$\boxed{1.A}$ $f_{X|V}(x,v) = \dfrac{f_{X,V}(x,v)}{f_V(v)}$

$f_{X,V}(x,v)$

$V = Y^3 \longleftrightarrow Y = \sqrt[3]{V}$

$X = X \longleftrightarrow X = X$

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}} \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}}\right|$$

$$f_{X,Y}(x,\sqrt[3]{v}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{\sqrt[3]{v}}{\sigma_y} + \frac{\sqrt[3]{v}}{\sigma_y}^2\right]\right\} \times \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}}$$

$$f_V(v) = f_Y(\sqrt[3]{v}) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{v^{2/3}}{\sigma_y^2}\right\} \times \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}}$$

$$f_{X|V}(x,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}\left(x - \rho_{x,y}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\sqrt[3]{v}\right)^2\right\}$$

$\boxed{1.B}$ $f_{X|U}(x,u) = \dfrac{f_{X,U}(x,u)}{f_U(u)}$ $\quad \cancel{U = X^2}$

$U = X^2 \rightarrow X = \pm\sqrt{u} \rightarrow \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| = \left|\frac{\pm 1}{2\sqrt{u}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$0 \leq U \leq \infty$

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u}{2\sigma_x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{u}{\sigma_x^2}\right\}$$

$0 \leq u \leq \infty$

$f_{X,U}(x,u) \Rightarrow$ $\quad U = Y^2 \longleftrightarrow Y = \pm\sqrt{u}$ $\quad X = X \longleftrightarrow X = X$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2\sqrt{u}} \end{vmatrix} = \left|\frac{\pm 1}{2\sqrt{u}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f_{X,U}(x,u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left[f_{X,Y}(x,+\sqrt{u}) + f_{X,Y}(x,-\sqrt{u})\right] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}}\left[\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{\sqrt{u}}{\sigma_y} + \frac{\sqrt{u}}{\sigma_y}\right]^2\right\} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x}{\sigma_x}\frac{-\sqrt{u}}{\sigma_y} + \frac{-\sqrt{u}}{\sigma_y}\right]^2\right\}\right]$$

2.A

می دانیم یک توزیع به طور منحصر به فرد توسط ممان ها (moments) مشخص می شود. یعنی اگر دو متغیر تصادفی ممان (MGF) مثل هم داشته باشند حتماً توزیع یکسان دارند.

می دانیم تابع توزیع متغیر تصادفی x با میانگین $\mu_x=0$ و واریانس σ_x^2 برابر است با

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right\}$$

می خواهیم تابع سازنده ممان (MGF) را بدست آوریم.

$$M_x(t)=E[e^{xt}]=\int e^{xt}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2}\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right\}dx$$

$$=\int e^{z\sigma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2\right\}dx=$$

$$z=\frac{x}{\sigma_x}\Rightarrow x=z\sigma_x\Rightarrow dx=\sigma dz$$

$$\int e^{z\sigma t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left\{\frac{-1}{2}z^2\right\}\sigma_x dz=\int\frac{e^{z\sigma t}e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}(z-\sigma t)^2+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}dz$$

$$=e^{\frac{1}{2}\sigma^2z^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-1}{2}(z-\sigma t)^2\right\}dz}_{\text{تابع pdf توزیع نرمال با میانگین } \sigma t}=e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

بنابراین تابع جنراتور ممان توزیع نرمال برابر زیر است:

$$M_x(t)=e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

حال می دانیم تابع ممان تولید کننده جمع چند متغیر تصادفی مستقل برابر ضرب ممان های تک تک آن هاست.

$$Z=X+Y$$

$$M_z(t)=M_x(t)M_y(t)=e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2t^2}e^{\frac{1}{2}\sigma_y^2t^2}=e^{\frac{1}{2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)t^2}\sim N(0,\sigma_x^2+\sigma_y^2)$$

$\boxed{2.B}$ اگر $x\sim N(0,1)$ پیروی کند توزیع ax چه خواهد بود؟ این دانش به ما کمک خواهد کرد مسئله را در حالت کلی حل کنیم.

$$Y=ax \longrightarrow g'(x)=a, \qquad \longrightarrow x=\frac{Y}{a}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_Y(y)=\dfrac{f_x\left(\frac{Y}{a}\right)}{|a|} \\[2ex] f_x(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|\,\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{a}\right)^2}=*$$

می دانیم $var[Y]=a^2\,var[x] \Rightarrow \sigma_y=|a|\sigma_x$

پس داریم $* = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}} \sim \cancel{N(0,\sigma_y^2)}\ N(0,a^2)$

بنابراین می‌فهمیم اگر توزیع نرمال متغیری که با میانگین صفر دارد را a برابر کنیم، یک توزیع نرمال با انحراف معیار a^2 و میانگین 0 بدست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} w_1\sim N(0,1)\Rightarrow a_1w_1\sim N(0,a_1^2) \\ w_2\sim N(0,1)\Rightarrow a_2w_2\sim N(0,a_2^2) \end{array}\right] \oplus\ a_1w_1+a_2w_2\sim N(0,a_1^2+a_2^2)$$

$\boxed{2.C}$

فرض کنیم x_1 ، x_2 ، ... ، x_n متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشند می‌خواهیم ثابت کنیم Y نرمال است

~~با استفاده از moment~~

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

از سوال 2.B می‌دانیم $\rightarrow$ $a_i x_i \sim N(0, a_i^2) \xrightarrow[2.A]{\text{با توجه به}} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sim N(0, a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2)$

$$\sim N\left(0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

(3)

ابتدا باید ثابت کنیم Z گوسی است x هم که قبلاً ثابت شده که گوسی است،

$$P(Z \leq z) = P(|Y| \operatorname{sgn}(x) \leq z) = P(|Y| \operatorname{sgn}(x) \leq z \mid x \leq 0)\, P(x \leq 0) + P(|Y| \operatorname{sgn}(x) \leq z \mid x \geq 0)\, P(x \geq 0)$$

we know that

$P(x \geq 0) = \frac{1}{2}$

$P(x \leq 0) = \frac{1}{2}$

$$= P(-|Y| \leq z)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(|Y| \leq z) =$$

$$= \frac{1}{2}P(-|Y| \leq z \mid Y \geq 0)\, P(Y \geq 0) + \frac{1}{2}P(-|Y| \leq z \mid Y \leq 0)\, P(Y \leq 0)$$

$$+ \frac{1}{2}P(|Y| \leq z \mid Y \geq 0)\, P(Y \geq 0) + \frac{1}{2}P(|Y| \leq z \mid Y \leq 0)\, P(Y \leq 0)$$

$$= \frac{1}{4}P(-Y \leq z) + \frac{1}{4}P(Y \leq z) + \frac{1}{4}P(Y \leq z) + \frac{1}{4}P(-Y \leq z)$$

$$= \frac{1}{2}P(Y \geq -z) + \frac{1}{2}P(Y \leq z) = \frac{1}{2}(1 - P(Y \leq -z)) + \frac{1}{2}P(Y \leq z) =$$

$$\frac{1}{2}(1 - \varphi(-z)) + \frac{1}{2}\varphi(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2}\varphi(z) = \underline{\varphi(z)}$$

$$Z \sim N(0,1)$$

پس Z نیز یک گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱ است.

3

ب) می دانیم Z اندازه Y و علامت x را دارد پس x و Z یا هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند. یعنی چگالی joint آن ها در ناحیه اول و سوم صفحه x و Y مقدار دارد. مشروط به دانستن x، توزیع Z هم برابر توزیع شرطی Y است چون Y و $-Y$ هر دو به یک Z می‌شوند. پس

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\exp\{(-x^2-y^2)/2\} \quad xy \geq 0$$

بنابراین توزیع مشترک گوسی نیست و تابع چگالی آن حد بر گوسی است پس نمی‌توان چیزی را نتیجه گرفت.