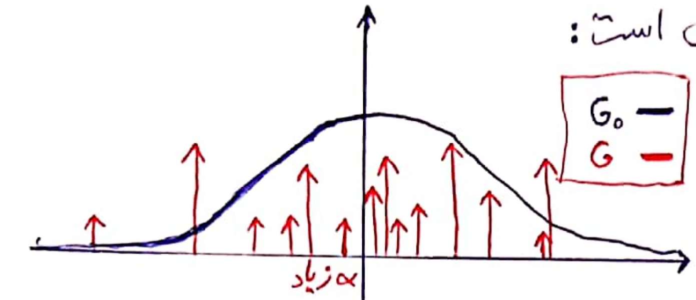
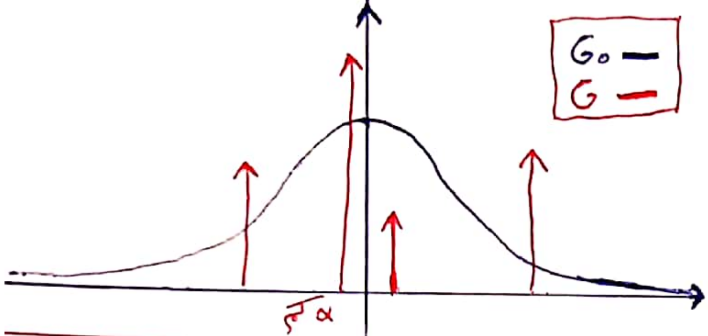
۱ - a) موجودیت G_0 می‌تواند یک توزیع پیوسته (مثل گاوسی) باشد. اما همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید، موجودیت G مجموعه‌ای از توابع δ با دامنه‌های مختلف است:



اگر تعداد توابع δ را زیاد کنیم، توزیع G شباهت بیشتری با توزیع اولیه (G_0) خواهد داشت.
(دلیل این شباهت، انتخاب شدن محل توابع δ، طبق توزیع G_0 است)
با افزایش α، متد Stick Breaking، چوب را به تکه‌های کوچکتر (و در نتیجه پرتعدادتر) تقسیم می‌کند.
لذا α ی زیاد، نتیجه در شباهت G_0 و G داشته و با کاهش α، شباهت G_0 و G کمتر می‌شود.



۱ - b) در صورتی که توزیع مدنظر، تعداد خوشه‌های زیادی داشته باشد، باید مقدار α را زیاد در نظر بگیریم تا توزیع خروجی (G) با توزیع مدنظر (داده‌ها) تطابق بیشتری داشته باشد. (و بالعکس)

۲ - a)

ترتیب → $C_1 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_1 \quad C_3 \quad C_3 \quad C_1 \quad C_4 \quad C_4$

$$P = \frac{\alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{\alpha}{\alpha+2} \times \frac{\alpha}{\alpha+3} \times \frac{2}{\alpha+4} \times \frac{1}{\alpha+5} \times \frac{2}{\alpha+6} \times \frac{3}{\alpha+7} \times \frac{\alpha}{\alpha+8} \times \frac{1}{\alpha+9} =$$

$$= \boxed{\frac{\alpha^4 \times 12}{\prod_{i=0}^{9} (\alpha+i)}}$$

۲ - b)

ترتیب → $C_1 \quad C_1 \quad C_1 \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_3 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_4$

$$P = \frac{\alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{2}{\alpha+2} \times \frac{3}{\alpha+3} \times \frac{\alpha}{\alpha+4} \times \frac{\alpha}{\alpha+5} \times \frac{1}{\alpha+6} \times \frac{2}{\alpha+7} \times \frac{\alpha}{\alpha+8} \times \frac{1}{\alpha+9} =$$

$$= \boxed{\frac{\alpha^4 \times 12}{\prod_{i=0}^{9} (\alpha+i)}} =$$ همان حالت قبل

توجیه: مخرج کسرها ثابت است. هر خوشه، با n عضو، جای $\alpha \times (n-1)!$ را در صورت اضافه می‌کند.
چون با تغییر دادن ترتیب، این فرمول‌ها تغییری نمی‌کند، لذا exchangability در CRP صادق است.

۳- a) طبق تعاریف Consistency کولموگروف، اگر $G \sim DP(G_0, \alpha)$ و G_0 در فضای Θ تعریف شده باشد

برای هر افراز $(A_1, \dots, A_k)$ از فضای Θ، داریم:

$$\left(G(A_1), G(A_2), \dots, G(A_k)\right) \sim Dir\left(\alpha G_0(A_1), \alpha G_0(A_2), \dots, \alpha G_0(A_k)\right)$$

لذا اگر $k=2$ و $(A_1 \triangleq A \,,\, A_2 \triangleq A^c)$ باشد:

$$\left(G(A), \underbrace{\cancel{G(A^c)}}_{1-G(A)}\right) \sim Dir\left(\alpha G_0(A), \underbrace{\cancel{\alpha G_0(A^c)}}_{\alpha(1-G_0(A))}\right)$$

توزیع Dirichlet دو متغیره، همان توزیع بتا است

لذا داریم:

$$G(A) \sim Beta\left(\underbrace{\alpha_0 G_0(A)}_{p}, \underbrace{\alpha_0 (1 - G_0(A))}_{q}\right)$$

طبق روابط توزیع بتا، داریم:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[G(A)\right]} = \frac{p}{p+q} = \frac{\alpha_0 G_0(A)}{\alpha_0 G_0(A) + \alpha_0(1 - G_0(A))} = \boxed{G_0(A)}$$

۳- b) باز هم طبق روابط توزیع بتا، داریم:

$$\boxed{Var\left[G(A)\right]} = \frac{pq}{(p+q)^2 (p+q+1)} = \frac{\cancel{\alpha_0^2}\, G_0(A)\left(1 - G_0(A)\right)}{\cancel{\alpha_0^2}\, (\alpha_0 + 1)} = \boxed{\frac{G_0(A)\left(1 - G_0(A)\right)}{\alpha_0 + 1}}$$

۴- می‌دانیم اگر یک بردار تصادفی گاما داشته باشیم $Z_i \sim \Gamma(\alpha_i, \theta)$ و بردار تصادفی π را از نرمال کردن این بردار به دست آوریم، $\left(\pi_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i}\right)$ بردار تصادفی π از توزیع $(\pi_i)_{i=1 \dots k} \sim Dir\left((\alpha_i)_{i=1 \dots k}\right)$ پیروی می‌کند. از خواص توزیع گاما، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \theta) \\ Z_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \theta) \end{array}\right\} \xrightarrow[Z_2]{\text{استقلال } Z_1} (Z_1 + Z_2) \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \theta)$$

پس داریم:

$$\boxed{\left(\pi_1 + \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_k\right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} Z_i} \times \left(Z_1 + Z_2, Z_3, \dots, Z_k\right)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i, 1)} \left(\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, 1), \Gamma(\alpha_3, 1), \dots, \Gamma(\alpha_k, 1)\right) \sim \boxed{Dir\left(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\right)}$$