Introducción a la Computación Cuántica

Quantum Monty Hall Proyect

Angel Santiago Colonia Avendaño
202115154

ISIS 4227

July 24, 2024

1 Implementación del Problema de Monty Hall

Para ver la implementación completa del problema de Monty Hall utilizando Qiskit, por favor visite el siguiente repositorio en GitHub. Hay una sección de código en pennyLane pero no todo el código como sí lo está en Qiskit, aún sigo aprendiendo PennyLane:

Repositorio en GitHub

Presentación del Problema: Monty Hall

El problema de Monty Hall es un clásico dilema de teoría de probabilidades que toma su nombre de Monty Hall, el presentador del programa de concursos "Let's Make a Deal", que se emitió por primera vez en 1963. En este programa, a un concursante se le presentan tres puertas: puerta 1, puerta 2 y puerta 3. Detrás de una de estas puertas hay un coche nuevo, mientras que detrás de las otras dos puertas hay cabras.

El concursante selecciona inicialmente una de las tres puertas, con la esperanza de elegir la que oculta el coche. Posteriormente, el presentador, que sabe qué hay detrás de cada puerta, abre una de las dos puertas restantes, revelando una cabra. En ese momento, el concursante tiene la opción de mantener su elección original o cambiar a la otra puerta cerrada.

La cuestión esencial es: ¿Cuál es la mejor estrategia para maximizar las probabilidades de ganar el coche? Intuitivamente, muchos pensarían que después de abrir una puerta con una cabra, las probabilidades serían de 50/50 entre las dos puertas restantes. Sin embargo, la solución matemática revela algo sorprendente.

En 1990, Marilyn vos Savant, abordó este problema en su columna "Ask Marilyn". Ella argumentó que cambiar de puerta aumenta las probabilidades de ganar de 1/3 a 2/3. Este resultado contrintuitivo provocó una intensa discusión y controversia, ya que desafía la intuición básica.

Consideraciones

La solución referenciada en este problema, presentada por la página Medium, proporcionó un gran impulso para encontrar una forma alternativa de abordar este desafío. En este proyecto se intentará redefinir el problema, considerando el estado $|0\rangle$ como el estado benefactor y el estado $|1\rangle$ como el estado de pérdida. Por lo tanto, se buscará construir un nuevo circuito con igual probabilidad de ocurrencia para los estados $|011\rangle$, $|101\rangle$ y $|110\rangle$. A partir de esta redefinición, será necesario ajustar la forma en que se maneja la apertura de la puerta y la decisión final de cambio/no cambio del concursante.

Las metas de este proyecto son generar el código en Qiskit 1.0 y PennyLane para el nuevo modelo, además de detallar lo más posible el desarrollo del código y la lógica detrás de las decisiones tomadas.

Explicación en Términos de Probabilidad

Para entender por qué cambiar de puerta es la mejor opción, debemos analizar las probabilidades desde el principio:

1. Inicialmente, hay una probabilidad de 1/3 de que el coche esté detrás de la puerta elegida por el concursante y una probabilidad de 2/3 de que esté detrás de una de las otras dos puertas.

2. Monty, que sabe dónde está el coche, siempre abrirá una puerta con una cabra, no afectando la probabilidad inicial de 1/3 para la puerta elegida y 2/3 para las dos restantes.

3. Cuando Monty abre una puerta con una cabra, la probabilidad de que el coche esté detrás de la puerta elegida por el concursante sigue siendo 1/3. Sin embargo, la probabilidad de que esté detrás de la otra puerta cerrada ahora es de 2/3, porque la apertura de una puerta con cabra no cambia la probabilidad inicial asignada a las puertas.

Consideremos los siguientes casos:

1. El concursante elige inicialmente la puerta con el coche (probabilidad 1/3): - Monty abrirá una de las dos puertas con cabras. - Si el concursante cambia de puerta, perderá, ya que el coche está detrás de su elección inicial.

2. El concursante elige inicialmente una puerta con una cabra (probabilidad 2/3): - Monty abrirá la otra puerta con una cabra. - Si el concursante cambia de puerta, ganará, ya que el coche está detrás de la puerta que no eligió inicialmente.

Por lo tanto, cambiar de puerta proporciona una probabilidad de ganar del 2/3, mientras que mantener la elección original solo ofrece una probabilidad del 1/3.

Preparación del Estado Cuántico

El objetivo es representar las puertas del problema Monty Hall utilizando tres qubits, de manera que uno de estos qubits esté en el estado $|0\rangle$ mientras que los otros dos estén en el estado $|1\rangle$, con todas las posibles configuraciones teniendo igual probabilidad. El estado deseado se puede escribir como:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$$

Para lograr esta superposición, utilizamos una serie de puertas cuánticas. Primero, aplicamos una puerta R_y al segundo qubits. La puerta R_y realiza una rotación alrededor del eje y en la esfera de Bloch. La acción de esta puerta sobre el estado $|0\rangle$ es:

$$R_y(\theta)|0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Queremos que la amplitud del estado $|0\rangle$ sea $\frac{1}{\sqrt{3}}$, lo que representaría una amplitud real de $(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{3}$, por lo que necesitamos encontrar el ángulo θ tal que:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Resolviendo para θ:

$$\frac{\theta}{2} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\theta = 2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Aplicamos esta rotación al segundo qubit. Luego, usamos una serie de puertas H ,X, CH (controlado-Hadamard), y CCX (Toffoli) que cambiaron a esos nombres según la nueva documentación de qiskit 1.0 (**ibm__quantum__migration__guides**). Las compuertas añadidas ayudarán a distribuir esta amplitud a los otros qubits, asegurando que solo uno de los tres qubits esté en el estado $|0\rangle$ en cualquier configuración y que todas las configuraciones tengan igual probabilidad.

2 Estrategia para crear tres estados equiprobables

Queremos en luego en la implementación alguna función se encargue de preparar un circuito cuántico en una superposición específica de estados, donde la probabilidad de medir cada uno de los estados $|011\rangle$, $|101\rangle$ y $|110\rangle$ es igual a $1/3$. A continuación, se detalla el desarrollo lógico y matemático para lograr este objetivo.

2.1 Inicialización

Definimos el registro cuántico y el ángulo de rotación necesario para la compuerta R_y:

$$q = \text{QuantumRegister}(3) \tag{1}$$

$$\text{rot} = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{2}$$

Aquí, q se refiere al registro cuántico que contiene los tres qubits. El valor de rot es el ángulo de rotación para la compuerta R_y.

Primera Rotación R_y

Aplicamos una rotación R_y en el segundo qubit:

$$\text{circuit.ry}(rot, q[2]) \tag{3}$$

Esta rotación transforma el estado $|0\rangle$ en una superposición dada por:

$$\text{RY}(\text{rot})|0\rangle = \cos\left(\frac{\text{rot}}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\text{rot}}{2}\right)|1\rangle$$

Sustituyendo rot:

$$\text{RY}\left(2 \times \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$$

2.2 Compuerta CH

Aplicamos una compuerta CH (Hadamard condicional) sobre el tercer qubit, dependiendo del estado del segundo qubit:

$$\text{circuit.ch}(q[1], q[2]) \tag{4}$$

La compuerta CH aplica una compuerta Hadamard condicionalmente en q[2] si q[1] está en el estado |1 . El estado de q[2] después de esta operación depende del estado de q[1]. De esta manera, el estado de $q[2]$ después de esta operación es:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle))$$

Simplificando:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle$$

Teniendo en cuenta que es un sistema de 3-qubits y que el primero no lo hemos usado aún, llegamos a:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|000\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|010\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|110\rangle$$

2.3 Compuertas $SWAP$ y X

Aplicamos una compuerta $SWAP$ y compuertas X (NOT):

$$\text{circuit.swap}(q[0], q[2]) \tag{5}$$

$$\text{circuit.x}(q[0]) \tag{6}$$

$$\text{circuit.x}(q[1]) \tag{7}$$

$$\text{circuit.x}(q[2]) \tag{8}$$

Después de aplicar la compuerta SWAP entre q_0 y q_2, el estado resultante es:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|000\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|010\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|011\rangle$$

Aplicando luego las compuertas NOT, llegamos a :

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|111\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|101\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|100\rangle$$

2.4 Compuerta CCX (Toffoli)

Aplicamos una compuerta Toffoli (CCX):

$$\text{circuit.ccx}(q[0], q[1], q[2]) \tag{9}$$

Esto asegura que el tercer qubit $q[2]$ se convierte en $|1\rangle$ si $q[0]$ y $q[1]$ están en $|1\rangle$:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|111\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|101\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|100\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}|011\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|101\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|100\rangle$$

2.5 Segunda Compuerta CX

Aplicamos una compuerta CX al segundo qubit:

$$\text{circuit.cx}(q[0], q[1]) \tag{10}$$

Esto cambia el estado de $q[1]$ a:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|001\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|111\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|100\rangle$$

2.6 Tercera Compuerta X

Aplicamos una compuerta X al tercer qubit:

$$\text{circuit.x}(q[1]) \tag{11}$$

Esto resulta en:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}|011\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|101\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|110\rangle$$

2.7 Conclusión

El circuito cuántico propuesto genera los estados $|100\rangle$, $|010\rangle$ y $|001\rangle$ con igual probabilidad, distribuyendo la amplitud de probabilidad entre ellos equitativamente.

De esta manera llegamos a la siguiente configuración de estados:

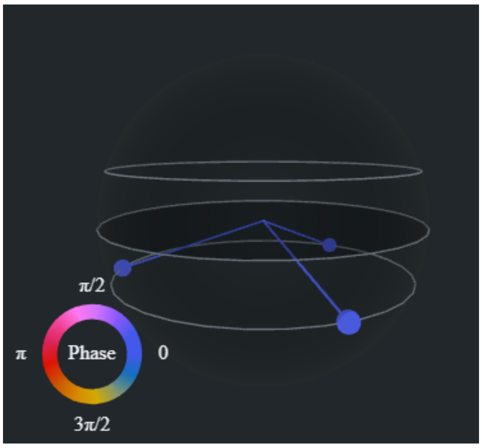

Figure 1: Esfera de Bloch de 3 estados equiprobables representando posibles estados de elección en Monty Hall

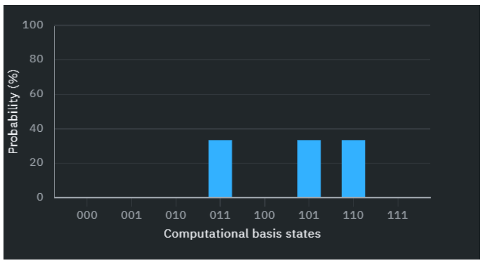

Figure 2: Probabilidad de los tres estados después de la primera parte del circuito

Una vez comprendido el desarrollo anterior, que incluye los tres posibles casos del juego, podemos modelar la decisión del jugador utilizando un sistema análogo al del juego. Es decir, se introducirán tres qubits adicionales a los ya existentes para representar las tres posibles decisiones del participante. De esta manera, si los estados medidos del juego y del participante coinciden, se puede concluir que el jugador ha acertado con la puerta ganadora. Este análisis corresponde a la primera etapa del juego, antes de la apertura de la puerta por parte del presentador.

De esta manera el circuito quedaría así:

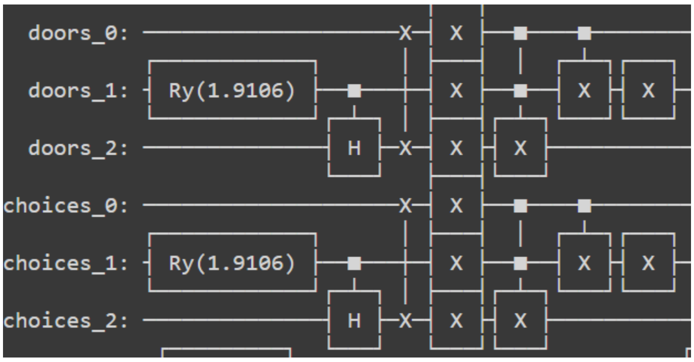

Figure 3: Circuito cuántico etapa 1 antes de apertura de puerta

2.8 Apertura de la puerta

La siguiente etapa, que implica la apertura de una puerta por parte del presentador, es una de las más difíciles de entender en el contexto del problema de Monty Hall. Debemos crear un sistema en el cual, dada la elección inicial del jugador, el presentador del juego siempre abra una puerta diferente a la escogida y que, a su vez, revele un estado $|1\rangle$, es decir, que contenga una cabra. Para ello, podemos basarnos en la siguiente estrategia añadiendo un qubit adicional.

Las reglas que debe seguir el presentador Monty son:

a) Después de la elección inicial del concursante, Monty siempre abrirá una puerta.

b) La puerta que se abre nunca es la puerta ganadora.

c) La puerta que se abre nunca es la puerta elegida por el concursante.

A continuación, se detalla cómo codificamos la decisión de Monty en el estado de este qubit adicional:

- Si el estado del qubit es $|0\rangle$, entonces Monty abre la puerta inmediatamente a la derecha de la puerta elegida. Es decir, si el concursante eligió la puerta 1, Monty abre la puerta 2; si eligió la puerta 2, Monty abre la puerta 3; si eligió la puerta 3, Monty abre la puerta 1.

- Si el estado del qubit es $|1\rangle$, entonces Monty abre la puerta inmediatamente a la izquierda de la puerta elegida. Es decir, si el concursante eligió la puerta 1, Monty abre la puerta 3; si eligió la puerta 2, Monty abre la puerta 1; si eligió la puerta 3, Monty abre la puerta 2.

Para establecer el estado del "qubit de Monty", necesitamos considerar tanto la puerta elegida como la puerta ganadora. Si la puerta elegida coincide con la puerta ganadora, entonces Monty puede decidir abrir cualquiera de las otras dos puertas. Esto se logra estableciendo el qubit de Monty en una superposición igual de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ aplicando una puerta Hadamard. Si la puerta ganadora y la elegida no coinciden, entonces Monty no tiene elección y solo puede abrir la puerta restante, aquella que no es ni la elegida ni la ganadora. Si la puerta ganadora está a la derecha de la elegida, Monty debe abrir la puerta a la izquierda de esta. En este caso, dejamos el qubit en el estado $|1\rangle$ (sin hacer nada). Si la puerta ganadora está a la izquierda de la elegida por el concursante, entonces Monty debe abrir la puerta a la derecha de esta. En este caso, establecemos el qubit en el estado $|0\rangle$ aplicando una puerta X.

Cabe destacar que Qiskit no dispone de una puerta Hadamard controlada por dos qubits de forma directa, por lo que se ha construido una utilizando dos puertas Ry y una puerta Toffoli. Esto matemáticamente puede explicarse así:

Recordemos que la puerta Hadamard (H) se define por la siguiente matriz:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.9 Puerta Ry como sustitución de hadamard

La puerta Ry rota el estado de un qubit alrededor del eje y en la esfera de Bloch y está definida como:

$$Ry(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Para la puerta Hadamard, podemos considerar $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$ para obtener:

$$Ry\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ry\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.10 Construcción de la Puerta Hadamard Controlada

Para implementar una puerta Hadamard controlada por dos qubits, utilizamos puertas Ry y una puerta Toffoli (CCX). La puerta Toffoli (CCX) es una puerta de tres qubits que aplica una puerta X (NOT) al tercer qubit solo si los primeros dos qubits están en el estado $|1\rangle$.

Ahora para construir la puerta Hadamard controlada hacemos lo siguiente:

1. Aplicamos una puerta Ry con $\theta = \frac{\pi}{2}$ al qubit objetivo:

$$Ry\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Aplicamos la puerta Toffoli (CCX) usando los dos qubits de control y el qubit objetivo. Esto hace que el estado del qubit objetivo cambie solo si ambos qubits de control están en $|1\rangle$.

3. Aplicamos una puerta Ry con $\theta = -\frac{\pi}{2}$ al qubit objetivo:

$$Ry\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Debido a la propiedad de las rotaciones y la acción de la puerta Toffoli, esta secuencia es equivalente a una puerta Hadamard controlada por dos qubits, sin embargo como la implementación original se basa en que el estado ganador es el $|1\rangle$, pero en la nueva implementación, el estado ganador es $|0\rangle$, hay que notar que se debe negar cada toffoli para que pueda seguirse el procedimiento de acuerdo a lo necesitado. La puerta Toffoli asegura que la rotación inversa $Ry\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ se aplique solo cuando ambos qubits de control están en el estado $|1\rangle$.

A continuación el circuito como iría hasta este punto:

2.11 Etapa final: Simulación de cambio de puerta

Para terminar de completar el análisis del problema de Monty Hall hay que notar que hasta este punto, se ha simulado las puertas, la elección inicial del concursante y la apertura de una puerta perdedora por parte del anfitrión del programa. La etapa final consiste en simular la última decisión del concursante, es decir, hay determinar qué sucede si cambia su elección a la otra puerta cerrada.

Para lograr esto, utilizamos una secuencia específica de puertas cuánticas que permuta la elección hacia la derecha. Esta permutación implica que el estado $|011\rangle$ se convierte en $|101\rangle$, $|101\rangle$ se convierte en $|110\rangle$ y $|110\rangle$ se convierte en $|011\rangle$. Además, al ser un sistema de tres si queremos elegir un comportamiento hacia la izquierda, simplemente necesitamos aplicar esta secuencia dos veces, resultando en que $|011\rangle$ se convierta en $|110\rangle$, y así sucesivamente. Lo siguiente se podrá hacer con compuertas de Toffoli.

Puertas para permutar la elección hacia la derecha:

$$|011\rangle \to |101\rangle; \quad |101\rangle \to |110\rangle; \quad |110\rangle \to |011\rangle \tag{12}$$

El cambio de elección del concursante depende del estado del qubit asociado al presentador. Si el anfitrión del programa abrió la puerta a la izquierda de la elección inicial (es decir, si el qubit de Monty se encuentra en el estado $|1\rangle$) (una cabra), entonces necesitamos permutar nuestra elección inicial hacia la derecha aplicando nuestra secuencia de puertas una vez. Si, por otro lado, el qubit de Monty se encuentra en el estado $|0\rangle$, esto indica que

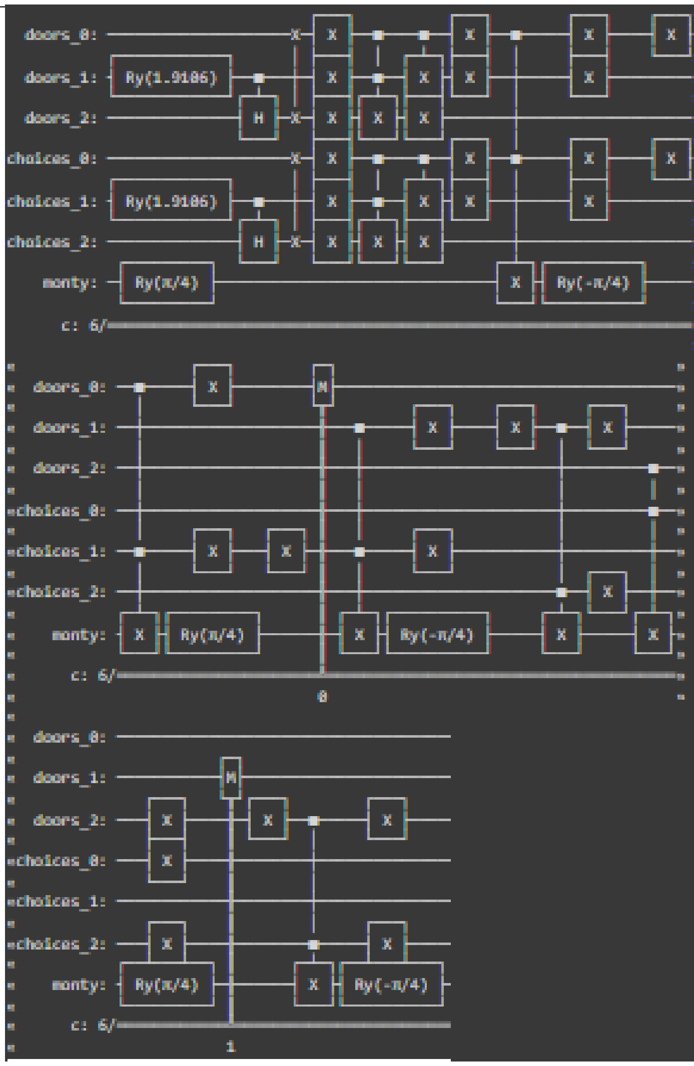

Figure 4: Circuito cuántico etapa 2 con las compuertas para las posibles decisiones de apertura de puerta del anfitrión

el anfitrión abrió la puerta a la derecha de la elección inicial, requiriendo que permutemos hacia la izquierda mediante la aplicación de la secuencia de puertas dos veces.

$$\text{Resultados esperados del experimento final y circuito} \tag{13}$$

Se espera que en los resultados de las mediciones donde las cadenas de qubits relacionadas a la elección del concursante están relacionadas a ganar o llegar al estado $|0\rangle$ (después del cambio de puerta). Esto corrobora la hipótesis propuesta por Marilyn vos Savant: cambiar la elección efectivamente duplica la probabilidad de ganar.

Con el circuito anterior obtenemos el siguiente resultado:

$$\text{(VER IMÁGENES AL FINAL DEL ARCHIVO)} \tag{14}$$

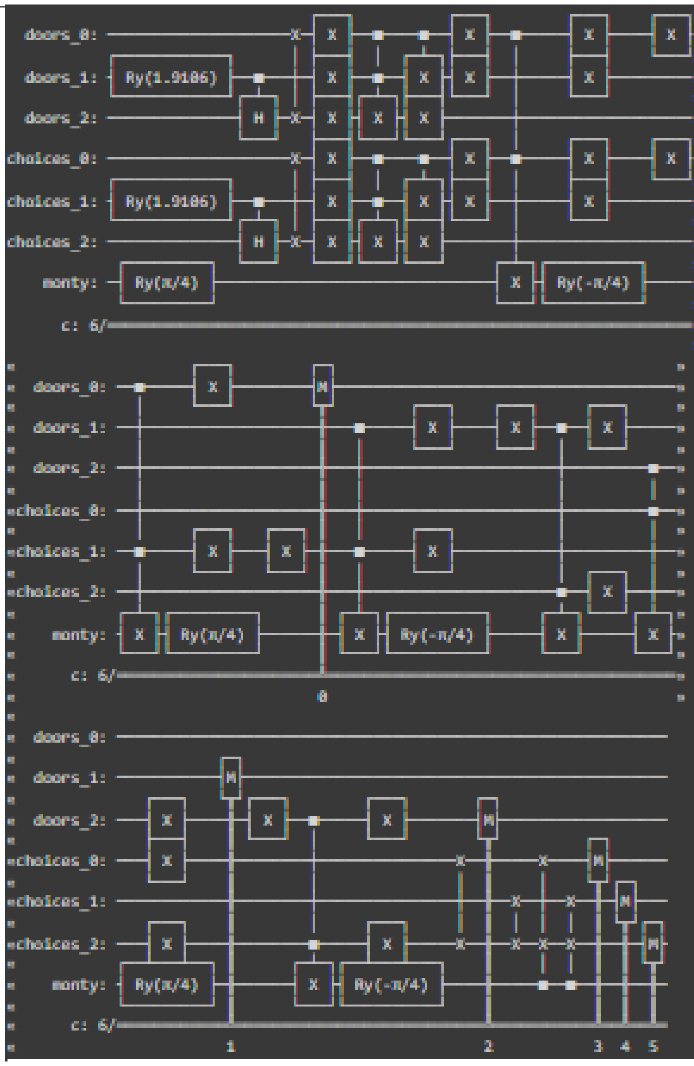

Figure 5: Circuito cuántico etapa final con las compuertas, mediciones y todas las posibles elecciones en monty hall

3 Conclusiones

Podemos hacer una pequeña conclusión, y es que la dualidad en la interpretación de la computación cuántica subraya su capacidad para abordar problemas estadísticos de manera intuitiva y eficiente, proporcionando una nueva perspectiva sobre cómo deben implementarse estos problemas desde un enfoque cuántico.

4 Anexo

Se intentó hacer el código en pennyLane pero en el proceso hay varias dificultades, no he podido entender muy bien el formato para poder hacer los histogramas. Logré hacer el circuito, pero no sacar las otras imágenes como en Qiskit. Por lo que adjuntaré el circuito obtenido, sin embargo, después del curso seguiré intentando mejorar la forma en cómo escribo

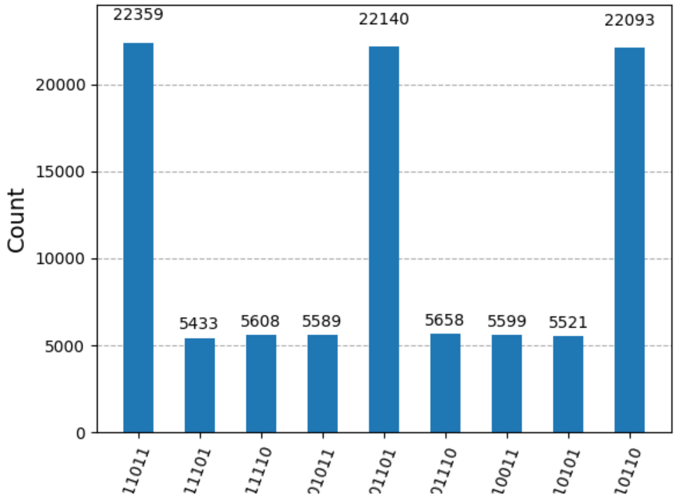

Figure 6: Las mediciones con mayor probabilidad son aquellas donde las cadenas de qubits en las que la elección (después del cambio) coincide con la puerta ganadora.

el código en pennylane para obtener todo, por causa de fuerza mayor no pude hacerlo a tiempo.

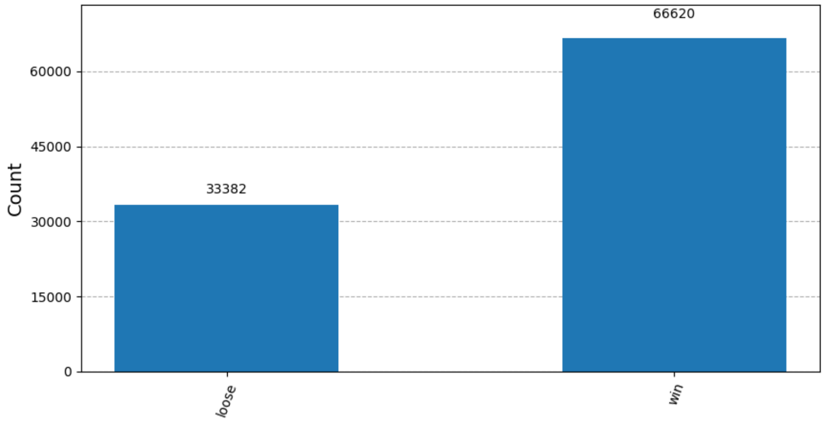

Figure 7: Suma de probabilidades

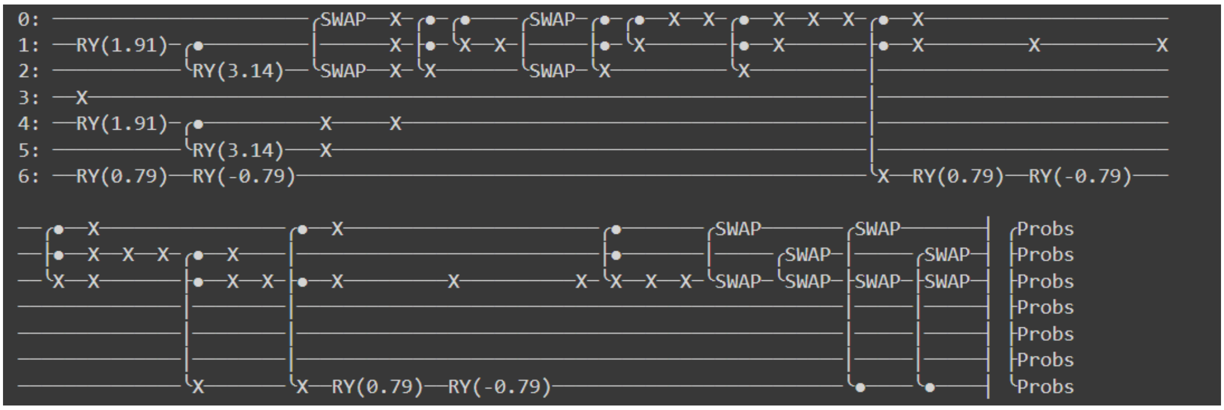

Figure 8: Circuito

References

[1] IBM Quantum Documentation. *IBM Quantum Migration Guides*, 2024. https://docs.quantum.ibm.com/api/migration-guides. Accessed: 2024-07-15.

[2] Transilvania Quantum. *Simulating the Monty Hall Problem on a Quantum Computer*, 2021. https://medium.com/transilvaniaquantum/simulating-the-monty-hall-problem-on-a-quantum-compu Accessed: 2024-07-16.