# به نام ایران

# IN THE NAME OF IRAN

عنوان: **خلاصهٔ سیگنال‌ها و سیستم‌ها**

Title: **Signal & Systems Summary**


نگارش: **پوریا خداقلی‌پور**


**پاییز ۱۴۰۳ (۲۵۸۳ شاهنشاهی)**


Summarizer: **Pourya Khodagholipour**


**Fall 2024**

# فهرست

# سیگنال‌ها

| | پیوسته در زمان | گسسته در زمان |
|---|---|---|
| انرژی سیگنال | $E_\infty = \underset{T\to\infty}{Lim} \int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$ | $E_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2$ |
| توان سیگنال | $P_\infty = \underset{T\to\infty}{Lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$ | $P_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n]\rvert^2$ |
| رابطۀ انرژی و توان | $P_\infty = \underset{T\to\infty}{Lim} \frac{E_\infty}{2T}$ | $P_\infty = \underset{N\to\infty}{Lim} \frac{E_\infty}{2N+1}$ |
| تجزیۀ زوج و فرد | $even\{x(t)\} = x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$<br>$odd\{x(t)\} = x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$ | $even\{x[n]\} = x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$<br>$odd\{x[n]\} = x_o[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$ |

| | پیوسته در زمان | گسسته در زمان |
|---|---|---|
| سیگنال نمایی متناوب | $x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$<br>دورۀ تناوب $T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$ | $x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$<br>دورۀ تناوب $N = \frac{2k\pi}{\omega_0}$ |
| تابع ضربۀ واحد | $\delta(t) = \begin{cases} Special & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$<br>$Special \Rightarrow \int_{-0}^{+0} \delta(t)\, dt = 1$ | $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$ |
| تابع پلۀ واحد | $u(t) = \begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ | $u[n] = \begin{cases} 1 & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$ |
| تابع شیب واحد | $r(t) = \begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ | $r[n] = \begin{cases} n & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$ |
| رابطۀ توابع ضربۀ واحد و پلۀ واحد | $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$<br>$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$<br>$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$ | $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$<br>$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$ |
| خاصیت غربالگری | $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$<br>$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$<br>$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\, dt = x(0)$<br>$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$ | $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$<br>$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$<br>$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n] = x[0]$<br>$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$ |
| تابع سینک | $\sin c(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$ | |

## خواص سیستم‌ها

۱. **سیستم‌های حافظه‌دار و بدون حافظه**: سیستمی بدون حافظه نامیده می‌شود که خروجی آن به ازای هر متغیر مستقل (هر زمان) به ورودی در همان مقدار متغیر مستقل (همان زمان) بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشتهٔ ورودی بستگی ندارد.

۲. **سیستم‌های علی و غیرعلی (Causality)**: سیستمی را علی می‌نامند که در آن خروجی در هر لحظه تنها به مقادیر گذشته و یا حال ورودی بستگی داشته باشد و به آینده ورودی بستگی نداشته باشد.

۳. **سیستم‌های پایدار و ناپایدار**: سیستمی پایدار است که پاسخ محدود به ورودی محدود دهد (ورودی محدود خروجی محدود یا BIBO):

$$if \left|x(t)\right| \le A < \infty \Rightarrow \left|y(t)\right| \le B < \infty$$
$$if \left|x[n]\right| \le A < \infty \Rightarrow \left|y[n]\right| \le B < \infty$$

۴. **سیستم‌های وارون‌پذیر و وارون‌ناپذیر**: سیستمی وارون‌پذیر نامیده می‌شود که به ازای ورودی‌های متمایز خروجی‌های متمایز بدهد. به عبارت دیگر:

$$if\ x_1(t)=x_2(t) \Rightarrow y_1(t)=y_2(t)$$
$$if\ x_1[n]=x_2[n] \Rightarrow y_1[n]=y_2[n]$$

۵. **سیستم‌های تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان**: به لحاظ مفهومی سیستمی تغییرناپذیر با زمان است که رفتار و مشخصات آن با زمان تغییر نکند. اما با زبان سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیستمی را تغییرناپذیر با زمان می‌نامند هرگاه هر شیفت زمانی در سیگنال ورودی، دقیقاً در سیگنال خروجی ظاهر شود. به عبارت دیگر:

$$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \to y(t-t_0)$$
$$x[n] \to y[n] \Rightarrow x[n-n_0] \to y[n-n_0]$$

۶. **سیستم‌های خطی و غیرخطی**: یک سیستم را خطی می‌نامند اگر دو خاصیت همگنی (I) و جمع‌پذیری (II) را داشته باشد.

**الف) همگنی**:

$$x(t) \to y(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha\, x(t) \to \alpha\, y(t)$$
$$x[n] \to y[n] \quad \Rightarrow \quad \alpha\, x[n] \to \alpha\, y[n]$$

**ب) جمع‌پذیری**:

$$x_1(t) \to y_1(t) \quad , \quad x_2(t) \to y_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)$$
$$x_1[n] \to y_1[n] \quad , \quad x_2[n] \to y_2[n] \quad \Rightarrow \quad x_1[n]+x_2[n] \to y_1[n]+y_2[n]$$

**خواص اصلی سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربهٔ آن‌ها**

| | سیستم پیوسته در زمان | سیستم گسسته در زمان |
|---|---|---|
| **حافظه** | اگر $h(t)=k\,\delta(t)$ باشد سیستم بدون حافظه و در غیراینصورت با حافظه است. | اگر $h[n]=k\,\delta[n]$ باشد سیستم بدون حافظه و در غیراینصورت با حافظه است. |
| **علیت** | اگر $h(t)=0 \quad t<0$ باشد سیستم علی و در غیراینصورت غیرعلی است. | اگر $h[n]=0 \quad n<0$ باشد سیستم علی و در غیراینصورت غیرعلی است. |
| **پایداری** | اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|h(t)\right|dt<\infty$ باشد سیستم پایدار (پاسخ ضربه مطلقاً انتگرال‌پذیر) و در غیراینصورت ناپایدار است. | اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|h[n]\right|<\infty$ باشد سیستم پایدار (پاسخ ضربه مطلقاً جمع‌پذیر) و در غیراینصورت ناپایدار است. |
| **وارون پذیری** | اگر سیستم وارون‌پذیر باشد و پاسخ ضربهٔ سیستم وارون $h_I(t)$ باشد، آنگاه داریم: $h(t)*h_I(t)=\delta(t)$ | اگر سیستم وارون‌پذیر باشد و پاسخ ضربهٔ سیستم وارون $h_I[n]$ باشد، آنگاه داریم: $h[n]*h_I[n]=\delta[n]$ |

## پاسخ پلهٔ سیستم‌های LTI (پاسخ سیستم به ورودی پلهٔ واحد)

| | سیستم‌های پیوسته در زمان | سیستم‌های گسسته در زمان |
|---|---|---|
| پاسخ پله<br>$s[n] \mid s(t)$ | $h(t)=\dfrac{d\,s(t)}{d\,t}$ , $s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$ | $h[n]=s[n]-s[n-1]$ , $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$ |

## سیستم‌های پیوسته در زمان توصیف شده با معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت

$$x(t)\rightarrow y(t) \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{M} a_k \frac{d^k y}{d t^k}=\sum_{i=0}^{N} b_k \frac{d^i x}{d t^i}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه یک سیستم بیان شده توسط معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت LTI و علی باشد آن است که سیستم در سکون (آرامش) اولیه باشد. یعنی قبل از اعمال ورودی به سیستم، خروجی آن صفر باشد.

## سیستم‌های گسسته در زمان توصیف شده با تفاضل خطی با ضرایب ثابت

$$x[n]\rightarrow y[n] \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{M} a_k\, y[n-k]=\sum_{i=0}^{N} b_i\, x[n-i]$$

معمولاً سیستم‌های گسسته در زمان با معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شوند:

**الف) سیستم‌های با پاسخ ضربهٔ محدود (FIR)**: اگر در معادلهٔ تفاضلی سیستم $a_k=0$ به ازای $k\neq 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$y[n]=\sum_{i=0}^{N}\frac{b_i}{a_0}x[n-i]$$

سه خاصیت بارز یک سیستم FIR:

۱. خروجی در هر لحظه فقط به مقدار ورودی در همان لحظه و لحظات قبل بستگی دارد و مقادیر قبلی خروجی هیچ نقشی در تعیین خروجی در یک لحظهٔ خاص ندارد.
۲. در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود ندارد.
۳. عرض پاسخ ضربهٔ این سیستم‌ها محدود است.

**ب) سیستم‌های با پاسخ ضربهٔ نامحدود (IIR)**: اگر حداقل یک از ضرایب $a_k$ به ازای $k\neq 0$ غیرصفر باشد، آنگاه داریم:

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{\sum_{i=0}^{N} b_i\, x[n-i]-\sum_{k=1}^{M} a_k\, y[n-k]\right\}$$

سه خاصیت بارز یک سیستم IIR:

۱. خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی در همان لحظه و لحظات قبل به مقادیر قبلی خروجی نیز بستگی دارد.
۲. در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود دارد.
۳. عرض پاسخ ضربهٔ این سیستم‌ها نامحدود است.

# کانولوشن برای سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

| | |
|---|---|
| **تعریف کانولوشن** | |
| | $x(t)$ یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)$ و خروجی $y(t)$<br>$x[n]$ یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ و خروجی $y[n]$ |
| **انتگرال کانولوشن** | $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$ |
| **جمع کانولوشن** | $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k-n]h[k]$ |
| **خواص** | |
| **عرض کانولوشن** | اگر $x[n]/x(t)$ در خارج از فاصلهٔ $\left[a_1\,,\,b_1\right]$ و $h[n]/h(t)$ در خارج از فاصلهٔ $\left[a_2\,,\,b_2\right]$ متحد با صفر باشند، آنگاه حاصل کانولوشن آن‌ها در خارج از فاصلهٔ $\left[a_1+a_2\,,\,b_1+b_2\right]$ متحد با صفر است. |
| **جابه‌جایی** | $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$<br>$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$ |
| **شرکت‌پذیری** | $x(t)*\left(h_1(t)*h_2(t)\right)=\left(x(t)*h_1(t)\right)*h_2(t)$<br>$x(t)*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]$ |
| **توزیع‌پذیری روی جمع** | $x(t)*\left(h_1(t)+h_2(t)\right)=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$<br>$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$ |
| **مشتق**<br>**نمو** | $if\ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=x(t)*\frac{dh(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}*h(t)$<br>$if\ y[n]=x[n]*h[n]\Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]*\left(h[n]-h[n-1]\right)=\left(x[n]-x[n-1]\right)*h[n]$ |
| **سطح زیر منحنی**<br>**جمع نمونه‌ها** | $A_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt\quad,\quad if\ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow A_y=A_x\,A_h$<br>$A_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\quad,\quad if\ y[n]=x[n]*h[n]\Rightarrow A_y=A_x\,A_h$ |
| **گشتاور مرتبهٔ اول** | $m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,x(t)\,dt\quad,\quad if\ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow m_y=m_x\,A_h+A_x\,m_h$<br>$m_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n\,x[n]\quad,\quad if\ y[n]=x[n]*h[n]\Rightarrow m_y=m_x\,A_h+A_x\,m_h$ |
| **مرکز ثقل** | $\eta_x=\frac{m_x}{A_x}\quad,\quad if\ y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow\eta_y=\eta_x+\eta_h$<br>$\eta_x=\frac{m_x}{A_x}\quad,\quad if\ y[n]=x[n]*h[n]\Rightarrow\eta_y=\eta_x+\eta_h$ |

## سری‌ها و تبدیلات در یک نگاه

| | پیوسته در زمان | | | گسسته در زمان | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| سری فوریه | مکان s: نقاط منفصل رو محور $j\omega$ | $s=jk\omega_0$ | سیگنال‌های پایه: $e^{jk\omega_0 t}$ | مکان z: نقاط منفصل رو دایرهٔ واحد | $z=e^{jk\omega_0}$ | سیگنال‌های پایه: $e^{jk\omega_0 n}$ |
| | $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$<br>پیوسته در زمان<br>متناوب در زمان | | $a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$<br>گسسته در فرکانس<br>نامتناوب در فرکانس | $x[n]=\sum_{k:\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n}$<br>گسسته در زمان<br>متناوب در زمان | دوگانی | $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n:\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\omega_0 n}$<br>گسسته در فرکانس<br>متناوب در فرکانس |
| تبدیل فوریه | پیوسته در زمان<br>نامتناوب در زمان<br>$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ | دوگانی | پیوسته در فرکانس<br>نامتناوب در فرکانس<br>$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ | دوگانی<br>گسسته در زمان<br>نامتناوب در زمان<br>$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}x(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$ | | پیوسته در فرکانس<br>متناوب در فرکانس<br>$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ |
| | مکان s: کل محور $j\omega$ | $s=j\omega$ | سیگنال‌های پایه: $e^{j\omega t}$ | مکان z: کل دایرهٔ واحد | $z=e^{j\omega}$ | سیگنال‌های پایه: $e^{j\omega n}$ |
| تبدیلات لاپلاس و z | $x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$<br>انتگرال‌گیری روی خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma$ در ROC | | دوطرفه $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$<br>یک‌طرفه $X(s)=\int_{0}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ | $x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$<br>انتگرال‌گیری روی مسیر دایره به شعاع r و<br>مرکز مبدأ در خلاف جهت ساعت در ROC | | دوطرفه $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$<br>یک‌طرفه $X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}$ |
| | مکان s: کل صفحهٔ مختلط | $s=\sigma+j\omega$ | سیگنال‌های پایه: $e^{st}$ | مکان z: کل صفحهٔ مختلط | $z=re^{j\omega}$ | سیگنال‌های پایه: $z^n$ |
| | تبدیل لاپلاس | | | تبدیل z | | |

**۱. دوگانی در تبدیل فوریهٔ پیوسته در زمان بین رابطهٔ حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس:**

$$x(t)\xrightarrow{\text{Fourier Transform}}X(\omega)\ \Rightarrow\ X(t)\xrightarrow{\text{Fourier Transform}}2\pi x(-\omega)$$

**۲. دوگانی در سری فوریهٔ گسسته در زمان بین رابطهٔ حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس:**

$$x[n]\xrightarrow{\text{Fourier Series Coefficients}}a_k=y[k]\ \Rightarrow\ y[n]\xrightarrow{\text{Fourier Series Coefficients}}b_k=\frac{1}{N}x[-k]$$

**۳. دوگانی بین ضرایب سری فوریهٔ یک سیگنال پیوسته در زمان و رابطهٔ حوزهٔ زمان تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان:**

$$x[n]\xrightarrow{\text{Discrete Fourier Transform}}X(e^{j\omega})\ \Rightarrow\ X(e^{jt})\xrightarrow{\text{Continuous Fourier Series' Coefficients}}a_k=x[-k]$$

# تبدیل لاپلاس

ارتباط تبدیل لاپلاس با تبدیل فوریه: $X(s)=L\{x(t)\}=F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس آن است که $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}\,dt<\infty$

تعریف ناحیهٔ همگرایی (ROI) تبدیل لاپلاس: محدوده‌ای از صفحهٔ مختلط که به ازای آن تبدیل لاپلاس برای یک سیگنال پیوسته در زمان وجود دارد را ناحیهٔ همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس آن سیگنال می‌نامند.

نکته: اگر سیگنالی تبدیل فوریه پیوسته در زمان داشته باشد، آنگاه لزوماً تبدیل لاپلاس نیز دارد (زیرا حداقل $\sigma=0$ جزء ROC آن است). اما اگر سیگنالی تبدیل لاپلاس داشته باشد، تنها در صورتی تبدیل فوریه پیوسته در زمان دارد که ROC تبدیل لاپلاس آن شامل محور $j\omega$ باشد.

نکته: در تبدیل لاپلاس یک‌طرفه موضوعی تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود انتگرال در تبدیل لاپلاس یک‌طرفه است که از صفر تا $+\infty$ است. لذا در هنگام تبدیل لاپلاس معکوس هیچگونه ابهامی وجود نداشته و سیگنال واقع در $t\geq 0$ است.

**خواص ناحیهٔ همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس**:

۱. ROC تبدیل لاپلاس در صفحهٔ s از نوارهای موازی با محور $j\omega$ تشکیل می‌شود.

۲. ROC تبدیل لاپلاس‌های گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شود.

۳. اگر $x(t)$ یک سیگنال با عرض محدود و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن تمام صفحهٔ s است. با توجه به خاصیت ۲، تبدیل لاپلاس با عرض محدود فاقد قطب است.

۴. اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی باشد و خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر s با $\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$ نیز در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار دارند. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن بزرگترین است) تا $+\infty$ است.

۵. اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت چپی باشد و خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر s با $\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$ نیز در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار دارند. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت چپی بین کوچکترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن کوچکترین است) تا $-\infty$ است.

۶. اگر $x(t)$ یک سیگنال دوطرفه باشد و خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن نواری در صفحهٔ s و شامل خط $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma_0$ است. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال دوطرفه بین دو قطب متوالی (دو قطبی که قسمت‌های حقیقی آن‌ها متوالی است) است.

# تبدیل z

ارتباط تبدیل z با تبدیل فوریه: $X[z]=Z\{x[n]\}=F\{x[n]r^{-n}\}$

شرط کافی برای وجود تبدیل z آن است که $x[n]r^{-n}$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|r^{-n}<\infty$

تعریف ناحیهٔ همگرایی (ROI) تبدیل z: محدوده‌ای از صفحهٔ مختلط که به ازای آن تبدیل z برای یک سیگنال گسسته در زمان وجود دارد را ناحیهٔ همگرایی (ROC) تبدیل z آن سیگنال می‌نامند.

نکته: اگر سیگنالی تبدیل فوریه گسسته در زمان داشته باشد، آنگاه لزوماً تبدیل z نیز دارد (زیرا حداقل $r=1$ جزء ROC آن است). اما اگر سیگنالی تبدیل z داشته باشد، تنها در صورتی تبدیل فوریه گسسته در زمان دارد که ROC تبدیل z آن شامل دایرهٔ واحد باشد.

نکته: در تبدیل z یک‌طرفه موضوعی تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود سیگما در تبدیل z یک‌طرفه است که از صفر تا $+\infty$ است. لذا در هنگام تبدیل z معکوس هیچگونه ابهامی وجود نداشته و سیگنال واقع در $n\geq 0$ است.

**خواص ناحیهٔ همگرایی (ROC) تبدیل z:**

۱. ROC تبدیل z در صفحهٔ مختلط از دوایر و حلقه‌هایی به مرکز مبدأ مختصات تشکیل می‌شود.

۲. ROC تبدیل zهای گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شود.

۳. اگر $x[n]$ یک سیگنال با عرض محدود و مطلقاً جمع‌پذیر باشد، آنگاه ROC تبدیل z آن تمام صفحهٔ مختلط غیر از $z=0$ یا $z=\infty$ یا $z=0$ و $z=\infty$ است. با توجه به خاصیت ۲، تبدیل z با عرض محدود فاقد قطب است.

فرض شود که $x[n]$ یک سیگنال با عرض محدود در بازهٔ زمانی $\left[N_1,N_2\right]$ باشد، آنگاه تبدیل z آن بدین شکل خواهد بود:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]z^{-n}=x[N_1]z^{-N_1}+...+x[N_2]z^{-N_2}$$

در این رابطه سه وضعیت ممکن است اتفاق بیوفتد:

**الف)** اگر $N_1<0$ و $N_2<0$ باشند، آنگاه چندجمله‌ای $X(z)$ شامل جمله‌های z به توان اعداد مثبت است. بدیهی است که در این حالت $z=0$ در ROC است ولی $z=\infty$ نمی‌تواند در ROC باشد.

**ب)** اگر $N_1<0$ و $N_2>0$ باشند، آنگاه چندجمله‌ای $X(z)$ شامل جمله‌های z به توان هم اعداد مثبت و هم اعداد منفی است. بدیهی است که در این حالت $z=0$ و $z=\infty$ هیچکدام نمی‌توانند در ROC باشند.

**ج)** اگر $N_1>0$ و $N_2>0$ باشند، آنگاه چندجمله‌ای $X(z)$ شامل جمله‌های z به توان اعداد منفی است. بدیهی است که در این حالت $z=\infty$ در ROC است ولی $z=0$ نمی‌تواند در ROC باشد.

۴. اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت راستی باشد و دایرهٔ $|z|=r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $|z|>r_0$ نیز در ROC تبدیل z آن قرار دارند؛ غیر از $z=\infty$ وقتی که $N_1<0$ است. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل z یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که دامنهٔ آن بزرگترین است) تا $+\infty$ است.

۵. اگر $x[n]$ یک سیگنال سمت چپی باشد و دایرهٔ $|z|=r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر z با $|z|<r_0$ نیز در ROC تبدیل z آن قرار دارند؛ غیر از $z=0$ وقتی که $N_2>0$ است. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل z یک سیگنال سمت چپی بین مبدأ مختصات تا کوچکترین قطب (قطبی که دامنهٔ آن کوچکترین است) است.

۶. اگر $x[n]$ یک سیگنال دوطرفه باشد و دایرهٔ $|z|=r_0$ در ROC تبدیل z آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC تبدیل z آن حلقه‌ای در صفحهٔ مختلط و شامل دایرهٔ $|z|=r_0$ است. با توجه به خاصیت ۲، ROC تبدیل z یک سیگنال دوطرفه بین دو قطب متوالی (دو قطبی که دامنهٔ آن‌ها متوالی است) است.

## خواص سری فوریهٔ پیوسته در زمان

| خاصیت | سیگنال پیوستهٔ متناوب | ضرایب سری فوریه |
|---|---|---|
| | $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب $T_0$<br>و فرکانس پایهٔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ | $a_k$ |
| | $y(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب $T_0$<br>و فرکانس پایهٔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ | $b_k$ |
| خطی بودن | $A\,x(t) + B\,y(t)$ | $A\,a_k + B\,b_k$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x(t - t_0)$ | $a_k\, e^{-jk\omega_0 t_0}$ |
| جابه‌جایی فرکانسی | $e^{jM\omega_0 t}\, x(t)$ | $a_{k-M}$ |
| وارونگی زمانی | $x(-t)$ | $a_{-k}$ |
| تغییر مقیاس زمانی | $x(mt) \quad m > 0$<br>متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $\dfrac{T_0}{m}$ و<br>فرکانس پایهٔ $m\omega_0$ | $a_k$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*(t)$ | $a_{-k}^*$ |
| کانولوشن زمانی | $\int_{T_0} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$ | $T_0\, a_k\, b_k$ |
| ضرب زمانی | $x(t)\, y(t)$ | $\sum_{l:-\infty}^{+\infty} a_l\, b_{k-l}$ |
| مشتق‌گیری زمانی | $\dfrac{d\,x(t)}{dt}$ | $jk\omega_0\, a_k$ |
| انتگرال‌گیری زمانی | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$<br>$x(t)$ فاقد مولفهٔ DC ( $a_0 = 0$ ) | $\dfrac{a_k}{jk\omega_0} \quad k \neq 0$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی | $x(t)$ حقیقی<br>$x(t) = x^*(t)$ | $a_k = a_{-k}^*$<br>$\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\} \quad \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert$<br>$\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\} \quad \angle a_k = -\angle a_{-k}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج | $x(t)$ حقیقی و زوج<br>$x(t) = x^*(t) = x(-t)$ | $a_k$ حقیقی و زوج<br>$a_k = a_k^* = a_{-k}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد | $x(t)$ حقیقی و فرد<br>$x(t) = x^*(t) = -x(-t)$ | $a_k$ موهومی و فرد<br>$a_k = -a_k^* = -a_{-k}$ |
| تجزیهٔ زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی | $x(t)$ حقیقی<br>$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ | $a_k = \mathrm{Re}\{a_k\} + j\,\mathrm{Im}\{a_k\} = even\{a_k\} + odd\{a_k\}$<br>ضرایب $x_e(t)$ برابر است با: $\mathrm{Re}\{a_k\} = even\{a_k\}$<br>ضرایب $x_o(t)$ برابر است با: $j\,\mathrm{Im}\{a_k\} = odd\{a_k\}$ |

| |
|---|
| رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های متناوب (توان متوسط سیگنال پیوستهٔ متناوب): $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left| x(t) \right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| a_k \right|^2$ |

## ضرایب سری فوریه برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

| سیگنال | تبدیل |
|---|---|
| $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$ | $a_k = \frac{1}{T}$ |
| $x(t) = 1$ | $a_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ |
| $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ | $a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$ |
| $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ | $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$ |
| $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ | $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=1 \\ -\frac{1}{2j} & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$ |
| موج مربعی متناوب: $x(t) = \begin{cases} 1 & \|t\| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < \|t\| \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t-T) = x(t)$ | $a_k = \frac{\sin\left(k\omega_0 T_1\right)}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \sin c\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$ |

# خواص سری فوریهٔ گسسته در زمان

| خاصیت | سیگنال گسستهٔ متناوب | ضرایب سری فوریه |
|---|---|---|
| | $x[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب $N_0$<br>و فرکانس پایهٔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ | $a_k$ متناوب با دورهٔ تناوب $N_0$ |
| | $y[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب $N_0$<br>و فرکانس پایهٔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ | $b_k$ متناوب با دورهٔ تناوب $N_0$ |
| خطی بودن | $A\,x[n] + B\,y[n]$ | $A\,a_k + B\,b_k$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x[n-n_0]$ | $a_k\, e^{-jk\omega_0 n_0}$ |
| جابه‌جایی فرکانسی | $e^{jM\omega_0 n}\, x[n]$ | $a_{k-M}$ |
| وارونگی زمانی | $x[-n]$ | $a_{-k}$ |
| انبساط زمانی | $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & n = a\,m \\ 0 & n \neq a\,m \end{cases}$ | $\dfrac{1}{m} a_k$<br>متناوب با دورهٔ تناوب $m\,N_0$ و فرکانس پایهٔ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{m\,N_0}$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*[n]$ | $a_{-k}^*$ |
| کانولوشن زمانی | $\sum_{r:\langle N_0 \rangle} x[r]\,y[n-r]$ | $N_0\, a_k\, b_k$ |
| ضرب زمانی | $x[n]\,y[n]$ | $\sum_{l:\langle N_0 \rangle} a_l\, b_{k-l}$ |
| تفاضل‌گیری زمانی (تفاضل اول) | $x[n] - x[n-1]$ | $(1 - e^{-jk\omega_0})\, a_k$ |
| جمع انباره‌ای | $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$<br>$x[n]$فاقد مولفهٔ DC ( $a_0 = 0$ ) | $\dfrac{a_k}{1 - e^{-jk\omega_0}}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی | $x[n]$ حقیقی<br>$x[n] = x^*[n]$ | $a_k = a_{-k}^*$<br>$\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\} \quad \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert$<br>$\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\} \quad \angle a_k = -\angle a_{-k}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج | $x[n]$ حقیقی و زوج<br>$x[n] = x^*[n] = x[-n]$ | $a_k$ حقیقی و زوج<br>$a_k = a_k^* = a_{-k}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد | $x[n]$ حقیقی و فرد<br>$x[n] = x^*[n] = -x[-n]$ | $a_k$ موهومی و فرد<br>$a_k = -a_k^* = -a_{-k}$ |
| تجزیهٔ زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی | $x[n]$ حقیقی<br>$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ | $a_k = \mathrm{Re}\{a_k\} + j\,\mathrm{Im}\{a_k\} = even\{a_k\} + odd\{a_k\}$<br>ضرایب $x_e[n]$ برابر است با: $\mathrm{Re}\{a_k\} = even\{a_k\}$<br>ضرایب $x_o[n]$ برابر است با: $j\,\mathrm{Im}\{a_k\} = odd\{a_k\}$ |

| | |
|---|---|
| رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های متناوب (توان متوسط سیگنال گسستهٔ متناوب): | $P_x = \frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle} \left\|x[n]\right\|^2 = \sum_{k:\langle N_0\rangle}\left\|a_k\right\|^2$ |
| مجموع نمونه‌های سیگنال (مقدار DC سیگنال گسستهٔ متناوب): | $a_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle} x[n]$ |
| مجموع ضرایب سری فوریه: | $x[0] = \sum_{k:\langle N_0\rangle} a_k$ |
| ضریب $\frac{N_0}{2}$ به جای $N_0$ زوج: | $a_{\frac{N_0}{2}} = \frac{1}{N_0}\sum_{n:\langle N_0\rangle}(-1)^n x[n]$ |

## ضرایب سری فوریه برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

| سیگنال | تبدیل |
|---|---|
| $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$ | به ازای کلیهٔ kها $a_k = \frac{1}{N}$ |
| $x[n]=1$ | $a_k = \begin{cases} 1 & k=0, \pm N_0, \pm 2N_0, \ldots \\ 0 & others \end{cases}$ |
| $x[n] = e^{j\omega_0 n}$<br>فرض: $\omega_0$ مضرب گویایی از $\pi$ | $a_k = \begin{cases} 1 & k=m, m\pm N_0, m\pm 2N_0, \ldots \\ 0 & others \end{cases}$ $\omega_0 = \frac{2m\pi}{N_0}$ |
| $x[n] = \cos(\omega_0 n)$<br>فرض: $\omega_0$ مضرب گویایی از $\pi$ | $\omega_0 = \frac{2m\pi}{N_0}$<br>$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=\pm m, \pm m\pm N_0, \pm m\pm 2N_0, \ldots \\ 0 & others \end{cases}$ |
| $x[n] = \sin(\omega_0 n)$<br>فرض: $\omega_0$ مضرب گویایی از $\pi$ | $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=m, m\pm N_0, m\pm 2N_0, \ldots \\ -\frac{1}{2j} & k=-m, -m\pm N_0, -m\pm 2N_0, \ldots \\ 0 & others \end{cases}$ $\omega_0 = \frac{2m\pi}{N_0}$ |
| موج مربعی متناوب:<br>$x[n] = \begin{cases} 1 & \|n\| \le N_1 \\ 0 & N_1 < \|n\| \le \frac{N}{2} \end{cases}$<br>$x[n+N] = x[n]$ | $a_k = \begin{cases} \frac{2N_1+1}{N} & k=0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \frac{\sin\left(\frac{2k\pi\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)}{N\sin\left(\frac{2k\pi}{2N}\right)} & k\neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \end{cases}$ |

## خواص تبدیل فوریهٔ پیوسته در زمان

| خاصیت | سیگنال پیوستهٔ نامتناوب | تبدیل فوریه |
|---|---|---|
| | $x(t)$ | $X(j\omega)$ |
| | $y(t)$ | $Y(j\omega)$ |
| خطی بودن | $a\,x(t)+b\,y(t)$ | $a\,X(j\omega)+b\,Y(j\omega)$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x(t-t_0)$ | $e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$ |
| جابه‌جایی فرکانسی | $e^{j\omega_0 t}\,x(t)$ | $X(j(\omega-\omega_0))$ |
| وارونگی زمانی | $x(-t)$ | $X(-j\omega)$ |
| تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{\omega}{a})$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*(t)$ | $X^*(-j\omega)$ |
| کانولوشن زمانی | $x(t)*y(t)$ | $X(j\omega)Y(j\omega)$ |
| ضرب زمانی | $x(t)\,y(t)$ | $\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$ |
| مشتق‌گیری زمانی | $\frac{d\,x(t)}{d\,t}$ | $j\omega X(j\omega)$ |
| انتگرال‌گیری زمانی | $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$ | $\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$ |
| مشتق‌گیری فرکانسی | $-jt\,x(t)$ | $\frac{d\,X(j\omega)}{d\,\omega}$ |
| انتگرال‌گیری فرکانسی | $-\frac{x(t)}{jt}+\pi\,x(0)\delta(t)$ | $\int_{\omega}^{+\infty}X(u)\,du$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی | $x(t)$ حقیقی<br>$x(t)=x^*(t)$ | $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$<br>$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\quad$ $\lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert$<br>$\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$ $\quad$ $\angle X(j\omega)=-\angle X(-j\omega)$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج | $x(t)$ حقیقی و زوج<br>$x(t)=x^*(t)=x(-t)$ | $X(j\omega)$ حقیقی و زوج<br>$X(j\omega)=X^*(j\omega)=X(-j\omega)$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد | $x(t)$ حقیقی و فرد<br>$x(t)=x^*(t)=-x(-t)$ | $X(j\omega)$ موهومی و فرد<br>$X(j\omega)=-X^*(j\omega)=-X(-j\omega)$ |
| تجزیهٔ زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی | $x(t)$ حقیقی<br>$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$ | $X(j\omega)=\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=X_e(j\omega)+X_o(j\omega)$<br>تبدیل فوریهٔ $x_e(t)$ برابر است با: $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}=X_e(j\omega)$<br>تبدیل فوریهٔ $x_o(t)$ برابر است با: $j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}=X_o(j\omega)$ |
| رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب (انرژی سیگنال پیوستهٔ نامتناوب): | | $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert x(t)\rvert^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2\,d\omega$ |
| سطح زیر منحنی سیگنال (مقدار DC سیگنال پیوستهٔ نامتناوب، $\omega=0$) | | $X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt$ |
| سطح زیر منحنی تبدیل فوریه: | | $x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\,d\omega$ |

# تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

| سیگنال | تبدیل |
|---|---|
| $x(t)=\delta(t)$ | $X(j\omega)=1$ |
| $x(t)=\delta(t-t_0)$ | $X(j\omega)=e^{-j\omega t_0}$ |
| $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$ | $X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2k\pi}{T})$ |
| $x(t)=u(t)$ | $X(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ |
| $x(t)=e^{-\alpha t}u(t) \quad \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$ | $X(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega}$ |
| $x(t)=te^{-\alpha t}u(t) \quad \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$ | $X(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^2}$ |
| $x(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t) \quad \mathrm{Re}\{\alpha\}>0$ | $X(j\omega)=\frac{1}{(\alpha+j\omega)^n}$ |
| $x(t)=1$ | $X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)$ |
| $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ | $X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ |
| $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ | $X(j\omega)=\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)$ |
| $x(t)=\sin(\omega_0 t)$ | $X(j\omega)=\frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right)$ |
| $x(t)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}=\frac{W}{\pi}\sin c\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$ | $X(j\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert\le W\\ 0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$ |
| موج مربعی<br>$x(t)=\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert\le T\\ 0 & \lvert t\rvert>T\end{cases}$ | $X(j\omega)=\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}=2T\sin c\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$ |
| موج مثلثی<br>$x(t)=\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert t\rvert}{T} & \lvert t\rvert\le T\\ 0 & \lvert t\rvert>T\end{cases}$ | $X(j\omega)=T\sin c^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$ |

# خواص تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان

| خاصیت | سیگنال گسستهٔ نامتناوب | تبدیل فوریه |
|---|---|---|
| | $x[n]$ | $X(e^{j\omega})$ متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ |
| | $y[n]$ | $Y(e^{j\omega})$ متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ |
| خطی بودن | $a\,x[n]+b\,y[n]$ | $a\,X(e^{j\omega})+b\,Y(e^{j\omega})$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x[n-n_0]$ | $e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$ |
| جابه‌جایی فرکانسی | $e^{j\omega_0 n}\,x[n]$ | $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ |
| وارونگی زمانی | $x[-n]$ | $X(e^{-j\omega})$ |
| انبساط زمانی | $x_{(m)}[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{m}] & n=am \\ 0 & n\neq am \end{cases}$ | $X(e^{jm\omega})$ |
| انقباض زمانی | $x[M\,n]$ | $\frac{1}{M}\sum_{K=0}^{M-1}X(e^{\frac{j(\omega+2k\pi)}{M}})$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*[n]$ | $X^*(e^{-j\omega})$ |
| کانولوشن زمانی | $x[n]*y[n]$ | $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ |
| ضرب زمانی | $x[n]\,y[n]$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$ |
| تفاضل‌گیری زمانی (تفاضل اول) | $x[n]-x[n-1]$ | $(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$ |
| جمع انباره‌ای | $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ | $\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$ |
| مشتق‌گیری فرکانسی | $n\,x[n]$ <br> $-j\,n\,x[n]$ | $j\frac{d\,X(e^{j\omega})}{d\,\omega}$ <br> $\frac{d\,X(e^{j\omega})}{d\,\omega}$ |
| | $n^k\,x[n]$ | $j^k\,\frac{d^k\,X(e^{j\omega})}{d\,\omega^k}$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی | $x[n]$ حقیقی <br> $x[n]=x^*[n]$ | $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$ <br> $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=\mathrm{Re}\{X(e^{-j\omega})\}$ $\quad \lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ <br> $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=-\mathrm{Im}\{X(e^{-j\omega})\}$ $\quad \angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج | $x[n]$ حقیقی و زوج <br> $x[n]=x^*[n]=x[-n]$ | $X(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج <br> $X(e^{j\omega})=X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$ |
| تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد | $x[n]$ حقیقی و فرد <br> $x[n]=x^*[n]=-x[-n]$ | $X(e^{j\omega})$ موهومی و فرد <br> $X(e^{j\omega})=-X^*(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})$ |
| تجزیهٔ زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی | $x[n]$ حقیقی <br> $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$ | $X(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}+j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$ <br> تبدیل فوریهٔ $x_e[n]$ برابر است با: $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=X_e(e^{j\omega})$ <br> تبدیل فوریهٔ $x_o[n]$ برابر است با: $j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}=X_o(e^{j\omega})$ |

| | |
|---|---|
| رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب (انرژی سیگنال گسستهٔ نامتناوب): | $E_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\|x[n]\right\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left\|X(e^{j\omega})\right\|^2 d\omega$ |
| مجموع نمونه‌های سیگنال (مقدار DC سیگنال گسستهٔ نامتناوب، $\omega=0$) | $X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]$ |
| مقدار تبدیل فوریه در $\omega=\pi$: $X(e^{j\pi})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x[n]$ | سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه: $x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$ |

## تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

| سیگنال | تبدیل |
|---|---|
| $x[n]=\delta[n]$ | $X(e^{j\omega})=1$ |
| $x[n]=\delta[n-n_0]$ | $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}$ |
| $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$ | $X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\frac{2k\pi}{N})$ |
| $x[n]=u[n]$ | $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2k\pi)$ |
| $x[n]=\alpha^n u[n]\quad \|\alpha\|<1$ | $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ |
| $x[n]=(n+1)\alpha^n u[n]\quad \|\alpha\|<1$ | $X(e^{j\omega})=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$ |
| $x[n]=\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\alpha^n u[n]\quad \|\alpha\|<1$ | $X(e^{j\omega})=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^r}$ |
| $x[n]=1$ | $X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$ |
| $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ | $X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$ |
| $x[n]=\cos(\omega_0 n)$ | $X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)+\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)\right)$ |
| $x[n]=\sin(\omega_0 n)$ | $X(e^{j\omega})=\frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)-\delta(\omega+\omega_0-2k\pi)\right)$ |
| $x[n]=\frac{\sin(Wn)}{\pi n}=\frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$<br>$0<W<\pi$ | $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & 0\le\|\omega\|\le W\\ 0 & W\le\|\omega\|\le\pi\end{cases}$ $X(e^{j\omega})$ متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi$ |
| موج مربعی متناوب: $x[n+N]=x[n]$<br>$x[n]=\begin{cases}1 & \|n\|\le N_1\\ 0 & N_1<\|n\|\le\frac{N}{2}\end{cases}$ | $X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(\omega-\frac{2k\pi}{N})$<br>$a_k$ مطابق جدول ضرایب سری فوریهٔ برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان |
| موج مربعی:<br>$x[n]=\begin{cases}1 & \|n\|\le N\\ 0 & \|n\|>N\end{cases}$ | $X(e^{j\omega})=\frac{\sin\left(\omega(N+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ |

# خواص تبدیل لاپلاس

| خاصیت | سیگنال پیوسته | تبدیل لاپلاس | ROC |
|---|---|---|---|
| | $x(t)$ | $X(s)$ | $R: \alpha < \text{Re}\{s\} < \beta$ |
| | $x_1(t)$ | $X_1(s)$ | $R_1$ |
| | $x_2(t)$ | $X_2(s)$ | $R_2$ |
| خطی بودن | $a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$ | $a\,X_1(s) + b\,X_2(s)$ | حداقل $R_1 \bigcap R_2$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x(t-t_0)$ | $e^{-st_0} X(s)$ | $R$ |
| جابه‌جایی در حوزهٔ s | $e^{s_0 t}\, x(t)$ | $X(s-s_0)$ | $\alpha + \text{Re}\{s_0\} < \text{Re}\{s\} < \beta + \text{Re}\{s_0\}$ |
| تغییر مقیاس زمانی | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{s}{a})$ | $\alpha a < \text{Re}\{s\} < \beta a \quad a > 0$<br>$\beta a < \text{Re}\{s\} < \alpha a \quad a < 0$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*(t)$ | $X^*(s^*)$ | $R$ |
| کانولوشن در حوزهٔ زمان | $x_1(t) * x_2(t)$ | $X_1(s)\, X_2(s)$ | حداقل $R_1 \bigcap R_2$ |
| مشتق‌گیری زمانی | $\frac{d\,x(t)}{d\,t}$ | $s\,X(s)$ | حداقل $R$ |
| مشتق در حوزهٔ s | $-t\,x(t)$ | $\frac{d\,X(s)}{d\,s}$ | $R$ |
| انتگرال‌گیری زمانی | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ | $\frac{X(s)}{s}$ | حداقل $R \bigcap \{ \text{Re}\{s\} > 0 \}$ |

**قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی**: اگر به ازای $t < 0$ داشته باشیم $x(t) = 0$ و $x(t)$ در $t = 0$ ضربه و توابع تکین مرتبهٔ بالاتر نداشته باشد، آنگاه:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\,X(s) \quad , \quad x(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,X(s)$$

# تبدیل لاپلاس برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

| ROC | تبدیل | سیگنال |
|---|---|---|
| تمام صفحهٔ مختلط | $X(s)=1$ | $x(t)=\delta(t)$ |
| تمام صفحهٔ مختلط | $X(s)=e^{-sT}$ | $x(t)=\delta(t-T)$ |
| تمام صفحهٔ مختلط | $X(s)=s^n$ | $x(t)=\dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>0$ | $X(s)=\dfrac{1}{s^n}$ | $x(t)=\underbrace{u(t)*...*u(t)}_{n\ times}$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>0$ | $X(s)=\dfrac{1}{s}$ | $x(t)=u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}<0$ | $X(s)=\dfrac{1}{s}$ | $x(t)=-u(-t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>0$ | $X(s)=\dfrac{1}{s^n}$ | $x(t)=\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}<0$ | $X(s)=\dfrac{1}{s^n}$ | $x(t)=-\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$ | $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{1}{s+\alpha}$ | $x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)^n}$ | $x(t)=\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}<-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{1}{(s+\alpha)^n}$ | $x(t)=-\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>0$ | $X(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ | $x(t)=\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>0$ | $X(s)=\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ | $x(t)=\sin(\omega_0 t)\,u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ | $x(t)=e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$ |
| $\mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$ | $X(s)=\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ | $x(t)=e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$ |

# خواص تبدیل z

| خاصیت | سیگنال گسسته | تبدیل z | ROC |
|---|---|---|---|
| | $x[n]$ | $X(z)$ | $R_x: \alpha < \lvert z \rvert < \beta$ |
| | $x_1[n]$ | $X_1(z)$ | $R_1$ |
| | $x_2[n]$ | $X_2(z)$ | $R_2$ |
| خطی بودن | $a\,x_1[n] + b\,x_2[n]$ | $a\,X_1(z) + b\,X_2(z)$ | حداقل $R_1 \bigcap R_2$ |
| جابه‌جایی زمانی | $x[n-n_0]$ | $z^{-n_0} X(z)$ | $R_x \pm \begin{Bmatrix} z=0 \\ z=\infty \end{Bmatrix}$ |
| تغییر مقیاس در حوزهٔ z | $e^{j\omega_0 n}\, x[n]$ | $X(e^{-j\omega_0} z)$ | $R_x$ |
| | $z_0^n\, x[n]$ | $X(\frac{z}{z_0})$ | $Z_0 R_x: \lvert z_0 \rvert \alpha < \lvert z \rvert < \lvert z_0 \rvert \beta$ |
| | $a^n\, x[n]$ | $X(\frac{z}{a})$ | $a R_x: \lvert a \rvert \alpha < \lvert z \rvert < \lvert a \rvert \beta$ |
| وارونگی زمانی | $x[-n]$ | $X(z^{-1})$ | $R_x^{-1}: \frac{1}{\beta} < \lvert z \rvert < \frac{1}{\alpha}$ |
| انبساط زمانی | $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}] & n = a\,m \\ 0 & n \neq a\,m \end{cases}$ | $X(z^m)$ | $R_x^{\frac{1}{m}}: \alpha < \lvert z \rvert^m < \beta$ |
| انقباض زمانی | $x[M\,n]$ | $\frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} X(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2k\pi}{M}})$<br>$X(e^{j\omega}) = 0 \quad \omega_c < \lvert \omega \rvert < \pi$ | $R_x^M: \alpha < \lvert z \rvert^{\frac{1}{M}} < \beta$ |
| مزدوج‌گیری | $x^*[n]$ | $X^*(z^*)$ | $R_x$ |
| کانولوشن در حوزهٔ زمان | $x_1[n] * x_2[n]$ | $X_1(z) X_2(z)$ | حداقل $R_1 \bigcap R_2$ |
| تفاضل اول | $x[n] - x[n-1]$ | $(1-z^{-1}) X(z)$ | حداقل $R_x \bigcap \{\lvert z \rvert > 0\}$ |
| جمع انباره‌ای | $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ | $\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$ | حداقل $R_x \bigcap \{\lvert z \rvert > 1\}$ |
| مشتق در حوزهٔ z | $n\,x[n]$ | $-z \frac{d\,X(z)}{d\,z}$ | $R_x$ |
| **قضایای مقدار اولیه**: اگر به ازای $n<0$ داشته باشیم $x[n]=0$، آنگاه:<br>$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) \quad , \quad x[1] = \lim_{z\to\infty} z(X(z) - x[0]) \quad , \quad x[2] = \lim_{z\to\infty} z^2 (X(z) - x[0] - z^{-1} x[1]) \quad ,\ldots$ | | | |
| قضیهٔ مقدار نهایی | $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) X(z)$ | | |
| مجموع نمونه‌های سیگنال | $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(z) \Big\rvert_{z=1}$ | | |

## تبدیل z برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

| سیگنال | تبدیل | ROC |
|---|---|---|
| $x[n]=\delta[n]$ | $X(z)=1$ | تمام صفحهٔ مختلط |
| $x[n]=\delta[n-N]$ | $X(z)=z^{-N}$ | تمام صفحهٔ مختلط غیراز صفر (اگر $N>0$) یا $\infty$ ($N<0$) |
| $x[n]=u[n]$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert>1$ |
| $x[n]=-u[-n-1]$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert<1$ |
| $x[n]=\alpha^{n}u[n]$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert>\lvert\alpha\rvert$ |
| $x[n]=-\alpha^{n}u[-n-1]$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert<\lvert\alpha\rvert$ |
| $x[n]=n\alpha^{n}u[n]$ | $X(z)=\dfrac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^{2}}$ | $\lvert z\rvert>\lvert\alpha\rvert$ |
| $x[n]=-n\alpha^{n}u[-n-1]$ | $X(z)=\dfrac{\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^{2}}$ | $\lvert z\rvert<\lvert\alpha\rvert$ |
| $x[n]=\cos(\omega_0 n)\,u[n]$ | $X(z)=\dfrac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert>1$ |
| $x[n]=\sin(\omega_0 n)\,u[n]$ | $X(z)=\dfrac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert>1$ |
| $x[n]=r^{n}\cos(\omega_0 n)\,u[n]$ | $X(z)=\dfrac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert>r$ |
| $x[n]=r^{n}\sin(\omega_0 n)\,u[n]$ | $X(z)=\dfrac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^{2}z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert>r$ |