امیرپورسید - ۹۹۲۱۰۲۵۶

1) a) روشی که باعث می‌شود فرآیند Exchangable شود همان left order form است که در واقع یک تابع چند به یک است که با توجه به تعداد 1 های هر ~~سطر~~ ستون آن ها را از چپ به راست مرتب می‌کند و در واقع با این کار ماتریس را به ماتریس دیگری نگاشت می‌کند. با این روش ماتریس Exchangable می‌شود یعنی جای سطرها یا datapoint ها به سادگی قابل تعویض خواهد بود و اثبات همین نکته در قسمت بعدی سؤال است

(۱) (ب) (الف) می دانیم Datepoint ها یا row ها در IndianBuffet Process از یکدیگر مستقل هستند پس داریم:

~~$P(Z) = P$~~ فیچرها

$$P(Z|\pi) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{K} P(z_{ik}|\pi_k)$$

سطر

با توجه به این که ضرب جابجاپذیر است توزیع joint برابر هر ترتیبی از سطرهاست

البته می توان از قاعده زنجیری نیز استفاده کرد

سطر

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1) P(x_2|x_1) P(x_3|x_2, x_1) \dots P(x_n|x_{n-1} \dots x_1)$$

احتمال

و باز چون متغیرها (سطرها) مستقل هستند احتمال ها با یکدیگر برابر می شوند و هر ترتیبی از متغیرها با هم برابر است.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i| x_1 \dots x_{i-1})$$

Amir Pourmand

1 ط) اثبات خاصیت دوم

از تعریف IBP می‌دانیم که تعداد یک ها در سطر اول از توزیع Poisson(α) پیروی می کند از این خاصیت و خاصیت الف که ذکر می کند سطرها یا همان Datapoint ها Exchangeable هستند نتیجه می شود که تک تک سطرها را می توان با سطر ۱ ~~تعویض~~ تعویض کرد و در واقع با این کار ثابت می شود تعداد یک ها در هر سطر از توزیع پواسون پیروی می کند.

اثبات خاصیت ~~سوم~~ سوم

می دانیم تعداد یک ها در هر سطر از توزیع Poisson(α) پیروی می کند و تعداد سطرها N است. اگر متغیر تصادفی x را برابر زیر تعریف کنیم داریم:

$x \sim N\,\mathrm{Poisson}(\alpha)$

البته توجه داریم که سطرها از یکدیگر مستقل هستند و در نتیجه می توان N را در آن ضرب کرد. x متغیر تصادفی ای است که تعداد کل یک هارا نشان می دهد.

$$E[x] = E[N\,\mathrm{Poisson}(\alpha)] = N\,E[\mathrm{Poision}(\alpha)] = N\alpha$$

② ابتدا می‌دانیم ~~DP~~ توزیع دیریکله، Conjugate برای Multinomial است و داریم :

$$\pi \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$$
$$x_n \sim \text{Multinomial}(\pi) \Rightarrow p(\pi \mid x_1, \dots, x_n) = \text{Dirichlet}(\alpha_1 + m_1, \dots, \alpha_K + m_K) \quad (*)$$

iid sample

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ یک بردار به اندازه دسته‌های ما

که m_K به معنای تعداد آیتم‌ها در دسته k ام است.

فرایند دیریکله نیز بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi \sim \lim_{K \to \infty} \text{Dirichlet}\left(\frac{\alpha}{K}, \dots, \frac{\alpha}{K}\right)$$

به ازای هر نقطه در این توزیع ما یک نمونه برداری از H فرض می‌کنیم

$$\theta_k \sim H, \quad k = 1, \dots, \infty$$

then $$G := \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \delta_{\theta_k}$$

$$(G(A_1), \dots, G(A_n)) \sim \text{Dir}(\alpha H(A_1), \dots, \alpha H(A_K))$$

اگر در بخش J ام یک مشاهده داشته باشیم داریم

$$(G(A_1), \dots, G(A_n)) \mid x_1 \in A_j \sim \text{Dir}(\alpha H(A_1), \dots, \alpha H(A_j) + 1, \dots, \alpha H(A_K))$$

در حالت کلی نیز اگر n تا داده بین تقسیم داده شود البته این‌ها با توجه به خاصیت * نوشته می‌شود

$$G(A_1), \dots, G(A_n) \mid x_1, \dots, x_n \sim \text{Dir}(\alpha H(A_1) + n_1, \dots, \alpha H(A_r) + n_r)$$

(2) ادامه: با توجه به این که اصل اثبات روی فاصبت * بودن آن را اثبات می کنیم:

$$P(\pi | x_1, \dots, x_n) \propto P(x_1, \dots x_n | \pi)\, P(\pi) =$$

$$= \left(\frac{\prod_{k=1}^{K} \Gamma(\alpha_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k\right)} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha_k - 1} \right) \left(\frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!} \pi_1^{m_1} \pi_2^{m_2} \dots \pi_k^{m_k} \right)$$

$$\propto \frac{\prod_{k=1}^{K} \Gamma(\alpha_k + m_k)}{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k + m_k\right)} \prod_{k=1}^{K} \pi_k^{\alpha_k + m_k - 1} = \text{Dirichlet}(\alpha_1 + m_1, \dots, \alpha_k + m_k)$$

۳) (الف) احتمال این که فردی روی میز جدید بنشیند اگر نفر i ام باشد $\frac{\alpha}{\alpha+i-1}$ است علت آن هم عدم وابستگی به انتخاب های قبلی است حال اگر یک متغیر تصادفی indicator بدین صورت تعریف کنیم که اگر ۱ باشد بدین معناست که میز جدید انتخاب شده است و اگر ۰ باشد به معنای انتخاب میز قدیمی است می توان گفت که تعداد میزها برابر جمع این متغیر تصادفی است. بصورت فرمال تر فرض کنید داریم:

Z_i نشان دهنده مشخص کننده این است که آیا در مرحله i ام میز جدید انتخاب شده است یا خیر؟

$$Z_i = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+i-1} & 1 \\ \frac{i-1}{\alpha+i-1} & 0 \end{cases}$$

متغیر تصادفی W_n تعداد کلاسترها را وقتی که N مشتری داشته باشیم مشخص می کند

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$E[W_n] = 1 \times \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\alpha+i-1} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdots + \frac{\alpha}{\alpha+N-1} = \alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha+N-1}\right) \quad *$$

می دانیم $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \simeq \ln \alpha$ تقریب

بنابراین
$$\begin{cases} 1 + \cdots + \frac{1}{\alpha+N-1} \approx \ln(\alpha+N-1) \\ 1 + \cdots + \frac{1}{\alpha-1} \approx \ln(\alpha-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha+N-1} \approx \ln\left(\frac{\alpha+N-1}{\alpha-1}\right)$$

$$* = \alpha \ln\left(\frac{\alpha+N-1}{\alpha-1}\right) \overset{N,\alpha \gg 1}{\simeq} \alpha \ln\left(\frac{\alpha+N}{\alpha}\right)$$

س۳) ط) نفر ۱ و ۲ و ۵ روی میز جدید می‌نشینند و ۳ و ۴ نه.

احتمال این که کسی روی میز جدید بنشیند برابر است با $\frac{\alpha}{\alpha+N-1}$ (البته بهتر است به جای N از n استفاده کنیم که به معنای تعداد تا آن زمان است)

احتمال این که روی میز جدید ننشیند برابر است با $1-\frac{\alpha}{\alpha+N-1}=\frac{N-1}{\alpha+N-1}$

در واقع یک متغیر تصادفی indicator معرفی کردیم که تابع توزیع آن به شکل زیر است و البته متغیر تصادفی به معنای تشکیل میز جدید است.

$$P(I)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha+N-1} & I=1\\ \frac{N-1}{\alpha+N-1} & I=0\end{cases}$$

پس عملاً که ما به محاسبه احتمال بردار $(1,1,0,0,1)$ است.

چون احتمال نشستن مشتری روی میز جدید مستقل از انتخاب‌های قبلی است و فقط به N بستگی دارد می‌توان احتمال مدنظر را با ضرب احتمال‌ها بدست آورد.

$$A=(1,1,0,0,1)$$

$$P(A)=\frac{\alpha}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\alpha+1}\times\frac{2}{\alpha+2}\times\frac{3}{\alpha+3}\times\frac{\alpha}{\alpha+4}=\frac{6\alpha^3}{(\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+4)}$$

$$\alpha^{(5)}=\alpha(\alpha+1)(\dots)(\alpha+4)$$

این روش حل سوال مدنظر TA است

۳) ب) مشتری ۱ و ۲ و ۵ روی میز جدید می نشینند. مشتری ۳، ۴ روی میز ۱ یا ۲ می نشینند که ۴ حالت می شود

که احتمال ۲ حالت آن ها با هم برابر است. اگر مشتری ۳،۴ روی یک میز بنشینند احتمال آن می شود:

$A = \{1,3,4\}\{2\}\{5\}$

$$P(A) = \frac{\alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{2}{\alpha+2} \times \frac{\alpha}{\alpha+3} \times \frac{\alpha}{\alpha+4} = \frac{2\alpha^3}{\alpha^{(5)}}$$

$B = \{1\}\{2,3,4\}\{5\}$

$$P(B) = \frac{\alpha}{\alpha}\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\,\frac{1}{\alpha+2}\,\frac{2}{\alpha+3}\,\frac{\alpha}{\alpha+4} = \frac{2\alpha^3}{\alpha^{(5)}}$$

$$\alpha^{(5)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)$$

$C = \{1,3\}\{2,4\}\{5\}$ $\qquad$ $D = \{1,4\}\{2,3\}\{5\}$

$$P(C) = P(D) = \frac{\alpha}{\alpha}\,\frac{1}{\alpha+1}\,\frac{\alpha}{\alpha+2}\,\frac{1}{\alpha+3}\,\frac{\alpha}{\alpha+4} = \frac{\alpha^3}{\alpha^{(5)}}$$

$$P(\text{[illegible]}) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{2\alpha^3}{\alpha^{(5)}} + \frac{2\alpha^3}{\alpha^{(5)}} + \frac{\alpha^3}{\alpha^{(5)}} + \frac{\alpha^3}{\alpha^{(5)}} = \frac{6\alpha^3}{\alpha^{(5)}}$$

این روش حل سوال نیز با در نظر گرفتن تمام stateهای ممکن بدست آمده است.

۳) ج) با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم ابتدا در حالت $k=1$ داریم:

$$P(K_n=1)=S(n,1)\,\alpha\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)}=\frac{(n-1)!\,\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)}=$$

$$\xrightarrow{n=1}\frac{\alpha}{\alpha}\ \checkmark$$

$$\xrightarrow{n=2}\frac{\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\ \checkmark$$

$$\xrightarrow{n=3}\frac{2\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}\ \checkmark$$

در حالت کلی داریم

$$P(K_n=k)=\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha+n-1}P(K_{n-1}=k-1)}_{\text{مشتری روی میز جدید بنشیند}}+\underbrace{\frac{n-1}{\alpha+n-1}P(K_{n-1}=k)}_{\text{مشتری روی میز قدیمی بنشیند}}$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}$$

می‌دانیم

$$\frac{\alpha}{\alpha+n-1}S(n-1,k-1)\,\alpha^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n-1)}+\frac{n-1}{\alpha+n-1}\,\frac{S(n-1,k)\,\alpha^{k}\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n-1)}=$$

$$=\frac{\alpha^k\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)}\Big[S(n-1,k-1)+(n-1)S(n-1,k)\Big]=S(n,k)\,\alpha^k\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)}\ \checkmark$$

خاصیت استرلینگ

$$\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}=n\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}$$

$$S(n,k)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

بنابراین حکم ثابت شد.

Amir Pourmand

99210259