Атмосфера

Условие

Введем декартову систему координат (x, y, z) связанную с точкой на поверхности Земли, вращающейся вместе с поверхностью. Все рассуждения будут относительно северного полушария. Направим единичные вектора $\hat{i}$ – с запада на восток, $\hat{j}$ – с юга на север, $\hat{k}$ – вверх и обозначим $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $\omega = \dot{z}$. Также ведем следующие обозначения:

- $\vec{R}$ – вектор минимального расстояния между осью вращения Земли и точкой (x, y, z), направленный от оси к точке
- a – радиус Земли
- ϕ – широта, λ – долгота
- Ω – циклическая частота вращения Земли вокруг своей оси

1. Землю с хорошей точностью можно считать шаром постоянной плотности, но сейчас мы оценим отличие Земли от шара постоянной плотности с точки зрения значения гравитационного поля. Пусть гравитационное поле на полюсах Земли g_0. Как в первом приближении должно отличаться g в точке (ϕ, λ) от g_0, если считать, что поверхность Земли находится в механическом равновесии?

Далее будем считать Землю шаром неравномерной плотности с грав. полем $g(\phi, \lambda)$. Рассмотрим некоторое тело в нашей системе кооридинат, двигающееся в поле $\vec{g}(\phi, \lambda)$ так, что в любой момент времени $x^2+y^2+z^2 \ll a^2$.

2. Найдите $\dot{u}$, в ответе выразите R через a и ϕ. Как будет выглядеть выражение для $\dot{u}$ в случае, когда $\omega = 0$?

3. Найдите $\dot{v}$ и $\dot{\omega}$.

4. Теперь предположим, что движение некоторого тела происходит исключительно при $z = 0$ (т.е. действет сила, компенсирующая вертикальную состовляющую силы Кориолиса), а $u \ll \Omega R$. Напишите уравнение движения тела, если в начальный момент его положение: $(0, 0, 0)$, а скорость $(V, 0, 0)$.

Теперь перейдем от рассмотрения абстрактного тела к рассмотрению воздудного пакета, который двигается в некотором стационарном поле скоростей. Введем обозначние для его вектора скорости $\vec{U} = \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}\omega$.

5. Запишите II закон Ньютона для воздушного пакета (на него действует множество сил) и спроецируйте векторное уравнение на оси x, y, z. В каждом из полученых скалярных уравнений сделайте оценку порядка каждого члена и принебрежения исходя из следющих характерных параметров атмосферных явлений на широте $\phi_0 = 45°$.

U	10 m/s	характерная горизонтальная скорость
W	1 cm/s	характерная вертикальная скорость
L	10^6 m	характерный горизонтальный размер
H	10^4 m	характерный вертикальный размер
$\delta P/\rho$	10^3 m^2/s^2	масштабы горизонтальных изменений давления
L/U	10^6 s	характерное время

Путем дальнейших менее очевидных оценок можно получить, что при горизонтальном движении поведение воздуха сходно с поведением несжимамой жидкости (при вертикальном изменение плотности обязательно учитывать!).

Снова будем рассматривать только горизонтальное движение. Введем вектор $V = \hat{i}u + \hat{j}v$ и единичные вектора $\hat{t}$ и $\hat{n}$ такие, что $\hat{t}$ сонаправлен с $\vec{V}$, а $\hat{n}$ перпендикляред ему и ориентирован к центру кривизны. Путь, пройденый воздушным пакетом обозначим за s.

6. Используя результаты 5-го пункта напишите векторное уравнение на $d\vec{V}/dt$. Далее спроецируйте его на вектора $\hat{n}$ и $\hat{t}$. Покажите, что случай $p = const$ совпадает со случаем, описаным в пункте 4.

7. Рассмотрим частный случай, когда $dV/dt = 0$. Решите уравнение относительно V, какие математические ограничения накладываются на V? Нарисуйте баланс силы давления, ценробежной силы и силы Кориолиса для каждого из решений в двух случаях: $dp/dn < 0$ и $dp/dn > 0$, отметьте область высокого или низкого давления находится в центре кривизны в каждом из случаев.

8. Укажите на аномальные решения, учитывая, что для северного полушария характерны только потоки двух типов: закрученные против часовой стрелки вокруг области низкого давления (циклоны) и закрученные по часовой стрелке вокруг области высокого давления с числом Россби $Ro = |\frac{V}{fR}| < 1/2$ (антициклоны).

Решение

1. Пусть $\vec{R}$ - вектор, перпендикулярный оси вращения, тогда

$$\vec{g} = \vec{g_0} - \Omega^2 \vec{R}$$

2. Запишем ЗСМИ в ИСО, причем составляющей вдоль оси вращения, она очевидно сохраняется.

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right) \cdot R^2 = \left(\Omega + \frac{u + \delta u}{R + \delta R}\right) \cdot (R + \delta R)^2$$

отсюда следует, что

$$\delta u = -2\Omega \cdot \delta R - \frac{u}{R} \cdot \delta R, \quad R = a \cdot \cos\phi, \; \delta R = -\delta y \cdot \sin\phi$$

значит

$$\dot{u} = 2\Omega v \sin\phi + \frac{uv}{a} \tan\phi$$

3. Запишем II закон Ньютона в плоскости $(\hat{y}, \hat{z})$

$$\vec{A} = \left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} - \Omega^2 \vec{R} = \frac{2\Omega u}{R} \vec{R} + \frac{u^2}{R^2} \vec{R}$$

отсюда найдем

$$\dot{v} = -2\Omega u \sin\phi - \frac{u^2}{a} \tan\phi \qquad \dot{\omega} = 2\Omega u \cos\phi + \frac{u^2}{a}$$

4. Обозначим $2\Omega \sin\phi$ за f, тогда

$$\dot{u} = fv \qquad \dot{v} = -fu$$

можно заметить, что система этих уравнений вкупе с начальными условиями описывает движение по окружности радиуса V/f с центром $(0, V/f)$ с постоянной скоростью V т.е.

$$x = \frac{V}{f} \sin ft \quad y = \frac{V}{f} (\cos ft - 1)$$

5. Запишем II закон Ньютона

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega}\times\vec{U} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g_0} + \vec{F_r}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \hat{i}\frac{du}{dt} + \hat{j}\frac{dv}{dt} + \hat{k}\frac{d\omega}{dt} + u\frac{d\hat{i}}{dt} + v\frac{d\hat{j}}{dt} + \omega\frac{d\hat{k}}{dt}$$

Последовательно запишем первые 3 члена последнего выражения

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = u\frac{\partial\hat{i}}{\partial x} = \frac{u}{a\cos\phi}\left(\hat{j}\sin\phi - \hat{k}\cos\phi\right)$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{\partial\hat{j}}{\partial x}u + \frac{\partial\hat{j}}{\partial y}v = -\frac{u\tan\phi}{a}\hat{i} - \frac{v}{a}\hat{k}$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{\partial\hat{k}}{\partial x}u + \frac{\partial\hat{k}}{\partial y}v = \frac{u}{a}\hat{i} + \frac{v}{a}\hat{j}$$

спроецируем на оси

$$\begin{array}{llll}
x: & \dfrac{du}{dt} - \dfrac{uv\tan\phi}{a} + \dfrac{u\omega}{a} & = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v\sin\phi - 2\Omega\omega\cos\phi & +F_{rx} \\
y: & \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{u^2\tan\phi}{a} + \dfrac{v\omega}{a} & = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u\sin\phi & +F_{ry} \\
z: & \dfrac{d\omega}{dt} - \dfrac{u^2+v^2}{a} & = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u\cos\phi - g & +F_{rz}
\end{array}$$

Оценка даст приближенные уравнения

$$\begin{array}{ll}
x: & \dfrac{du}{dt} = fv - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
y: & \dfrac{dv}{dt} = -fu - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
z: & 0 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + g
\end{array}$$

причем выражение для du/dt имеет следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \omega\frac{\partial u}{\partial z}$$

для dv/dt и $d\omega/dt$ аналогично

6. пишем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -f\hat{k} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho}\left(\hat{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

теперь раскладываем на координаты

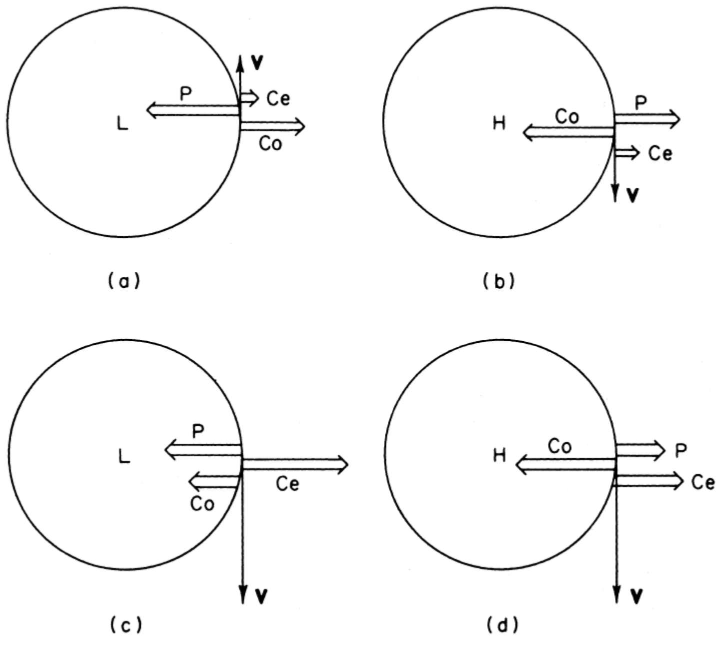
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\hat{t}V)}{dt} = \hat{t}\frac{dV}{dt} + \hat{n}\frac{V^2}{R}$$

и

$$-f\hat{k} \times \vec{V} = -fV\hat{n}$$

а градиент не зависит от выбора кооридинат, значит

$$\begin{aligned} t: \quad & \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \\ n: \quad & \frac{V^2}{R} + fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \end{aligned}$$



7. решением второго уравнения будут неотрицитаельные, вещественные корни V.

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}$$

меняя знак $\frac{\partial p}{\partial n}$ и R можно получить 8 корней, из которых только 4 будут подходить:

$$\frac{\partial p}{\partial n} < 0, R < 0, + \quad \frac{\partial p}{\partial n} > 0, R > 0, + \quad \frac{\partial p}{\partial n} > 0, R < 0, + \quad \frac{\partial p}{\partial n} > 0, R < 0, -$$

8. c и d - аномальные или в формулах:

$$\frac{\partial p}{\partial n} < 0, R < 0, + \quad \frac{\partial p}{\partial n} > 0, R < 0, +$$