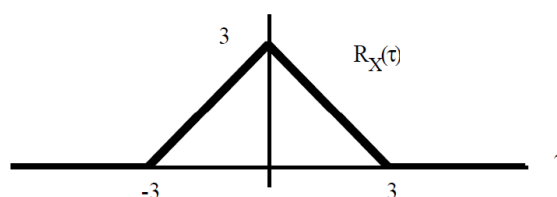


سوال ۱: Gaussina Process (20 points)

یک مدار الکتریکی داریم که نویز در یکی از گره‌های آن را به صورت یک متغیر تصادفی WSS گاوسی $X(t)$ مدل کردیم.

$$E[X(t)] = 0 \quad (۱)$$

و $R_X(\tau)$ در شکل ۱ آمده است.



شکل ۱: تابع autocorrelation مربوط به سوال فرایندهای گاوسی

۱.۱. احتمال $\mathcal{P}\{[X(5) + 2X(6)]^2 > 7\}$ را محاسبه کنید.
(لزمی ندارد آن را دقیق حساب کنید و یک عبارت مثل $X \sim N(0, 1)$, $P(X > 2)$ برای دریافت تمام نمره کافیست.)

۱.۲. در صورت وجود، برای چه مقادیری از s, t متغیرهای $X(s)$ و $X(t)$ مستقل هستند؟

۱.۳. در صورت وجود، برای چه مقادیری از s, t متغیرهای $X(s)$ و $X(t)$ معادل^۱ هستند؟

۱.۴. در صورت وجود، برای چه مقادیری از s, t متغیرهای $X(s)$ و $X(t)$ برابر^۲ هستند؟

سوال ۲: Dirichlet Process(20 points)

اگر $p \sim \mathcal{DP}(\alpha)$ آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی A measurable و B نشان دهید:

$$E[p(A)] = \bar{\alpha}(A) \quad ۲.۱$$

$$\text{Var}[p(A)] = \frac{\bar{\alpha}(A)\bar{\alpha}(A^c)}{1+|\alpha|} \quad ۲.۲$$

سوال ۳: Point Process(20 points)

در یک خیابان، ماشین‌ها از نقطه خاصی طبق یک فرآیند پواسن با نرخ λ گذر می‌کنند. عابران پیاده که قصد گذر از این نقطه را دارند، تنها زمانی شروع به گذر از خیابان می‌کنند که اطمینان داشته باشند تا T زمان آینده هیچ ماشینی از این مکان عبور نخواهد کرد. برای مثال در صورتی که ماشینی در T زمان اول از این مکان عبور نکند، زمان انتظار عابر در شروع صفر خواهد شد. متوسط زمانی را که یک عابر باید منتظر بایستد تا شروع به گذر از خیابان کند را محاسبه کنید.

¹identical

²equal

۴.۱. در مسائل شبکه‌های اجتماعی با گراف‌های بزرگی مواجهیم که پردازش همه‌ی آنها در یک واحد پردازشی بهینه و قابل انجام نیست. از این رو انجام پردازش‌های موازی در گراف‌ها می‌تواند به حل این مسائل کمک کند. با توجه به این مطلب سعی کنید برای مسائل زیر در حوزه‌ی گراف و شبکه‌ها راه‌حلی بر مبنای الگوریتم map-reduce ارائه دهید.

(آ) الگوریتمی بر مبنای چارچوب map-reduce برای پیدا کردن کوتاهترین فاصله‌ی بین یک گره با گره‌های دیگر در گراف جهت‌دار وزن‌دار ارائه کنید.

(ب) یکی از روش‌های پیدا کردن افراد تاثیرگذار در شبکه‌های اجتماعی، استفاده از الگوریتم PageRank است. این الگوریتم در واقع با انجام یک قدم تصادفی^۳ بر روی گراف به صورت مرحله به مرحله برای هر گره n یک مقدار $P(n)$ را طبق فرمول زیر محاسبه می‌کند تا زمانی که مقادیر P برای همه گره‌ها به مقادیر ثابتی میل کند.

$$P(n) = \alpha \left(\frac{1}{|G|} \right) + (1 - \alpha) \sum_{m \in L(n)} \frac{P(m)}{C(m)}$$

که در آن $|G|$ تعداد کل گره‌ها، α ضریب پرش، $L(n)$ گره‌هایی هستند که به n لینک دارند و $C(m)$ تعداد گره‌هایی که از n به آن‌ها لینک وجود دارد. الگوریتمی بر مبنای چارچوب map-reduce برای محاسبه‌ی مقادیر P در یک شبکه ارائه دهید.

سوال ۵: Interpretable Learning (20 points)

۵.۱. تفاوت ویژگی‌های interpretability و explainability را در مدل شرح دهید.

۵.۲. گراف شبکه و فایده آن را در تفسیرپذیری شرح دهید.

³Random Walk