116 Prove or disprove

(a) $R.$ **if** b **then** P **else** Q **fi** $=$ **if** b **then** $R.P$ **else** $R.Q$ **fi**

§ Let binary variable b be the only variable, let it initially be $\bot$, and let $R = b{:=}\top$, let $P = b{:=}\top$, let $Q = b{:=}\bot$. Then

$R.$ **if** b **then** P **else** Q **fi**
$= \; b{:=}\top.$ **if** b **then** $b{:=}\top$ **else** $b{:=}\bot$ **fi**
$= \;$ **if** $b{:=}\top.\ b$ **then** $b{:=}\top.\ b{:=}\top$ **else** $b{:=}\top.\ b{:=}\bot$ **fi**
$= \;$ **if** $\top$ **then** $b{:=}\top$ **else** $b{:=}\bot$ **fi**
$= \; b{:=}\top$
$= \; b'$

But

if b **then** $R.P$ **else** $R.Q$ **fi**
$= \;$ **if** $\bot$ **then** $b{:=}\top.\ b{:=}\top$ **else** $b{:=}\top.\ b{:=}\bot$ **fi**
$= \; b{:=}\top.\ b{:=}\bot$
$= \; \neg b'$

(b) **if** b **then** $P \Rightarrow Q$ **else** $R \Rightarrow S$ **fi** $=$ **if** b **then** P **else** R **fi** $\Rightarrow$ **if** b **then** Q **else** S **fi**

§ This is a case distributive law.

(c) **if** b **then** $P.Q$ **else** $R.S$ **fi** $=$ **if** b **then** P **else** R **fi**. **if** b **then** Q **else** S **fi**

§ Let binary variable b be the only variable, let it initially be $\top$, let P be $b{:=}\bot$, Q be $b{:=}\top$, R be ok, and S be $b{:=}\bot$. Then the left side is

if b **then** $P.Q$ **else** $R.S$ **fi**
$= \;$ **if** $\top$ **then** $b{:=}\bot.\ b{:=}\top$ **else** $ok.\ b{:=}\bot$ **fi**
$= \; b{:=}\bot.\ b{:=}\top$
$= \; b'$

And the right side is

if b **then** P **else** R **fi**. **if** b **then** Q **else** S **fi**
$= \;$ **if** $\top$ **then** $b{:=}\bot$ **else** ok **fi**. **if** b **then** $b{:=}\top$ **else** $b{:=}\bot$ **fi**
$= \; b{:=}\bot.$ **if** b **then** $b{:=}\top$ **else** $b{:=}\bot$ **fi**
$= \;$ **if** $\bot$ **then** $b{:=}\top$ **else** $b{:=}\bot$ **fi**
$= \; b{:=}\bot$
$= \; \neg b'$