ANÁLISIS NUMÉRICO 2
PROFESOR: Cristhian Montoya
Ingeniería Matemática: Taller 1

1. Considere las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.
   a) Pruebe que $\|u\| = \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.
   b) Pruebe que $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$, cuando $p \to \infty$.
   c) Para $0 < p < 1$, la función $\|\cdot\|_p$ (ver presentación) define una norma para $\mathbb{R}^n$?
   d) Pruebe que $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

2. Verifique que $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)|$, es una norma en el espacio vectorial $C([a,b])$.

3. Discutir la posibilidad de que la desigualdadd triangular para la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$ sea la igualdad , es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ para verificar que

$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

4. Sea X un espacio vectorial y sean $u, v : X \to [0, \infty)$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

$$\|x\| = u(x) + v(x)$$
$$\|x\| = \max\{v(x), u(x)\}$$
$$\|x\| = \left(u(x)^2 + v(x)^2\right)^{1/2}$$

5. Probar que la función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x,y) := |y-x|^{1/2}$$

   es una distancia en $\mathbb{R}$.

6. Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : X \to Y$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$\|y\| = \|f(x)\| \quad \forall y \in Y$$

   se obtiene una norma en Y. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

7. Consideremos en $L^2([a,b]\times[a,b])$ la aplicación

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 dt ds}.$$

   Mostrar que $(L^2([a,b]\times[a,b]), \|\cdot\|)$ es una norma.

8. Sea $\mathcal{C}^1([0,1]) := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \exists f' \in \mathcal{C}([0,1])\}$. Mostrar que la siguiente función sobre $\mathcal{C}^1([0,1])$ es una norma

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt + \int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}.$$

9. Sea $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espacio con producto interno. Demostrar que para $x, y \in V$ se tiene

a) La ley del paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

b) Teorema de Pitágoras: $\langle x,\, y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

c) La identidad polar: $\langle x,\, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$ (caso real)

$\langle x,\, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}$.

d) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \; x = ay \quad \text{o} \quad y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$.

10. Sea $V = C([a,b])$.

a) Pruebe que V es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)|$ para todo $f \in V$ y para todo $t \in [a,b]$.

b) Pero con la norma $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$, no lo es.

Ayuda: Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)^{1/n}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siga estos pasos:

i) Pruebe que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.

ii) Sea $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$

verifique que $f \notin V$.

11. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\; y = (y_1, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ determine si $\langle x,\, y\rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

a) $\langle x,\, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k|y_k|$

b) $\langle x,\, y\rangle = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$

c) $\langle x,\, y\rangle = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2\right)^{1/2}$

12. Sea $V = C[0,1]$, determine si $\langle f,\, g\rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

a) $\langle f,\, g\rangle = f(1)g(1)$

b) $\langle f,\, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$, donde $f' = \dfrac{df}{dt}$ y lo mismo para g'.

c) $\langle f,\, g\rangle = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)dt\right)$

13. En el espacio vectorial $V = C(1, e)$, se define un producto interno por

$$\langle f,\, g\rangle = \int_1^e (\ln t) f(t) g(t) dt.$$

a) Si $f(t) = \sqrt{t}$, calcular $\|f\|$.

b) Encontrar un polinomio de primer grado $g(t) = a + bt$ que sea ortogonal a la función constante $f(t) = 1$.

14. En el espacio $C(-1, 1)$, sea $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.
Considere las tres funciones u_1, u_2 y u_3 dadas por

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = t, \quad u_3(t) = 1 + t.$$

Pruebe que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo de $\pi/3$, y dos forman entre sí un ángulo de $\pi/6$.

15. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_n$ de todos los polinomios reales de grado $\leq n$, se define

$$\langle f,\, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) g\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

a) Demostrar que $\langle f,\, g\rangle$ es un producto interno para $\mathcal{P}_n$.

b) Calcular $\langle f,\, g\rangle$ cuando $f(t) = t$ y $g(t) = at + b$.

c) Si $f(t) = t$, hallar todos los polinomios lineales g ortogonales a f.

16. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El complemento ortogonal de H, denotado por $H^\perp$, se define como

$$H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\, h\rangle = 0,\ \forall h \in H\}.$$

a) Pruebe que $H^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$.

b) Para $V = \mathbb{R}^3$ y $H = \{(x, y, z) \,:\, 4x - y + 6z = 0\}$

i) Encuentre $H^\perp$.

ii) Muestre que $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$, es decir, $\mathbb{R}^3 = H + H^\perp$ y $H \cap H^\perp = \{0\}$.

iii) Exprese el vector $v = (2, 1, 3)$ como $h + u$, donde $h \in H$ y $u \in H^\perp$.

17. Sea $V = C[-1, 1]$ y $H = \big\{f \in V : f(-t) = f(t), \forall t \in [-1, 1]\big\}$, el conjunto de las funciones pares.

a) Pruebe que el complemento ortogonal $H^\perp$ es el conjunto de todas las funciones impares.

b) Pruebe que $V = H \oplus H^\perp$

18. Sea H y K subespacios de $\mathbb{R}^n$.

a) Pruebe que si $H \subset K$, entonces $K^\perp \subset H^\perp$.

b) Pruebe que $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.

c) Pruebe que $H^{\perp\perp} = H$, donde $H^{\perp\perp} = \big(H^\perp\big)^\perp$.

19. Sea $V = \mathcal{M}_{nn}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$.

a) Definamos $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$, donde $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, es la traza de la matriz $A = (a_{ij})$ y B^T es la transpuesta de B. Pruebe que V es un espacio con producto interno.

b) Pruebe que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) Si P es una matriz invertible de orden $n \times n$, pruebe que

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A.$$

20. Sean $x_1, \dots, x_n,\ y_1, \dots, y_n$ números reales, $1 < p < \infty$ y q definido por $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Probar las siguientes desigualdades:

a) Desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

b) Desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

21. Sea $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $\alpha \in (0,1)$, tal que

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha \|v_k - v_{k-1}\|, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que la sucesión $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente en $\mathbb{R}^n$.

22. Pruebe que todo espacio vectorial finito-dimensional normado es de Banach.

23. Pruebe que $l_p(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ para $p \geq 1$, es un espacio de Banach con la norma definida por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

donde $x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)_{n\geq 1}$ y $ax = (ax_n)_{n\geq 1}$, a un escalar real.

24. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V.
Pruebe que $V = M \oplus M^{\perp}$, es decir, hay que demostrar:

i) $V = M + M^{\perp}$.

ii) Todo $v \in V$ se puede expresar como $v = m + p$ de manera única, donde $m \in M$ y $p \in M^{\perp}$.

25. Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert V. Entonces

a) M es completo si y sólo si M es cerrado en V.

b) $M^{\perp} = \{0\}$ si y sólo si M es denso en V.

c) Si M es cerrado y $M^{\perp} = \{0\}$, entonces $M = V$.

d) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es la clausura de M.

e) Si M es cerrado, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

26. Supongamos que $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una base ortonormal para V.

b) $\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j\rangle \overline{\langle v, v_j\rangle}$ para cada $u, v \in V$.

c) La igualdad de Parseval se tiene: $\|u\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2$, donde $\alpha_j = \langle u, v_j\rangle$, para todo $u \in V$.

d) El subespacio generado por $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ es denso en V.

e) Para cada $u \in V$, si $\langle u, v_j\rangle = 0$, para $j = 0, 1, 2, \ldots$ entonces $u = 0$.

Afirmaciones equivalentes significa que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow \cdots \Rightarrow a)$.