۱- می‌دانیم: $MGF_X(t) = E[e^{tX}] \longrightarrow$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی

لذا:
$$MGF_{\pi_1}(t) = \mathbb{E}[e^{t\pi_1}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_r(\pi_1 = n)\, e^{tn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^n e^{-\alpha_1}}{n!} \times e^{tn}$$
$$= e^{-\alpha_1} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 e^t)^n}{n!} = e^{-\alpha_1} \times e^{\alpha_1 e^t} = \boxed{e^{\alpha_1(e^t-1)}}$$
$$MGF_{\pi_2}(t) = \text{به همین ترتیب} = \boxed{e^{\alpha_2(e^t-1)}}$$

چون π_1 و π_2 مستقل هستند، تابع مولد گشتاور برای جمع آن‌ها از ضرب MGF های آن‌ها به دست می‌آید لذا:
$$MGF_{\pi_1+\pi_2}(t) = MGF_{\pi_1}(t)\, MGF_{\pi_2}(t) = e^{(\alpha_1+\alpha_2)(e^t-1)} = MGF_{\pi_3}(t) \quad S.T.\ \pi_3 \sim Poisson(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$\Rightarrow \pi_1 + \pi_2 = \pi_3 \sim \boxed{Poisson(\alpha_1+\alpha_2)}$$

۲-(a)-
$$\sum_i Z_{1,i} = \text{طبق تعریف} = \boxed{Poisson(\alpha)}$$

تعداد ظرف‌های مشتری اول

هر کدام با احتمال $\frac{1}{2}$
$$\sum_i Z_{2,i} = \sum_{j=1}^{\pi_1} Z_{2,j} + Poisson\left(\frac{\alpha}{2}\right) = Poisson\left(\frac{\alpha}{2}\right) + Poisson\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{Poisson(\alpha)}$$
$$\vdots$$
$$\sum_i Z_{\ell,i} = \sum_{j=1}^{\pi_{\ell-1}} Z_{\ell,j} + Poisson\left(\frac{\alpha}{\ell}\right) = Poisson\left(\frac{\ell-1}{\ell}\alpha\right) + Poisson\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \boxed{Poisson(\alpha)}$$

۲- (b)- در فایل کدها نمودارها رسم شده است.

۳-(a)-
$$\sum_i Z_{1,i} = \text{طبق تعریف} = \boxed{Poisson(\alpha)}$$

به دلیل وجود exchangability، هر مشتری می‌تواند با مشتری اول جابجا شود؛ درحالی که تأثیری بر توزیع نداشته باشند.

لذا:
$$\sum_i Z_{j,i} = \boxed{Poisson(\alpha)}$$

۳- (b)-

ظرف‌های سفارش داده شده (جدید) توسط مشتری k ام $\longrightarrow N_K$

$$N_1 \sim Poisson(\alpha)$$
$$N_K \sim Poisson\left(\frac{\alpha\beta}{\beta+K-1}\right)$$

تعداد کل ظرف‌های فعلی بعد از ورود k مشتری $\rightarrow \sum_{i=1}^{K} N_i \sim Poisson(\alpha) + \dots + Poisson\left(\frac{\alpha\beta}{\beta+K-1}\right)$

$$= \text{طبق نتیجه‌ی سؤال اول} = \boxed{Poisson\left(\alpha\beta\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{\beta+i-1}\right)}$$

۳- (c) و (d)- در فایل کدها پاسخ داده شده است.