

Giroscopio

Mauricio Garcia, Angel Colonia, Nicolas Rojas, Andres Bayesteros y Alejandro Borda.
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 23 de mayo de 2023)

En este documento se busca explorar teórica, experimental y computacionalmente algunas de las propiedades fundamentales de un giroscopio, esto se logra por medio de un montaje original llevado a cabo, la teoría del giroscopio con su formalismo físico y matemático asociado y una simulación computacional de esta teoría. En particular se exploran en detalle el proceso y creación del diseño original de un giroscopio de tal forma que sea replicable por el lector.

I. INTRODUCCIÓN

Un giroscopio es un dispositivo utilizado para mantener la orientación y la velocidad angular, pero estas dos propiedades se aplican también a cualquier objeto en rotación. Las propiedades giroscópicas se dividen en dos: la rigidez en el espacio y la precesión. La rigidez en el espacio describe cómo un giroscopio se mantiene en una posición fija en el plano sobre el que rota, sin ser afectado por la rotación de la Tierra. Aunque este comportamiento parece sorprendente en el contexto del marco de referencia de la Tierra, que no es inercial, se trata de esta manera en muchos casos.

La precesión es una consecuencia de un cambio en la dirección del vector de momento angular y se compone de pequeñas rotaciones del eje de rotación. Por ejemplo, cuando se aplica suficiente fuerza a un trompo para mantenerlo en posición vertical, la lenta rotación que realiza en círculos sobre la superficie es su precesión, mientras que su tambaleo a medida que pierde velocidad angular es su nutación. Este cambio en el vector de momento angular se debe comúnmente a tener un tensor de inercia no diagonal, debido a que la masa del cuerpo no está distribuida uniformemente, sin embargo no es la única causa.

Para un mejor entendimiento de este fenómeno vale la pena estudiar un ejemplo que será relevante para el formalismo desarrollado más adelante, considere un trompo bajo las condiciones que se ven en la figura 1. En esta situación el único Torque que actúa sobre el objeto es el inducido por la gravedad $\tau_z = r \times F_z = mgr \sin(\phi) \hat{\phi}$ (donde ϕ es el ángulo en coordenadas cilíndricas), debido a que este torque es perpendicular al vector de momento angular $\vec{L} = I\omega$, que inicialmente se encuentra en la dirección de la velocidad angular, causa una precesión con respecto al eje z con una velocidad angular dada por $\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mgr}{I\omega}$. Con base en este resultado podemos notar que a medida que el trompo gira a mayor rapidez angular, la precesión es más lenta debido a que estas dos cantidades son inversamente proporcionales y encontramos que los resultados analíticos encontrados confirman la experiencia y nuestra intuición con respecto al comportamiento de un trompo.

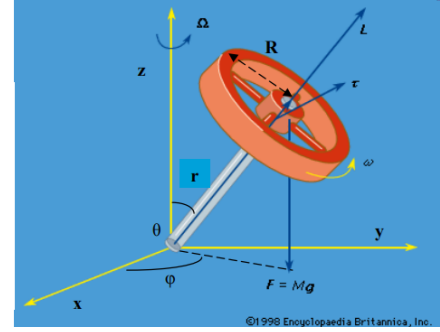


Figura 1. Esquema del modelo a resolver analíticamente.

A. Ecuaciones de movimiento y formalismo lagrangiano

En el análisis de un giroscopio, es necesario considerar un modelo generalizado que pueda ser resuelto analíticamente. Un ejemplo comúnmente utilizado es un trompo axisimétrico, que se puede aproximar a un disco uniforme que gira alrededor de una vara sin masa para simplificar su geometría. La figura 1 muestra un esquema del modelo.

Para obtener la energía cinética del sistema, se utilizan los ángulos de Euler tradicionales y se asume que el sistema no tiene energía cinética translacional, además al ser un trompo axisimétrico, tenemos que el momento de inercia en sus ejes x , y son iguales. De esta manera, la energía cinética del sistema se puede expresar como:

$$T = \frac{1}{2}I_t(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}I_a\omega_z^2 \quad (1)$$

En donde I_a representa el momento de inercia alrededor del eje de rotación, mientras que I_t es el momento de inercia perpendicular a este. Por otro lado, la velocidad angular en el eje z se puede relacionar como $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)$. Utilizando esta relación y la energía potencial gravitacional del sistema $MgR\cos(\theta)$, el lagrangiano del sistema se puede expresar como (ψ es el ángulo de rotación del disco):

$$L = \frac{1}{2}I_t(\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_a(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))^2 - MgR \cos(\theta) \quad (2)$$

donde $MgR \cos(\theta)$ es la energía potencial gravitacional del sistema que a su vez es la energía potencial total. Con base en este lagrangiano podemos notar que el momento se conserva en las coordenadas ψ y ϕ . En relación con el lagrangiano encontrado podemos encontrar los momentos y velocidades del sistema por las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para estos tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi = I_a(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) \quad (3)$$

y por la ecuación de Euler-Lagrange para una coordenada con momento conservado tenemos que $I_a \ddot{\psi} = 2\dot{\phi} \sin(\theta) \dot{\theta}$. Ahora para ϕ tenemos que su momento generalizado es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi = I_t \dot{\phi} \sin^2(\theta) + I_a(\dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\phi} \cos^2(\theta)) \quad (4)$$

con su ecuación dada por Euler-Lagrange con momento conservado

$$I_t(\ddot{\phi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)) - p_\psi \dot{\theta} \sin(\theta) = 0 \quad (5)$$

Ahora en cuanto a la ecuación de Euler-Lagrange para θ donde no tenemos conservación de momento obtenemos la siguiente expresión

$$I_t \ddot{\theta} = I_t \dot{\phi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - mgR \sin(\theta) + p_\psi \dot{\phi} \sin(\theta) \quad (6)$$

Suponiendo que el sistema tiene una precesión estable con respecto al ángulo θ , es decir $\dot{\theta} = 0$ podemos obtener la primera, pero si la precesión es estable es necesario que el disco este girando suficientemente rápido para que se estabilice similarmente a como un trompo necesita tener suficiente velocidad (o momento) para mantenerse en su eje de rotación con lo cual podemos suponer $p_\psi \gg 4I_t mgR \cos(\theta)$ y la velocidad es

$$\dot{\phi} \approx -\frac{mgR}{p_\psi} \quad (7)$$

B. Consideraciones experimentales

En la sección anterior se ha desarrollado un formalismo matemático para un modelo generalizado de un giroscopio, sin embargo, es importante tener en cuenta que los giroscopios pueden tomar diferentes formas y presentar distintos momentos de inercia, torques y simetrías. Por lo tanto, es necesario determinar qué modelos están cubiertos por nuestro formalismo.

Una de las principales asunciones del modelo desarrollado es que la precesión del sistema es estable y que no hay fuerzas no conservativas de fricción. Si bien es razonable suponer que la precesión de un trompo que gira a una gran velocidad es estable debido a la relación encontrada en la ecuación $\omega_p = \frac{mgr}{I\omega}$ de la introducción, donde la velocidad angular de precesión es inversamente proporcional a la velocidad angular del trompo y esta relación se incrementa para su segunda derivada pero, es importante tener en cuenta que una mayor velocidad angular también implica una mayor fricción que depende de la superficie. Además, dado que una vez el trompo esta en movimiento su único torque es el causado por la gravedad, siempre y cuando se consideren instancias de tiempo donde el cambio en el ángulo θ no es considerable, el torque se podría considerar constante dando una precesión estable.

A pesar de las limitaciones de nuestro modelo, si consideramos nuevamente un trompo en una superficie de baja fricción con una gran velocidad angular y en un rango de tiempo corto de tal forma que la pérdida de energía no sea significativa y el cambio en la precesión sea muy baja, podríamos considerar nuestro modelo como una muy buena aproximación a un giroscopio real.

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

En la presente sección se presentará el proceso de diseño y construcción del giroscopio realizado por el grupo, además del montaje experimental para la toma de datos de la velocidad de giro del disco y la elaboración de vídeos que permiten evaluar cuantitativa y cualitativamente el comportamiento que predice la teoría.

En esta primera etapa del diseño, se tomaron en cuenta las consideraciones dispuestas en el modelo teórico, para este caso que no hubiese fuerzas no conservativas de fricción y que la precesión del sistema pueda ser estable, con el fin de empezar la construcción del mismo. Con estas dos condiciones en mente, se diseñó una base, en principio circular, con un pequeño eje debajo que se pudiese anclar a un rodamiento con el fin de que este permitiera a todo el modelo rotar en la dirección θ con la menor fricción posible.

Similarmente, para mantener la precesión del sistema estable se diseñó un soporte pórtico al cual se anclan dos piezas de madera con rieles, cuya función es actuar como un péndulo que soporte al motor y permita modificar el punto de apoyo para cambiar el torque que siente el sistema. Conjunto con este péndulo, se decidió fijar la posición de este al pórtico por medio de dos chumaceras ovaladas que permitan al sistema precesar

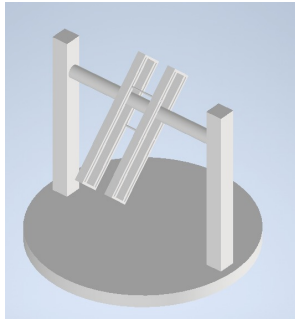


Figura 2. Prediseño realizado por el grupo.

de manera estable y que reduzcan la fricción al realizar este movimiento.

Como se puede observar en las figuras 2, 3, la etapa de prediseño con un prototipo virtual, posteriormente un montaje inicial a base de madera MDF y finalmente un montaje final donde se acopla al disco al montaje inicial. El diseño final se compone de:

- Chumacera SKF UCF 205
- Base cuadrada de madera (21 cm de lado y espesor 2cm)
- Columnas (diámetro 25mm)
- Carriles péndulo (diseño propio manufacturado con corte láser).
- Chumacera con rodamiento de 8mm.
- Eje de 8mm (se realiza un hombro para fijar el montaje en dirección axial y disminuir rozamiento con los carriles).
- Soporte motor (diseño propio manufacturado con corte láser) y Soporte trasero (diseño propio manufacturado con corte láser).
- Motor (DC 12 V a 10.000 RPM)
- PWM (15 A, 90V)
- Columnas (diámetro 25mm)
- Pilas recargables (3 pilas conectadas en serie de 4 V con regulador de carga).
- Cables y Goma (borrador comercial).
- Tornillos métrico de 4mm, 115mm longitud rosca fina y Tornillo para madera de 4mm y longitud e 15mm.
- Soporte goma (diseño propio manufacturado con corte láser).
- Disco 140 mm de diámetros

Aquellas piezas no comerciales, diseñadas por el grupo tienen su respectivo plano disponible como anexo en la parte final del documento. Posterior a la construcción del montaje se realizó la medición de la velocidad angular de giro del disco utilizando un tacómetro de láser con una cinta reflectiva, que nos permitía conocer el momento angular del disco acoplado al motor. Tal como se ilustra en 3. Es necesario mencionar efectos como la fricción entre las bolas del rodamiento SKF y vibraciones inducidas por el giro del motor a altas velocidades son fuentes de pérdidas de energía e irreversibilidades asociadas a una operación real del diseño. Estas son las principales fuentes de error al comparar un análisis teórico con el comportamiento dinámico observado.

En el diseño final del montaje experimental que se puede ver en las figuras 3 y 4, tenemos el montaje el cual consta de una base libre de rotar en el plano soportada por una chumacera y de la base salen dos columnas de madera que sostienen el péndulo y se conectan a este por medio de un eje que le permite rotar. En el péndulo tenemos el disco conectado a un motor DC de 12V a 24V el cual tiene una velocidad máxima de 10000rpm y se conecta al montaje electrónica de la figura 4 que consta de una batería formada por 3 pilas en serie con un total de 12V y que se conectan a un PWM de 15A y 12V el cual nos permite regular la velocidad del motor y naturalmente se conecta directamente a este. Alternativamente, otra posibilidad de replicar el montaje es remover las baterías y conectar una fuente de voltaje apropiada directamente al PWM.

Para llevar a cabo la toma de datos se situó el eje del péndulo de tal forma que se encuentre alrededor del centro de masa del péndulo, se conectan los componentes electrónicos y con el PWM se enciende el motor y se prueban diferentes velocidades para encontrar la que presente un mejor comportamiento giroscópico. En nuestro caso específico, al llevar el motor a sus velocidades mas altas la vibración del sistema es muy alta y se pierde parcialmente el comportamiento buscado. Una vez encontrada la velocidad deseada se utiliza una lampara estroboscópica, se pega una cinta reflejante en el disco y se mide la velocidad de rotación de este.

III. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El giroscopio llevado a cabo en el montaje experimental presenta las diferentes propiedades que se esperaría encontrar en un giroscopio, estas son: Resistencia a cambiar su orientación, nutación y precesión. En particular estas propiedades para el montaje mencionado se pudieron evidenciar con bastante claridad cuando el motor

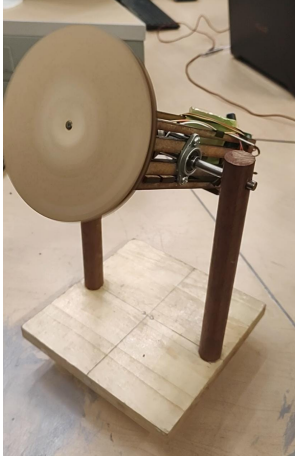


Figura 3. Estructura mecánica del montaje realizado. En este se puede ver el disco que es rotado por un motor que se sitúa en el péndulo conectado a las dos columnas por medio de un eje que lo permite rotar, los cuales conectan el péndulo del sistema a la base que se encuentra encima de una chumacera.

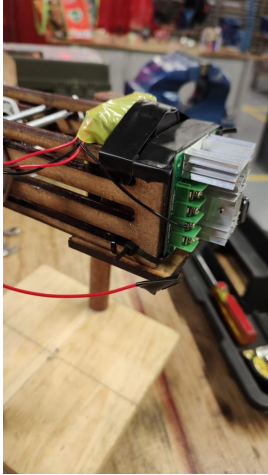


Figura 4. Estructura electrónica del sistema. Se puede evidenciar el PWM, conectado por medio de unos cables a la batería del sistema la cual se conecta directamente al motor.

tenía una velocidad angular de alrededor de 2900 revoluciones por minuto, pues al utilizar velocidades mas cercanas al máximo que proporciona el motor, el sistema presenta grandes vibraciones que perjudican la visualización de estas propiedades giroscópicas. Además, no fue posible realizar medidas de velocidad de precesión y nutación pues el comportamiento del montaje presenta cambios repentinos y grandes de velocidades angular diferentes a las del disco con lo cual una medición de velocidad angular de la base o del péndulo no sería de gran valor.

A. Nutación

Como todo giroscopio, debido al momento angular que le otorga la rotación del disco al sistema, este resiste cualquier tipo de cambio de orientación que se intente inducir, por ejemplo si se intenta golpear el péndulo que mantiene el motor, de tal forma que este busque oscilar como un péndulo y sacarlo su posición de reposo, este se mueve como una consecuencia del golpe pero una vez este termina, se estabiliza por la rotación del disco y debido al torque causado por el peso del péndulo este lentamente vuelve a su posición de reposo formando una nutación. De ser un péndulo normal, una vez se golpea y se saca de su reposo este oscilaría, sin embargo al tener un disco girando a gran velocidad el momento angular inicial (a diferencia del péndulo) no es nulo y por esto se estabiliza rápidamente una vez no hay torque por el golpe y el torque del peso lentamente cambia el momento angular ($\tau = \frac{dL}{dt}$) hasta volver a su dirección inicial previa al golpe donde no hay torque por la gravedad de manera que el péndulo presenta nutación hasta volver a su posición de reposo.

Recordando el caso del trompo axisimetrico, en este la nutación también era una consecuencia del torque inducido por la gravedad cuando un ángulo (en este caso el del eje z) no es nulo, sin embargo en el caso del péndulo esta nutación presenta una cualidad oscilatoria que no podemos notar en el montaje experimental. Esto se puede atribuir al hecho de que el sistema esta conformado por muchas piezas que no están unidas perfectamente de tal forma que las partes que componen el péndulo presentan una fricción considerable y no permite que el ángulo de nutación sea oscilatoria, es posible que de no tener esta fricción cuando el péndulo se devuelve a su posición de reposo, este recorre un ángulo mayor al necesario para devolverse y luego la gravedad presenta un torque en la dirección contraria y se repitiera el proceso de tal forma que la nutación sería periódica.

B. Precesión

En particular para este montaje se puede evidenciar la precesión cuando el péndulo que contiene el motor no se encuentra en reposo y su movimiento induce una rotación de la base del montaje que resulta en que todo el sistema precese respecto a la rotación de la base. Por ejemplo, si el motor se enciende con el péndulo fuera de su posición de reposo, como una consecuencia del torque causado por el peso, este va a buscar alinearse de tal forma que no haya torque por su peso, pero este movimiento del péndulo genera un torque sobre la base del sistema que la fuerza a precesar. Si el disco no estuviera girando y el único momento angular fuera dado por la caída del péndulo, simplemente

veríamos al motor y su soporte comportarse como un péndulo y la base no rotaría, sin embargo debido al gran momento angular del disco, el torque causado por el peso resulta rotando la base del sistema pues el cambio del momento angular (torque) resulta en que ahora se tenga momento angular en el plano x - y hasta que el giroscopio este en una posición estable, de tal forma notamos que la base gira hasta que el giroscopio llegue a dicha posición de reposo. La situación cuando se mueve externamente la base del montaje y se nota oscilar el giroscopio es sencillamente el efecto opuesto al explicado.

Sin embargo, en ausencia de fuerzas externas, no notamos una precesión del sistema y esto se le puede atribuir a dos principales causas. La primera es la fricción del sistema que al estar compuesto de tantas diferentes partes que en muchos casos no se encuentran pegadas de tal forma que la fricción es mínima como lo podría ser una soldadura o métodos más refinados de formar el montaje, el sistema dota de considerable fricción que previene la precesión y en general el movimiento del sistema. Además, a diferencia de un giroscopio tradicional en donde se esperaría ver precesión constante, este montaje tiene un torque constante sobre el que no es causado por la gravedad y es causado por el motor que constantemente se encuentra encendido, esto diferencia nuestro montaje de un giroscopio tradicional dado que como en el trompo axisimétrico, el único torque que actúa sobre el sistema una vez está rotando es la gravedad.

C. Resistencia al cambio de orientación

Los dos ejemplos pasados de nutación y precesión, son ejemplos de como el giroscopio resiste un cambio en su orientación, esto se debe principalmente a dos razones: El momento de inercia del sistema, que al estar compuesto de varias partes y tener un peso y longitud considerables hace que este momento sea relativamente grande y el gran momento angular del sistema generado por la alta velocidad del motor atado al péndulo. Estos dos factores, hacen que las propiedades giroscópicas del sistema se puedan evidenciar fuertemente y en algunos casos es tan drástico que la corrección del giroscopio al ser alterado por fuerzas exteriores es drástico y repentino con lo cual el montaje se puede notar dando "tirones repentinos" con respecto a las manipulaciones externas sobre el sistema.

IV. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

Además del montaje experimental se desarrollo una simulación computacional general del giroscopio que da-

do vectores (x, y, z) para la velocidad angular inicial y el torque que es aplicado de manera constante a lo largo de la simulación, genera una visualización de la rotación del giroscopio, una gráfica de la precesión de este en tiempo real y otras 3 gráficas en que se desarrollan en tiempo real para las velocidades angulares en x y en y a la vez que el torque total en el sistema. Para ver el código y probarlo con diferentes valores, se puede encontrar en el archivo adjunto a este documento, también se encuentran ejemplos de resultados de estas simulaciones en la presentación correspondiente a este documento. En este se encuentran resultados muy similares a los que se espera del trompo axisimétrico en particular a la trayectoria de precesión que presenta y como difieren los vectores de momento angular y velocidad angular en cuanto a su dirección.

V. CONCLUSIONES

En base al desarrollo teórico del giroscopio, el montaje experimental y los resultados obtenidos para el comportamiento de este montaje particular podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- Se lograron evidenciar las propiedades generales de un giroscopio para un montaje experimental particular y original de este, que fue llevado a cabo desde cero tanto a nivel de diseño como a nivel de manufactura y montaje.
- Además, en muchos casos para observar las propiedades ya presentadas se tiene que inducir fuerzas externas debido a la estabilidad del giroscopio, la presencia de fricción en el sistema y el torque constante del disco que lo estabiliza.
- La teoría y la simulación computacional concuerdan en general con el montaje con respecto a la teoría, pero difieren en su manifestación debido a la gran variedad de formas que puede tomar un giroscopio.
- Consideramos que a pesar de que el diseño tengo fallas como la alta vibración a grandes velocidades y una considerable fricción, se llevo a cabo un gran proceso de montaje debido a que es un diseño original y con un único intento se logro montar un giroscopio que presenta de manera clara muchas de sus propiedades fundamentales que concuerdan con gran parte del análisis teórico y computacional.

ANEXOS

En el siguiente link de GitHub se puede encontrar el código de la simulación computacional y los planos usados para el desarrollo del montaje.
<https://github.com/pourlebatteur/Giroscopio>

REFERENCIAS

P. Gutierrez, "Physics 5153 Classical Mechanics Gyroscopic Systems", noviembre 2003, University of Oklahoma.

Svilen Kostov y Daniel Hammer, ^{.A} Lab for Exploring the Precession and Nutation of a Gyroscope", Dept. of Geology and Physics, Georgia Southwestern State University.

Timon Idema, "5.9: Precession and Nutation", Physics LibreTexts, Delft University of Technology.