ANÁLISIS NUMÉRICO 2
PROFESOR: Cristhian Montoya
Ingeniería Matemática: Taller 2

1. Sea $H_2 := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n > N\}$. Si $a, b \in H_2$, definimos la siguiente aplicación:

$$\langle a, b\rangle := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n.$$

Demuestre que H_2 no es un espacio de Hilbert.

2. Sea $H_3 := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} | f \text{ es continua en } [a,b]\}$. Si $f, g \in H_3$, definimos la aplicación siguiente:

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Demostrar que la aplicación anterior constituye un producto interno sobre H_3.

3. Bajo las misma definición del ejercicio anterior, demostrar que H_3 no es un espacio de Hilbert.

4. Sea H un espacio normado, real y completo cuya norma satisface la ley del paralelogramo. Definamos para cualquier $x, y \in H$ la aplicación

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big).$$

Demostrar que se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
b) $\langle \alpha x + y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle \alpha y, z\rangle$
c) $\langle \alpha x, y\rangle = \langle \alpha y, x\rangle$
d) $\langle \alpha x, x\rangle = \|x\|^2$

5. Sea H un espacio normado, complejo y completo en el cual la norma satisface la ley del paralelogramo. Demuestre que H es un espacio de Hilbert.
Ayuda: Considerar la aplicación: $\langle \alpha x, y\rangle := \langle \alpha x, y\rangle + i\langle \alpha x, iy\rangle$.

6. Supongamos que $\{\psi_n\}_{=1}^{\infty}$ es una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H y sea $x \in H$ tal que

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \psi_n\rangle|^2.$$

Entonces

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, \psi_n\rangle \psi_n.$$

7. Sea H un espacio con producto interno, $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset H$. Probar que

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{\pm 1\}^n} \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\|^2 = 2^n \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

8. Sea $\omega : [0,1] \to (0,\infty)$ una función continua. Sea $n \in \mathbb{N}$ y P_n el espacio lineal real de todos los polinomios de grado $\leq n$ sobre los cuales consideramos el siguiente producto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 \omega(t)p(t)q(t)dt.$$

   a) Probar que P_n tiene una base ortonormal $\{p_0, \ldots, p_n\}$ tal que $grado(p_k) = k$, $k = 0, \ldots, n$.
   b) Probar que $\langle p_k, p_{k'} \rangle = 0$, $k = 0, \ldots, n$.

9. Sea $1 \leq p < +\infty$. Probar que $(\ell_p, \| \cdot \|_p)$ es un espacio de Hilbert si y sólo si $p = 2$.

10. Sean $1 \leq p < +\infty$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Lebesgue medible tal que $\mu(A) > 0$, donde μ es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Probar que $(L_p(A), \| \cdot \|_p)$ es un espacio de Hilbert si y sólo si $p = 2$.

11. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq y\}$. Demostrar que si $(a,b) \notin A$ entonces la proyección de (a,b) sobre A es $Proj_A(a,b) = (x, \varphi(x))$, donde $x \in \mathbb{R}$ es una solución para la ecuación

$$(b - \varphi(x))\frac{\varphi}{dx}(x) + a - x = 0.$$

12. Sean $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa de clase C^1, $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq y\}$ y $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $(a,b) \notin A$ entonces la proyección de (a,b) sobre A es $Proj_A(a,b) = (x, \varphi(x))$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} a_1 - x_1 + (b - \varphi(x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & = & 0 \\ a_2 - x_2 + (b - \varphi(x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots \\ a_n - x_n + (b - \varphi(x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) & = & 0 \end{cases}$$