Quiz-1, Solution

Quiz 1

1

برای هر تعداد انتخاب k از زمان های دلخواه $t_1, t_2, \dots, t_k$ متغیرهای X_{t_1}، X_{t_2}، ...، X_{t_k} برابر با متغیرهای تصادفی At_1، At_2، ...، At_k هستند.

توزیع توأم این متغیرها را می‌توان طبق قاعده زنجیره‌ای به صورت زیر نوشت:

$$f(At_1, At_2, \dots, At_k) = f(At_1) \times f(At_2 | At_1) \times \dots \times f(At_k | At_{k-1}, \dots, At_1)$$

$f(At_1)$ دارای ~~هم~~ توزیع نرمال است. باقی عبارات هم به صورت مقادیر ثابت هستند. بنابراین توزیع مشترک X_{t_1}، X_{t_2}، ...، X_{t_k} ~~هم~~ یک توزیع نرمال را دارد و بنا بر تعریف فرآیند حاصل یک فرآیند نرمال است.

$$E[tA] = tE[A] = 0$$

$$E[X(t_1) X(t_2)] = E[A^2] t_1 t_2 = t_1 t_2$$

2

امید ریاضی این فرآیند برای هر n صفر است، و Auto Covariance آن برابر است با:

$$C_w(k,l) = E\left[w(k)\,w(l)\right] = \sigma^2 \delta_{k,l} \longrightarrow \delta_{k,l} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

در نتیجه با توجه به تعریف این فرآیند ایستا از نوع ضعیف است. (WSS است)

می‌توانیم بردار $(S(1), \dots, S(n))^T$ را به عنوان یک تبدیل خطی از بردار $(w(1), \dots, w(n))^T$ در نظر بگیریم. در این صورت $S_1, \dots, S_n$ یک مجموعه از متغیرهای مشترکاً گوسی با امید ریاضی صفر است. از آنجایی که این حرف برای هر $n \geq 1$ درست است، پس $\{S(n); n \geq 1\}$ یک فرآیند گوسی است.

$$E[S(n)] = E\left[w(1) + w(2) + \dots + w(n)\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[w(i)\right] = 0$$

اگر $k \leq l$ برای Auto Covariance این فرآیند داریم:

$$C_s(k,l) = E\left[\sum_{i=1}^{k} w_i \sum_{j=1}^{l} w_j\right] = \sum_{i=1}^{k} E\left[w_i^2\right] = k\sigma^2$$

با استدلال مشابه حالت $k \geq l$ هم قابل محاسبه است. بنابراین برای حالت کلی داریم:

$$C_s(k,l) = \min[k,l]\,\sigma^2$$

همانطور که مشاهده می‌شود این فرآیند حتی از نوع ضعیف هم ایستا نیست. (WSS هم نیست)