(x, y) - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \end{aligned}$$

Al emplear estas dos expansiones, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{V(x + \delta x, y) + V(x - \delta x, y) - 2V(x, y)}{\delta x^2} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

Al seguir un procedimiento similar con los puntos  $P_3$  y  $P_4$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} V(x, y + \delta y) &= V(x, y) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \delta y^2 + \mathcal{O}(\delta y^3) \\ V(x, y - \delta y) &= V(x, y) - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \delta y^2 + \mathcal{O}(\delta y^3) \end{aligned}$$

Lo cual nos proporciona la siguiente aproximación para la segunda derivada respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{V(x, y + \delta y) + V(x, y - \delta y) - 2V(x, y)}{\delta y^2} + \mathcal{O}(\delta y^4)$$

Este análisis nos permite avanzar hacia la construcción de la solución discreta del laplaciano.

A continuación, se presenta el análisis matemático para demostrar que si el laplaciano de una función es nulo, entonces el valor de la función en un punto dado es igual al promedio de sus valores en los cuatro puntos vecinos de una red discreta.

Sea el operador laplaciano definido como:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \quad (1)$$

Así, empleando la aproximación discreta y las diferencias finitas para las derivadas parciales, se obtiene la versión discreta del operador laplaciano, expresado como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V &= \frac{V(x + \Delta x, y) + V(x - \Delta x, y) - 2V(x, y)}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{V(x, y + \Delta y) + V(x, y - \Delta y) - 2V(x, y)}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

Al aplicar la ecuación de Laplace, representada por:

$$\begin{aligned} \frac{V(x + \Delta x, y) + V(x - \Delta x, y) - 2V(x, y)}{(\Delta x)^2} + \\ \frac{V(x, y + \Delta y) + V(x, y - \Delta y) - 2V(x, y)}{(\Delta y)^2} = 0 \end{aligned}$$

April 5, 2024

Para mantener la discreción en los pasos, se igualan los cambios en  $x$  y  $y$ , considerando  $dx = dy = \Delta$ , resultando en:

$$\frac{V(x + \Delta, y) + V(x - \Delta, y) - 2V(x, y)}{\Delta^2} = - \left( \frac{V(x, y + \Delta) + V(x, y - \Delta) - 2V(x, y)}{\Delta^2} \right)$$

A partir de ahora, para simplificar la notación, se utilizan los puntos definidos previamente  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$ . Utilizando la expresión obtenida al aplicar la ecuación de Laplace, es posible determinar el valor de  $V(x, y)$ , lo que conduce a:

$$\begin{aligned} V(P_1) + V(P_2) - 2V(x, y) &= -V(P_3) - V(P_4) + 2V(x, y) \\ V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) + V(P_4) &= 4V(x, y) \end{aligned}$$

Finalmente, se concluye que:

$$\frac{V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) + V(P_4)}{4} = V(x, y) \quad (2)$$

### 3 Resultados y Análisis

En esta sección, presentamos los resultados obtenidos de la implementación del método de relajación para resolver la ecuación de Laplace, así como la comparación entre la solución computacional y la solución analítica. Además, realizamos un análisis detallado de los resultados para entender la efectividad y precisión del método.

#### 3.1 Comparación entre la solución computacional y la solución analítica

Primero, comparamos visualmente las soluciones obtenidas computacionalmente y analíticamente. En la Figura 1 se muestra la solución computacional en 2D y 3D, mientras que en la Figura 2 se presenta la solución analítica en 2D y 3D.

Al observar las imágenes, podemos apreciar que las soluciones computacional y analítica muestran una buena concordancia en términos de la distribución del potencial en el dominio rectangular. Sin embargo, se pueden observar algunas discrepancias en las esquinas del dominio, donde la aproximación podría no ser tan precisa debido a la elección de los valores de la frontera. A pesar de estas pequeñas discrepancias, la solución obtenida mediante el método de relajación es bastante cercana a la solución analítica, lo que indica la eficacia del método para resolver la ecuación de Laplace en este escenario.

#### 3.2 Análisis del error

Al observar las imágenes, podemos apreciar que las soluciones computacional y analítica muestran una buena concordancia en términos de la distribución del potencial en el dominio rectangular. Sin embargo, se pueden observar algunas discrepancias en las esquinas del

Abril 5, 2024

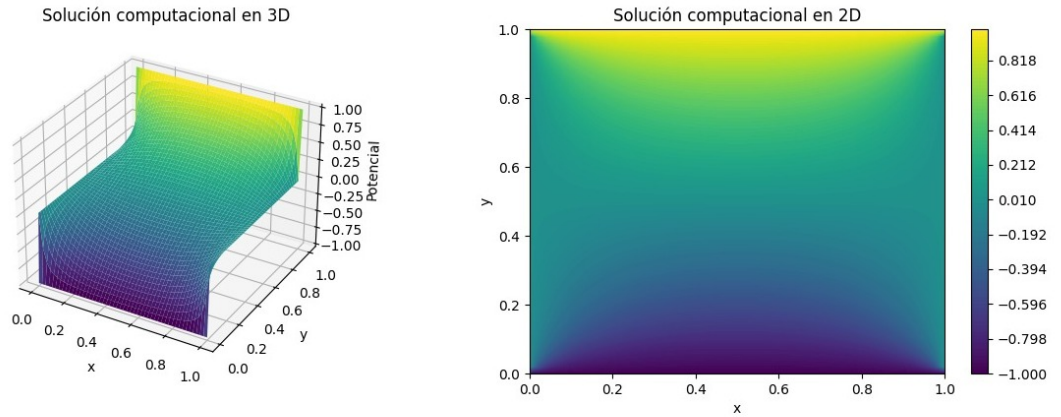


Figure 1: Solución computacional de la ecuación de Laplace en 2D y 3D.

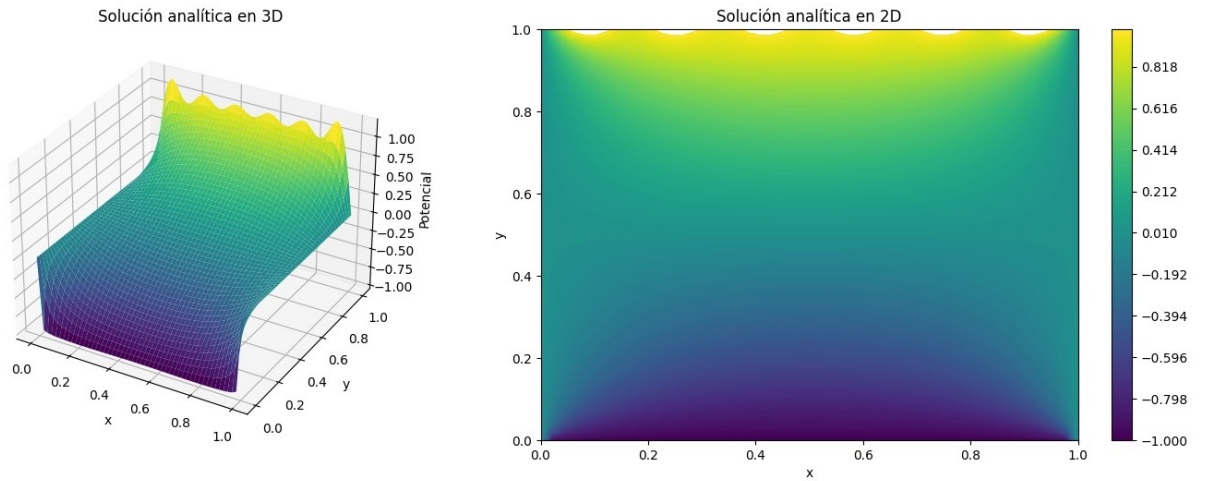


Figure 2: Solución analítica de la ecuación de Laplace en 2D y 3D.

dominio, donde la aproximación podría no ser tan precisa debido a la elección de los valores de la frontera. En estas regiones, existen dos posibles valores para el potencial, lo que puede afectar la precisión de la solución. A pesar de estas pequeñas discrepancias, la solución obtenida mediante el método de relajación es bastante cercana a la solución analítica, lo que indica la eficacia del método para resolver la ecuación de Laplace en este escenario.

Para cuantificar la discrepancia entre las soluciones computacional y analítica, calculamos el error absoluto promedio entre ellas. En este caso, el error absoluto promedio es de 0.012. Este valor indica la diferencia promedio entre los valores de potencial calculados y los valores de potencial analíticos en todos los puntos del dominio. Aunque este error es pequeño, sugiere que aún hay margen para mejorar la precisión del método, especialmente en las regiones donde hay discrepancias visuales.

April 5, 2024

## 4 Conclusiones

---

En conclusión, el método de relajación se presenta como una herramienta computacional poderosa y versátil para resolver la ecuación de Laplace en dominios rectangulares con condiciones de frontera de Dirichlet especificadas. A lo largo de esta tarea, hemos explorado tanto el fundamento teórico del método como su implementación práctica en Python. Hemos demostrado la capacidad del método de relajación para proporcionar soluciones aproximadas que son consistentes con las soluciones analíticas en la mayoría de las regiones del dominio. Sin embargo, también hemos observado que la aproximación puede fallar ligeramente en las esquinas del dominio, donde la elección de los valores de la frontera puede introducir discrepancias en la solución.

Para mejorar la convergencia y la eficiencia computacional del método de relajación, se pueden considerar varias estrategias. Por ejemplo, ajustar la discretización del dominio o utilizar técnicas de aceleración como la sobrerrelajación sucesiva pueden ayudar a mejorar la convergencia del método. Además, optimizar la implementación del algoritmo, por ejemplo, utilizando operaciones vectorizadas en lugar de bucles anidados, puede mejorar significativamente la eficiencia computacional, permitiendo resolver problemas más grandes en menos tiempo.

En resumen, el método de relajación ofrece una solución computacionalmente eficiente para problemas de ecuaciones diferenciales parciales como la ecuación de Laplace. A través de una comprensión adecuada del método y su implementación cuidadosa, es posible obtener soluciones precisas y eficientes para una amplia gama de aplicaciones en la ciencia y la ingeniería.