Espacios normados

Cristhian Montoya

Universidad EAFIT

cdmontoyaz@eafit.edu.co

Escuela de Ciencias Aplicaciones e Ingeniería

2 de febrero de 2023

Tabla de contenido

Geometría del espacio $\mathbb{R}^n$

Recordemos que $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ es el conjunto de todas las $n-$tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales y es un espacio vectorial (sobre los números reales) con las operaciones

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ ax &= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n), \quad a \quad \text{un número real.} \end{aligned}$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman puntos o simplemente vectores de n componentes. El vector $(0, \ldots, 0) = 0$ es el vector cero.
Es usual denominar a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

La base canónica para este espacio vectorial son los vectores

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se sigue que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.
En $\mathbb{R}^n$ se puede definir la noción de longitud de un vector, que usualmente se llama norma del vector.
En general, una norma sobre un espacio vectorial V es una función de valor real $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in V$ se tiene:

i) $\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

ii) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$, para todo escalar a (homogeneidad).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (desigualdad triangular).

Un espacio vectorial V equipado con una norma $\|\cdot\|$ se llama espacio vectorial normado o simplemente espacio normado, suele denotarse $\big(V, \|\cdot\|\big)$.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$ con la norma $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ es un espacio normado, donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i) $\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n| \geq 0$. Ahora,
$\|x\| = 0 \Rightarrow |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0$, para todo i, $i = 1, \ldots, n$.
Recíprocamente, $\|0\| = 0$.

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, $ax = (ax_1, \ldots, ax_n)$, entonces

$$\|ax\| = |ax_1| + \cdots + |ax_n| = |a|\big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big) = |a|\|x\|.$$

iii) Para $y = (y_1, \dots, y_n)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= |x_1+y_1| + \cdots + |x_n+y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= \big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big) + \big(|y_1| + \cdots + |y_n|\big) \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Este espacio normado se denota por ℓ_1^n y la norma por $\|\cdot\|_1$.
En $\mathbb{R}^n$ se puede definir otras normas, como se ve en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$ también es un espacio normado con la norma infinito definida para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

En efecto,

i) Es claro que para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se satisface que $\|x\|_\infty \geq 0$, ya que $|x_i| \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
De otro lado, si $\|x\|_\infty = \text{máx}_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0$ se sigue que $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = 0$ y por consiguiente $x = 0$
Recíprocamente, es claro que $\|0\|_\infty = 0$

ii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\infty &= \underset{1\leq i\leq n}{\text{máx}} |\alpha x_i| = \text{máx}\,\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|, \ldots, |\alpha x_n|\} \\
&= \text{máx}\,\{|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|, \ldots, |\alpha||x_n|\} \\
&= |\alpha|\,\text{máx}\,\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = |\alpha|\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

iii) Es claro que $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y también que

$$|x_i| + |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

luego $|x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ y por tanto

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

es decir $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$ con la norma euclídea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, es un espacio normado.

i) Claramente $\|x\| \geq 0$. Por otra parte, si $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = 0$ se sigue que $x_i^2 = 0$, para $i = 1, \ldots, n$; luego $x_i = 0$, para todo i, por tanto $x = 0$. Recíprocamente, si $x = 0$ entonces $\|x\| = 0$.

ii) Para $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|ax\| &= \sqrt{(ax_1)^2 + \cdots + (ax_n)^2} = \sqrt{a^2\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)} \\ &= |a| \, \|x\| \, .\end{aligned}$$

iii) Para probar la desigualdad triangular, necesitamos un resultado preliminar que se llama la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|\|y\|.$$

En efecto, si $x = 0$ o $y = 0$ evidentemente se obtiene la igualdad. La igualdad también se da si $x = ay$. Supongamos entonces que $x \neq 0$ y $y \neq 0$.

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por $h(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2$.

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_it+y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2t^2+2x_iy_it+y_i^2)\\ &= t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\\ &= \|x\|^2t^2+2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\|y\|^2>0\end{aligned}$$

$h(t)$ es un polinomio de segundo grado en t sin raÃces reales, y su discriminante debe ser negativo. Así,

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\|x\|^2\|y\|^2<0 \qquad \text{o} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|<\|x\|\|y\|.$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Por desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\|+\|y\|\big)^2$$

$$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|.$$

Espacios normados

Norma p

De igual forma se puede probar que la función$x \mapsto \|x\|_p$, donde

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

define otra norma para $\mathbb{R}^n$, se llama la norma p.
Se puede probar que para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p.$$

Nota: normas equivalentes

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, sobre un espacio normado V se dice que son *equivalentes* si existen reales positivos C_1 y C_2, independientes de $u \in V$, tal que

$$C_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2\|u\|_1.$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ la norma infinito y la norma p son equivalentes, es decir existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que para todo $u \in \mathbb{R}^n$

$$C_1\|u\|_p \leq \|u\|_\infty \leq C_2\|u\|_p.$$

El siguiente ejemplo muestra un espacio normado que no es euclídeo, pero es de interés en este curso.

Ejemplo

El espacio de las funciones continuas

$$C\left[a,b\right]=\left\{f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}\ f\text{ es continua}\right\},$$

con la norma $\|f\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|f\left(t\right)|$, es un espacio normado con las operaciones

$$\left(f+g\right)\left(t\right)=f\left(t\right)+g\left(t\right)\quad\text{y}\quad\left(kf\right)\left(t\right)=kf\left(t\right),$$

para todo $t\in[a,b]$, con k un número real.

En efecto,

i) Si $\|f\|=0$, entonces $|f\left(t\right)|=0,\ \forall t\in\left[a,b\right]$, de modo que $f=0$. De lo contrario, $\|f\|\geq 0$.

ii) $\|kf\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |kf(t)| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |k|\,|f(t)| = |k| \max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)| = |k|\,\|f\|$.

iii) Sean $f, g \in C[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} |f(t)+g(t)| &\leq |f(t)|+|g(t)| \leq \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| + \max_{a\leq t\leq b} |g(t)| \\ &= \|f\|+\|g\|, \quad \forall t \in [a,b] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\max\limits_{a\leq t\leq b} |f(t)+g(t)| \leq \|f\|+\|g\|$.

Así,

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Nota

Todo espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico con la métrica definida por la norma. Esto es, $d(x, y) := \|x - y\|$.
En particular, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con la métrica definida a partir de alguna de las normas antes definidas. Por ejemplo, con la norma euclídea, se tiene que la métrica en $\mathbb{R}^n$ está definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Recuerde que un *espacio métrico* (V, d) es un conjunto V dotado de una función distancia o métrica d definida de $V \times V$ en $\mathbb{R}$, la cual satisface las siguiente condiciones para todos $x, y, z \in V$

a) $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
b) $d(x, y) = d(y, x)$
c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Espacios con producto interno

Definición: producto interno

La expresión $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ que aparece en la desigualdad de Cauchy-Schwarz se llama producto interno o producto escalar de x y y, se denota por $\langle x, y \rangle$.

En general, un producto interno en un espacio vectorial V (sobre $\mathbb{R}$) es una función$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $a \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes propiedades:

i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (linealidad).

ii) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$.

iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (simetría).

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positividad).

Espacios con producto interno

Un espacio vectorial V equipado con un producto interno $\langle \cdot \rangle$ se llama espacio con producto interno, se denota $\big(V, \langle \cdot \rangle\big)$.
Se deja como ejercicio verificar que
$\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$, se llama producto punto producto escalar.
De igual manera, en el espacio $C[a, b]$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$ se verifica que la expresión

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \tag{1}$$

define un producto interno en $C[a, b]$.

Nota

Para el caso que se utilice los escalares en $\mathbb{C}$, las condiciones ii) y iii) se cambian por:

ii') $\langle x, ay\rangle = \bar{a}\langle x, y\rangle$

iii') $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ donde la barra hace referencia al conjugado complejo, es decir para $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z} = a - ib$

Norma definida a través de un producto interno

Un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ en un espacio vectorial V define una norma dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{2}$$

Claramente (2) satisface i) y ii) de la definición de norma.

Espacios con producto interno

La prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\big|\langle x,\, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\|$ en este caso es muy fácil. En efecto, sean $x \neq 0$ y $y \neq 0$, haciendo $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ y $v = \dfrac{y}{\|y\|}$ se tiene $\|u\| = \|v\| = 1$. De donde

$$0 \leq \|u-v\|^2 = \langle u-v,\, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,\, v\rangle + \|v\|^2 = 2 - 2\langle u,\, v\rangle$$

Por lo tanto, $\langle u,\, v\rangle \leq 1$, de lo cual se deduce que $\langle x,\, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$. Reemplazando x por $-x$ se obtiene que $-\langle x,\, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$ y queda probada la desigualdad.
Finalmente, la desigualdad triangular se obtiene inmediatamente después de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,\, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2\\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.\end{aligned}$$

así, $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Ortogonalidad

La existencia de un producto interno en un espacio vectorial nos permite introducir el concepto de ortogonalidad en dichos espacios. Sea V un espacio con producto interno; $x, y \in V$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$.

Sea $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores no nulos en V, S es ortogonal si $\langle u_i,\, u_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ \|u_i\|^2, & \text{para } i = j. \end{cases}$

El conjunto S es ortonormal si $\|u_i\| = 1$.

Ejemplo

Sea $V = C[0, 2\pi]$. Para las funciones $f(t) = \operatorname{sen} t$, y $g(t) = \cos t$ en V se sigue que

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

es decir que $\operatorname{sen} t \perp \cos t$ en V.

$$\begin{aligned} \|\operatorname{sen} t\|^2 = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \Big|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

y por tanto $\|\operatorname{sen} t\| = \sqrt{\pi}$

Ejemplo

Sea $V = C[0, 2\pi]$ y considere el conjunto

$$S = \{1, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \ldots, \operatorname{sen} kt, \ldots\}$$

pruebe que S es ortogonal con el producto interno (1).

En efecto, para $m \neq k$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{sen} mt, \operatorname{sen} kt \rangle &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} kt dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-k)t dt \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+k)t dt = \frac{1}{2(m-k)} \operatorname{sen}(m-k)t \Big|_0^{2\pi} \\
&- \frac{1}{2(m+k)} \operatorname{sen}(m+k)t \Big|_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Espacios con producto interno

Observe que se utilizaron las identidades
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$,
$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$.

Para todo $k \in \{1, 2, 3 \ldots\}$ se sigue que

$$\langle 1, \operatorname{sen} kt \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kt dt = -\frac{1}{k} \cos kt \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{k}(\cos 2k\pi - 1) = 0.$$

Observación

Sean V un e.p.i., y $x, y \in V$ entonces

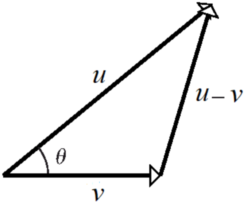
a) $\langle x, \overrightarrow{0} \rangle = 0$, ya que $\langle x, \overrightarrow{0} \rangle = \langle x, y - y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0$;

b) $\langle x, y \rangle = 0$ no implica que $x = 0$ o $y = 0$. Por ejemplo, si $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, se tiene que $x \cdot y = (1, 0) \cdot (0, 1) = 0$ y sin embargo, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Espacios con producto interno

ángulo entre vectores

Si u y v son vectores no nulos en V y θ es el Ã¡ngulo entre ellos, entonces $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ o $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$



Prueba

Por ley de cosenos se tiene

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-2\|u\|\|v\|\cos\theta \quad (*)$$

Utilizando propiedades del producto punto se tiene

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle.$

Sustituyendo en $(*)$ se tiene

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

que al simplificar se obtiene $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta.$

Espacios con producto interno

De esta última expresión se tiene que si u y v son vectores no nulos en V entonces

$$\theta = \arccos \frac{\langle u,\, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \in [0, \pi].$$

Nótese que la definición de ángulo tiene sentido, en virtud a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ya que $\dfrac{\langle u,\, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \in [-1, 1]$.

Ejemplo

Encontrar el ángulo entre los vectores $u = (1, -2, 2)$ y $v = (-3, 6, 2)$.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-11}{(3)(7)} = -\frac{11}{21}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{11}{21}\right) \approx 121.6^\circ.$$

Espacios con producto interno

Un conjunto arbitrario de vectores no nulos en un espacio con producto interno V es *linealmente independiente* (L.I.) si y sólo si todo subconjunto finito extraído de V es L.I.

Proposición

Sea V un e.p.i. y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, entonces S es linealmente independiente (L.I.)

En efecto, considerar la siguiente combinación lineal de los vectores $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$
Al aplicar producto escalar en ambos lados por u_i, fijo pero arbitrario, se sigue que

$$\langle u_i, \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_i u_i + \cdots + \alpha_n u_n \rangle = \langle u_i, 0 \rangle = 0$$

Espacios con producto interno

$$\alpha_1\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + \alpha_i\langle u_i, u_i\rangle + \cdots + \alpha_n\langle u_i, u_n\rangle = 0$$

y al ser $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ cuando $i \neq j$, en el lado izquierdo de la expresión anterior sólo se conserva el término $\alpha_i\langle u_i, u_i\rangle$, y por tanto $\alpha_i\langle u_i, u_i\rangle = 0$; pero dado que $\langle u_i, u_i\rangle = \|u_i\|^2 \neq 0$ se sigue que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por consiguiente S es L.I.

Propiedades

Sea $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espacio con producto interno. Entonces para cada $u, v \in V$ se cumple

a) Teorema de Pitágoras:
$\langle u,\, v\rangle = 0 \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

b) La ley del paralelogramo
$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

c) La identidad polar caso real $\langle u, v \rangle = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$.

d) Identidad polar caso complejo
$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}.$$

e) $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ si y sólo si $u = \alpha v$ o $v = \alpha u$ para algún escalar $\alpha \geq 0$ (dependencia lineal no negativa).

Prueba

a) $[\Longrightarrow]$ Supongamos que $u \perp v$, es decir que $\langle u, v \rangle = 0$, y veamos que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. En efecto,

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$[\Longleftarrow]$ Supongamos que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ y veamos que $u \perp v$.

$$\begin{aligned}\|u\|^2+\|v\|^2 &= \|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle\\ &= \|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2\end{aligned}$$

de donde se sigue que $2\langle u,v\rangle=0$, y por tanto que $u\perp v$.

b) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle=$
$\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle-2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

c) $\|u+v\|^2-\|u-v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle=$
$\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle-\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle-\langle v,v\rangle=4\langle u,v\rangle$.

Espacios con producto interno

Nota

No todas las normas de un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$, provienen de un producto interno. En general, si la norma $\|\cdot\|$ satisface la propiedad del paralelogramo, ésta proviene de un producto interno. Por ejemplo, el espacio de las funciones continuas $V = C[0,1]$ es un espacio normado con la norma definida, para todo $f \in V$, por

$$\|f\|_\infty := \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$$

pero no es un espacio con producto interno.
En efecto, veamos que $\|\cdot\|_\infty$ no satisface la propiedad del paralelogramo.

Sean $f(t) = t^2$ y $g(t) = 1 - t^2$, entonces

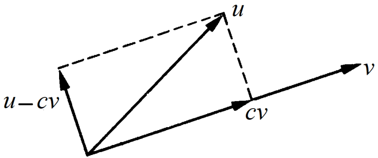
$$\|f\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |t^2| = 1, \qquad \|g\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |1 - t^2| = 1$$

$$\|f + g\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |t^2 + 1 - t^2| = 1$$

$$\|f - g\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |t^2 - 1 + t^2| = \max_{0\leq t\leq 1} |2t^2 - 1| = 1$$

$$\|f + g\|_\infty^2 + \|f - g\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2.$$

Componente escalar y proyección



Sean u, v dos vectores y $v \neq 0$. Debemos encontrar un escalar c tal que $u - cv \perp v$. Esto es, $\langle u - cv, v\rangle = 0$. En efecto, $\langle u - cv, v\rangle = \langle u, v\rangle - c\langle v, v\rangle = 0$, de donde $c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$.

El escalar c se llama la *componente* de u a lo largo de v.

La *proyección* de u a lo largo de v es el vector $\dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}v$, se denota por $P_v u$. así, $P_v u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}v$.

En particular, si v es un vector unitario, entonces la componente de u a lo largo de v es simplemente $c = \langle u, v\rangle$.

Espacios con producto interno

Ejemplo

Dados los vectores $u = (1, 2, -3)$ y $v = (1, 1, 2)$. Encontrar $P_v u$.
La componente de u a lo largo de v es el número
$c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} = \dfrac{u \cdot v}{\|v\|^2} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$.
La proyección de u a lo largo de v es el vector
$P_v u = \Big(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\Big)$.

En general, si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal de vectores no nulos en un espacio con producto interno V, entonces la componente c_i de u a lo largo de v_i es dada por $c_i = \langle u, v_i\rangle$, para $i = 1, \ldots, n$. El escalar c_i también se llama coeficiente de Fourier de u con respecto a v_i.

Espacios con producto interno

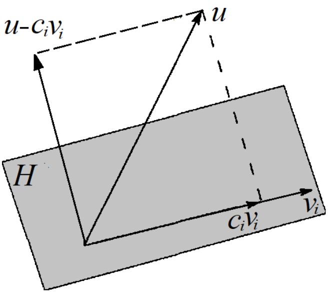
Si c_i es la componente de u a lo largo de v_i, entonces $u - c_1v_1 - c_2v_2 - \cdots - c_nv_n$ es perpendicular a $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Para ver esto, todo lo que tenemos que hacer es verificar que $\langle u - c_1v_1 - c_2v_2 - \cdots - c_nv_n, v_j\rangle = 0$ para todo $j \quad (j = 1, \ldots, n)$.

$$\langle u, v_j\rangle - c_1\langle v_1, v_j\rangle - \cdots - c_j\langle v_j, v_j\rangle - \cdots - c_n\langle v_n, v_j\rangle = 0,$$

pero $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, sólo quedan los términos $\langle u, v_j\rangle - c_j \underbrace{\langle v_j, v_j\rangle}_{\|v_j\|^2=1} = 0$. Luego $c_j = \langle u, v_j\rangle$ para $j = 1, \ldots, n$.

Espacios con producto interno

Definición: Proyección ortogonal sobre un subespacio



Sea H un subespacio del espacio con producto interno V con una base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Si $u \in V$, entonces la *proyección ortogonal* de u sobre H, denotada por $P_H u$ está dada por

$$P_H u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_k \rangle v_k.$$

Claramente $P_H u \in H$.

Espacios con producto interno

Propiedad

Considere el conjunto ortonormal $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de vectores no nulos en un e.p.i V. Sea $v \in V$ y $c_i = \langle v, v_i \rangle$ la componente de v a lo largo de v_i (o coeficiente de Fourier). Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es otro conjunto de escalares, entonces

$$\left\| v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \right\|.$$

En efecto, sabemos que $v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ es ortogonal a cada v_i, para $i = 1, \ldots, n$; luego es ortogonal a toda combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Espacios con producto interno

$$\begin{aligned}\left\|v-\sum_{i=1}^{n}b_iv_i\right\|^2 &= \left\|v-\sum_{i=1}^{n}c_iv_i+\sum_{i=1}^{n}c_iv_i-\sum_{i=1}^{n}b_iv_i\right\|^2\\ &= \left\|v-\sum_{i=1}^{n}c_iv_i+\sum_{i=1}^{n}(c_i-b_i)v_i\right\|^2\\ &= \left\|v-\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\right\|^2+\underbrace{\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-b_i)v_i\right\|^2}_{\geq 0}\end{aligned}$$

Note que en este último paso se aplicó el teorema de Pitágoras. Por tanto,

$$\left\|v-\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\right\|^2 \leq \left\|v-\sum_{i=1}^{n}b_iv_i\right\|^2 \quad \text{o} \quad \left\|v-\sum_{i=1}^{n}c_iv_i\right\| \leq \left\|v-\sum_{i=1}^{n}b_iv_i\right\|$$

Desigualdad de Bessel

Como consecuencia del anterior resultado tenemos la desigualdad de Bessel, esto es, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \|v\|^2$ donde $c_i = \langle v, v_i \rangle$ es el coeficiente de Fourier.

En efecto, para el conjunto ortonormal $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\rangle \\
&= \langle v, v \rangle - 2 \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v, v_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2}
\end{aligned}
$$

$$= \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geq 0$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \leq \|v\|^2.$$

Ahora bien, la sucesión $\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona y acotada por $\|v\|^2$, luego es convergente. Por tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ es convergente.

Complemento ortogonal

Sea H un subespacio de un e.p.i V. El complemento ortogonal de H, denotado por $H^{\perp}$, es dado por

$$H^{\perp} = \{x \in V : \langle x,\, h\rangle = 0,\ \forall h \in H\}.$$

$H^{\perp}$ es un subespacio de V. En efecto, si $x, y \in H^{\perp}$ y $h \in H$, entonces

$$\langle x + y,\, h\rangle = \langle x,\, h\rangle + \langle y,\, h\rangle = 0 + 0 = 0$$

y para cada $a \in \mathbb{R}$ se tiene $\langle ax,\, h\rangle = a\langle x,\, h\rangle = a(0) = 0$. así, $H^{\perp}$ es un subespacio.

Espacios con producto interno

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$, sea $H = \{(x, y, z) : 2x + 4y - z = 0\}$ encontrar $H^\perp$.

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z) : 2x + 4y - z = 0\} = \{(x, y, z) : z = 4x + 2y\} \\ &= \{(x, y, 4x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 4) + y(0, 1, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{gen}\{(1, 0, 4), (0, 1, 2)\}. \end{aligned}$$

Sea $h = (a, b, c) \in H^\perp$. Entonces $\langle h,\, u_1\rangle = 0$ y $\langle h,\, u_2\rangle = 0$, donde $u_1 = (1, 0, 4)$ y $u_2 = (0, 1, 2)$.

$$\langle h,\, u_1\rangle = a + 4c = 0, \qquad \langle h,\, u_2\rangle = b + 2c = 0$$

al resolver el sistema homogéneo obtenemos $a = -4c$ y $b = -2c$ de este modo $h = (a, b, c) = (-4c, -2c, c) = c(-4, -2, 1)$. Por tanto, $H^\perp = \text{gen}\{(4, 2, -1)\}$.

Espacios con producto interno

Veamos ahora como determinar vectores $h \in H$ y $u \in H^{\perp}$ tales que $v = (4,3,2) = h + u$. De la primera parte se sigue que existen reales α, β y γ tales que $h = \alpha\,(1,0,4) + \beta\,(0,1,2)$ y $u = \gamma\,(4,2,-1)$, luego,

$$(4,3,2) = \alpha\,(1,0,4) + \beta\,(0,1,2) + \gamma\,(4,2,-1)$$

Resolviendo el sistema para α, β y γ se tiene

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -17 & -14 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -21 & \vdots & -20 \end{pmatrix}.$$

De donde $\gamma = \frac{20}{21}$, $\beta = \frac{23}{21}$ y $\alpha = \frac{4}{21}$, y por tanto

$$(4,3,2) = \frac{4}{21}(1,0,4) + \frac{23}{21}(0,1,2) + \frac{20}{21}(4,2,-1).$$

En este caso se tiene que $\mathbb{R}^3 = H + H^{\perp}$ y $H \cap H^{\perp} = \{0\}$, es decir que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de los espacios H y $H^{\perp}$, y se escribe $H \oplus H^{\perp}$; además, $\dim\{\mathbb{R}^3\} = 3 = \dim H + \dim H^{\perp}$.

Espacios con producto interno

Descomposición ortogonal

En general, para V e.p.i, y H un subespacio de V, entonces $V = H \oplus H^{\perp}$. Es decir, si $v \in V$, existen vectores únicos $h \in H$ y $p \in H^{\perp}$ tal que $v = h + p$.
En efecto, para probar la existencia de tal descomposición, consideremos una base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ para H.
Entonces, para $v \in V$ se tiene $h = P_H v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_k\rangle v_k \in H$. Luego $p = v - P_H v$. En consecuencia, $h + p = P_H v + (v - P_H v) = v$.
Resta probar que $p \in H^{\perp}$, para ello es suficiente verificar que $p \perp v_j$. $\quad \langle p, v_j\rangle = \langle v - P_H v, v_j\rangle = \langle v, v_j\rangle - \langle P_H v, v_j\rangle =$ $\langle v, v_j\rangle - \left\langle \langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_k\rangle v_k, v_j \right\rangle = \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_1\rangle\langle v_1, v_j\rangle -$ $\cdots - \langle v, v_j\rangle \underbrace{\langle v_j, v_j\rangle}_{\|v_j\|^2=1} - \cdots - \langle v, v_k\rangle\langle v_k, v_j\rangle = \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle = 0,$

UNIVERSIDAD EAFIT

ya que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ por la ortogonalidad de la base para H. Luego $\langle p, v_j\rangle = 0$ y así, $p \in H^{\perp}$.

Veamos la unicidad: sea $h_1 + p_1 = v$ otra descomposición con $h_1 \in H$ y $p_1 \in H^{\perp}$. Entonces $h + p = h_1 + p_1$ o $h - h_1 = p_1 - p$ de donde $h - h_1 \in H$ y $p_1 - p \in H^{\perp}$; como el vector común es 0 (por ser subespacios H y $H^{\perp}$), entonces $h - h_1 = 0$ y $p_1 - p = 0$. Por tanto, $h = h_1$ y $p_1 = p$.

Definiciones

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado.
La bola abierta de centro $x_0 \in V$ y radio $r > 0$, se define por

$$B_r(x_0) := \{x \in V \ : \ \|x - x_0\| < r\}$$

La bola cerrada se define por

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in V \ : \ \|x - x_0\| \leq r\}$$

La esfera unitaria se define por:

$$S_r(x_0) := \{x \in V \ : \ \|x - x_0\| = 1\}$$

El conjunto $A \subset V$ es abierto en V, si para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$.

El conjunto $F \subset V$ es cerrado en V, si $V \setminus F$ (el complemento de F en V) es abierto en V.
Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V, converge a $x \in V$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

o en otras palabras, si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ para todo $n > N$, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{o} \quad x_n \longrightarrow x, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Una función $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x \in V$, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V tal que $x_n \to x$, entonces $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ cuando $n \to \infty$.

Una función f es continua en V, si es continua en todo punto $x \in V$.

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V, es una *sucesión de Cauchy* si

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

o en forma equivalente, si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todos $n, m > N$.

Propiedad

Toda sucesión convergente en $(V, \|\cdot\|)$ es de Cauchy.

En efecto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $(V, \|\cdot\|)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ para algún $x \in V$, cuando $n \to \infty$, es decir que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq N$.

Entonces, para todo $n, m \geq N$ se sigue que

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

es decir $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para cada $n, m \geq N$ y por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Nota

El recíproco de la proposición no es cierto en general, ya que por ejemplo, sea $V = (0, 1] \subset \mathbb{R}$, con la norma del valor absoluto $|\cdot|$, y considere la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Esta sucesión es de Cauchy, ya que

$$\lim_{n,m\to\infty} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = 0$$

sin embargo no es convergente en V, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y 0 no pertenece a V.

Propiedad

a) La función norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es continua en V.

b) Sea $(V, \langle\cdot\rangle)$ un e.p.i. El producto interno $\langle\cdot\rangle$ es continuo con respecto a la norma inducida por el producto interno, es decir, si las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a u y v, respectivamente, entonces $\|u_n - u\| \to 0$ y $\|v_n - v\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ lo que implica que $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$ cuando $n \to \infty$

Prueba

a) Se debe mostrar que si $x_n \to x$ entonces $\|x_n\| \to \|x\|$ cuando $n \to \infty$, para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, $\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$ de donde se sigue que

$$\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \qquad (*)$$

y de forma similar se tiene que

$$\|x\| = \|x - x_n + x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n\|$$

es decir

$$\|x\| - \|x_n\| \leq \|x_n - x\| \text{ ó } -\|x_n - x\| \leq \|x_n\| - \|x\| \quad (**)$$

y se sigue de $(*)$ y $(**)$ que

$$-\|x_n - x\| \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|$$

lo que equivale a escribir que $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|$ y por tanto $\|x_n\| \to \|x\|$ cuando $n \to \infty$ siempre que $\|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

b) Como las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a u y v, respectivamente, entonces son acotadas, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\| \leq M$ y $\|v_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| &= |\langle u_n, v_n\rangle - \langle u_n, v\rangle + \langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \\
&= |\langle u_n, v_n - v\rangle + \langle u_n - u, v\rangle| \\
&\leq |\langle u_n, v_n - v\rangle| + |\langle u_n - u, v\rangle| \\
&\leq \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\| \quad \text{(D C S)} \\
&\leq M\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.
\end{aligned}
$$

Por tanto $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$ cuando $n \to \infty$ siempre que $\|v_n - v\| \to 0$ y $\|u_n - u\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Definición

- Un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ se denomina *completo*, si toda sucesión de Cauchy en V converge en V.
- Todo espacio normado completo se denomina *espacio de Banach*.
- Un espacio con producto interno y completo $\big(V, \langle\cdot\rangle\big)$ se denomina *espacio de Hilbert*.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach. Para verificarlo se utilizará la norma euclídea $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$.

Cada término de la sucesión se puede escribir como

$$x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$$

$$x_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)$$

$$\vdots$$

$$x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$$

$$\vdots$$

Ahora, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j, k \geq N$ se tiene que

$$\|x_j - x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_j^i - x_k^i\right)^2 < \epsilon^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

de donde $(x_j^i - x_k^i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(x_j^i - x_k^i\right)^2 < \epsilon^2$ y esto implica que

$$|x_j^i - x_k^i| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad j, k \geq N, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por consiguiente, $\{x_k^i\}$ es una sucesión de Cauchy de números reales, y como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión converge, es decir existe $x^i \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^i = \lim_{k \to \infty} x_k^i, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n$$

en otras palabras, para todo $\epsilon > 0$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k^i - x^i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{para todo} \quad n \geq N_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Veamos ahora que $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ es el límite de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe N entero positivo, con $N = \max_{1 \leq i \leq n} N_i$ tal que

$$\|x_k - x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2 < \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n} = \frac{\epsilon^2}{n} n = \epsilon^2,$$

es decir, $\|x_k - x\| < \epsilon$ para todo $k \geq N$.

Ejemplo

$V = C[a,b]$ con la norma del supremo, definida para todo $f \in V$ y todo $t \in [a,b]$, por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ es un espacio de Banach.

Veamos que $V = C[a,b]$ es completo. Para esto se debe mostrar que toda sucesión de Cauchy en $C[a,b]$ tiene límite en $C[a,b]$. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C[a,b]$, es decir, que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq N$$

de donde para $t_0 \in [a,b]$ fijo se tiene

$$|f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f_m(t)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad (*)$$

para todo $n, m > N$.

Luego la sucesión $\{f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0), \dots\} = \{f_n(t_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{R}$ es completo, entonces existe un número real $f(t_0)$ tal que

$$f_n(t_0) \longrightarrow f(t_0) \quad \forall t_0 \in [a, b]$$

es decir la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f puntualmente.
Veamos que la convergencia es uniforme en $[a, b]$, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ y para cada $t \in [a, b]$ $(N = N(\epsilon))$ tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon, \ \ \forall n \geq N, \ \text{ y } \ \forall t \in [a, b]$$

En efecto, es claro que

$$\begin{aligned}|f_n(t) - f(t)| = |f_n(t) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| &\leq |f_n(t) - f_m(t)| \\ &+ |f_m(t) - f(t)| \qquad (**)\end{aligned}$$

luego, para m lo suficientemente grande $(m \to \infty)$, cada término del lado derecho de $(**)$ es $< \frac{\epsilon}{2}$, debido a $(*)$. Luego

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall n > N \quad \text{y} \quad \forall t \in [a, b]$$

Por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $[a, b]$, es decir,

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon \;\; \forall n \geq N, \;\; \text{y} \;\; \forall t \in [a, b]$$

de donde

$$\sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \;\; \forall n \geq N$$

y por consiguiente $f_n \longrightarrow f$ en $C[a, b]$ uniformemente.

Resta ver que f es continua, esto es, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(c)| < \epsilon$ siempre que $|t - c| < \delta \quad (c \in [a, b])$.

$$\begin{aligned} |f(t) - f(c)| &= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(c) + f_N(c) - f(c)| \\ &\leq \underbrace{|f_N(t) - f(t)|}_{(1)} + \underbrace{|f_N(t) - f_N(c)|}_{(2)} + \underbrace{|f_N(c) - f(c)|}_{(3)} \end{aligned}$$

Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}$ a f, N se puede escoger de tal manera que los términos (1) y (3) de la última desigualdad sean menores que $\epsilon/3$. Por la continuidad de f_n, el término (2) también se puede hacer menor que $\epsilon/3$. Por tanto, $|f(t) - f(c)| < \epsilon$ siempre que $|t - c| < \delta \ \forall t, c \in [a, b]$ con N fijo. Se sigue que $f \in C[a, b]$. Luego, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C[a, b]$, se concluye que $V = C[a, b]$ es un espacio de Banach.

Referencias

Reddy, B. D.
Introductory Functional Analysis.
Springer-Verlag. New York 1998.

Reddy, J. N.
Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering.
McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.

Reddy, J. N.
An Introduction to the Finite Element Method. 3^a
McGraw-Hill Science/Engineering/Math, New York, 2005.

Johnson, C.
Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.
Dover Publications, Inc. New York, 2009.

Pepper, D. W., Heinrich, J. C.
The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications.
Taylor & Francis, 2^a Ed. New York, 2005.