

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВЕТВЛЕННОЙ МОЛНИИ

Поздняк Ярослав Любимович, 2 курс ФРТК

## Вступление

Молния очень давно является объектом интереса со стороны человека. Ее опасные проявления были известны еще с глубокой древности. Несмотря на восприятие молнии как проявления высших сил, тем не менее, уже в античности были выявлены определенные закономерности в поражении объектов молнией. Еще Фалесом было описано, что молния чаще всего ударяет в высокие отдельно стоящие объекты, а в Средние века высокие храмы, расположенные, как правило на возвышенных местах, выполняли в этих случаях роль молниеотводов.

Развитие физики в XVII — XVIII веках позволило выдвинуть гипотезу о связи молнии и электричества а к началу XIX века большинство ученых уже не сомневались в электрической природе молнии и основными вопросами исследования стали механизм выработки электричества в грозовых облаках и параметры грозового разряда.

Но несмотря на то, что человечество на протяжении многих веков изучает это явление, полного описания процессов происходящих в грозовых облаках не существует по сей день, и в данной работы мы постараемся рассмотреть молнию только с точки зрения макропараметров.

## Методика

Представленная в данной работе модель молнии основана на макроскопической модели пробоя диэлектрика и не оперирует свойствами каналов: ширина, плотность заряда, ток. Несмотря на простоту формулировки задачи моделируются сложные структуры похожие на наблюдаемые электрические разряды.

Рассмотрим 3-х мерную сетку с шагом  $\delta = 10$  m с размерами  $N_x \times N_y \times N_z$  и множество точек инициации  $\{I_i\}^{I_N}$ ,  $I_i = (x_i, y_i, z_i, \varphi_i)$ , где  $(x_i, y_i, z_i)$  — координаты точки на данной сетке,  $\varphi_i$  — потенциал в данной точке.

Далее решим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

В качестве граничных условий выберем потенциалы на границах сетки и потенциалы в точках инициации.

Уравнение Пуассона решим итерационным методом:

$$\varphi_{i,j,k}^{p+1} = -\frac{4\pi\rho}{6\delta^3} + \frac{1}{6} \cdot \Lambda \varphi_{i,j,k}^p$$

, где оператор  $\Lambda$  определен следующим образом

$$\Lambda \varphi_{i,j,k}^p = \varphi_{i-1,j,k}^p + \varphi_{i+1,j,k}^p + \varphi_{i,j-1,k}^p + \varphi_{i,j+1,k}^p + \varphi_{i,j,k-1}^p + \varphi_{i,j,k+1}^p$$

для достижения точности  $\varepsilon$  требуется количество итераций порядка  $P$ , где

$$P = N_x N_y N_z \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Определив функцию  $\varphi_{i,j,k}$  можно ее линейно проэкстраполировать на каждую ячейку, получить  $\varphi(x, y, z)$  и найти  $\vec{E}(x, y, z) = -\nabla \varphi(x, y, z)$ . Добавим  $\vec{E}_{atm} = k_E \frac{U_0}{\delta \cdot N_y} \cdot \hat{y}$  к найденному  $\vec{E}$ ,  $U_0$  определим дальше по тексту,  $k_E$  - численный коэффициент.

Рассчитав поле в данной конфигурации точек инициации, перейдем к расчету вероятностей новых точек инициации.

Для каждой точки инициации  $I_i$  в направлении  $j$  вероятность расширения определим как

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{P} (\vec{E} \cdot \vec{n}_j - E_{\text{krit}})^\eta, & \text{for } \vec{E} \cdot \vec{n}_j - E_{\text{krit}} > 0 \\ 0, & \text{for } \vec{E} \cdot \vec{n}_j - E_{\text{krit}} \leq 0 \end{cases}$$

$$P = \sum_{i=1}^{I_n} \sum_{j=1}^{J_n} p_{i,j}$$

Где  $\vec{n}_j$  - единичный вектор направления расширения,  $E_{\text{krit}}$  - минимальная величина электрического поля, требующегося для расширения,  $\eta$  - численный параметр.

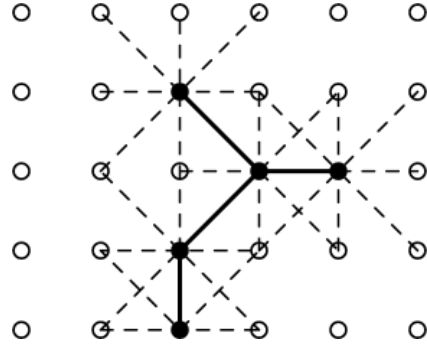


Рис. 1: Пример сетки, показывающий часть точек инициации в двух измерениях. Незакрашенные кружки представляют пустые собой точки сетки. Сплошные кружки - точки инициации. Пунктирные линии показывают возможные новые связи.

Такой вид зависимости выберем из физических соображений, что для продолжения процесса локальное электрическое поле должно способствовать пробое, причем при значения поля больше некоторого  $E_{krit}$ .

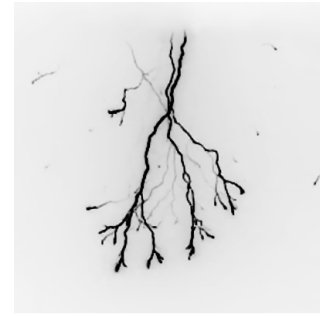
На каждой итерации выберем случайно число  $d \in [0, 1]$ , а  $\{p_{i,j}\}$  преобразуем в отрезок  $[0, 1]$ , и произведем расширение, на которое выпадет число  $d$ , засчет добавления новой точки инициации.



(a) Результат моделирования



(b) Результат моделирования



(c) Фотография молнии в негативе

Остался вопрос персчета потенциала в каждой точке инициации. Будем считать, что канал - проводник, с внутренним полем  $E_{in}$ , тогда при расширении потенциал будет изменяться слудющим образом  $\varphi_{new} = \varphi_s + s \cdot E_{in}$  где  $s$  - расстояние между точками.

В начале симуляции выставим потенциал верхней поверхности  $U_0$ , и выберем одну точку инициации вблизи поверхности, ее потенциал тоже пусть будет  $U_0$ .

## Исследование модели

Наша система регулируется с помощью следующих параметров:

1.  $N_x, N_y, N_z, \delta$  - размеры системы и степень дискретизации.
2.  $k_E$  - неравномерность поля между землей и облаков.
3.  $U_0$  - потенциал нижней части облака.
4.  $E_{krit}$  - минимальное поле, нужное для расширения.
5.  $E_{in}$  - поле внутри молнии.
6.  $\eta$  - увеличение этого параметра приводит к увеличению удельного веса событий с большей вероятностью, т.е. "строгости" выбора

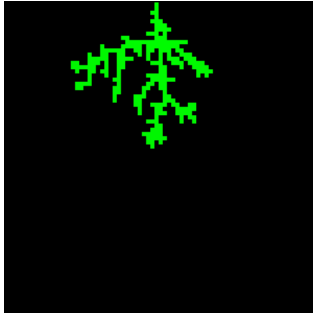
Таблица 1: Значения неизменных параметров

Параметр	Значение
$N_x$	200
$N_y$	200
$N_z$	10
$\delta$	10 m
$U_0$	80kV

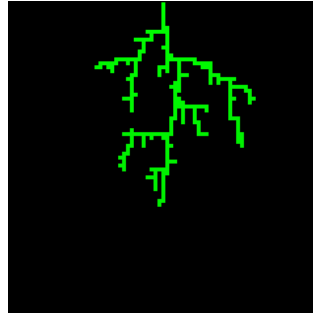
## Обсуждение

Из минусов модели можно выделить следующие:

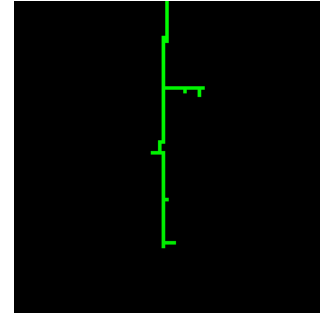
1. Сложно из физических соображений объяснить любое  $\eta \neq 1$ .



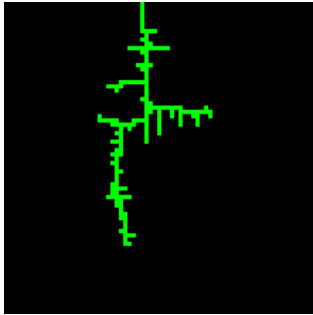
(a)  $E_{krit} = 100 \text{ kV/m}$



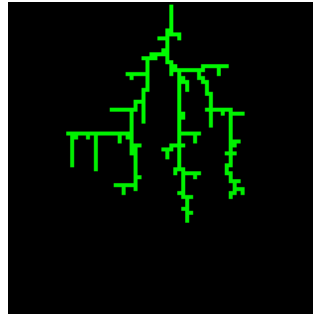
(b)  $E_{krit} = 200 \text{ kV/m}$



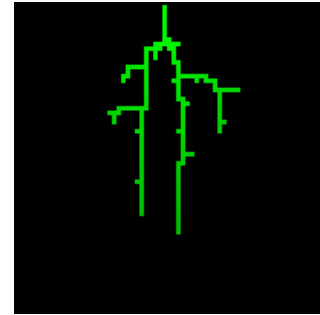
(c)  $E_{krit} = 250 \text{ kV/m}$



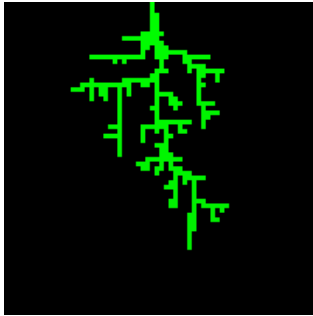
(a)  $E_{in} = 1.6 \text{ kV/m}$



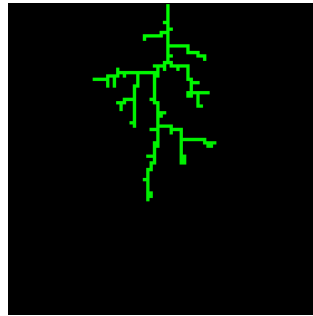
(b)  $E_{in} = 8.0 \text{ kV/m}$



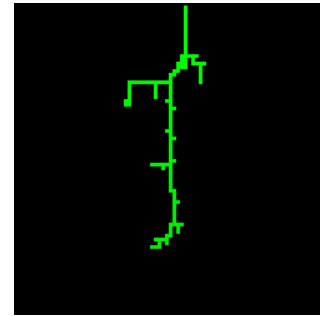
(c)  $E_{in} = 40.0 \text{ kV/m}$



(a)  $\eta = 1.5$



(b)  $\eta = 3.0$



(c)  $\eta = 5.0$

2. Нет определенного соотношения между количеством итераций и временем, потому что в реальной системе "нарастание" идет сразу с нескольких концов.
3. Молния не распространяется по оси  $\hat{z}$ .
4. Не рассчитывается распространение молнии другого знака в обрат-

ном направлении.

Контур молнии, возможно, обладает фрактальными свойствами, обнаруженными у многих природных объектов. Для количественного анализа можно использовать фрактальную размерность контура молнии определяемую согласно формуле

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln \varepsilon}$$

где  $N_\varepsilon$  - минимальное количество  $n$ -мерных шаров радиуса  $\varepsilon$  необходимых для покрытия множества.

Наглядный пример процедуры нахождения данного предела:

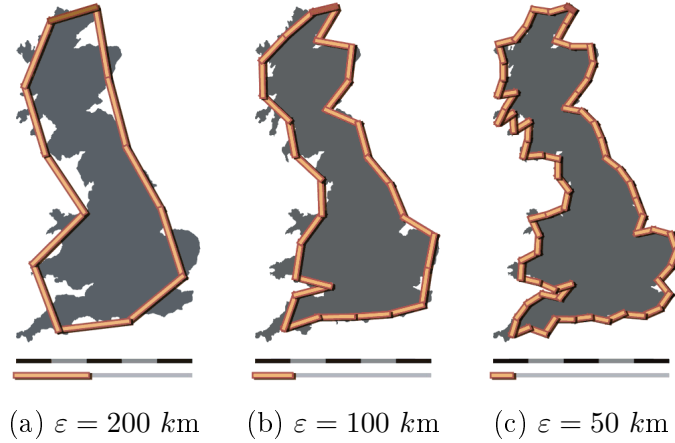


Рис. 6: Общая длина береговой линии Великобритании возрастает, когда  $\varepsilon$  уменьшается

Также результаты данного моделирования можно использовать для корректировки результатов исследования [4], т.е. при расчете вероятностей попадания молнии в объекты находящиеся рядом с громоотводом.

Используя неограниченные возможности задания граничных условий и плотности заряда, с помощью модели можно расширить знания о том, при каких конфигурациях электрического заряда в облаках возможны молнии.

## Список литературы

- [1] Source code [github.com/pozdnyako/Lightning-modeling](https://github.com/pozdnyako/Lightning-modeling)
- [2] Edward R. Mansell, Donald R. MacGorman, Conrad L. Ziegler, Jerry M. Straka. Simulated three-dimensional branched lightning in a numerical thunderstorm model. [doi.org/10.1029/2000JD000244](https://doi.org/10.1029/2000JD000244)
- [3] Vladislav Mazur, Lothar H. Ruhnke. Model of electric charges in thunderstorms and associated lightning. [doi.org/10.1029/98JD02120](https://doi.org/10.1029/98JD02120)
- [4] ММ Резинкина, ВВ Князев, ВИ Кравченко. Расчетное определение вероятности поражения молнией наземных объектов [repository.kpi.kharkov.ua](https://repository.kpi.kharkov.ua)