Talleres 1 y 2

Federico Banoy, Juan David Rengifo y Salomón Cardeño Luján
Ingeniería Matemática
Universidad EAFIT

Marzo 2023

Índice

Punto 1.1 **Considere las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.**

a) Pruebe que $\|u\| = \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.
Basta con probar que cumple con las propiedades de una norma.

I) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
Veamos que $\|u\| \geq 0$. Como $\|u\|_1$ y $\|u\|_\infty$ son normas $\Rightarrow \|u\|_1 \geq 0 \wedge \|u\|_\infty \geq 0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \|u\| = \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty \geq 0\\ &\therefore \|u\| \geq 0\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\| = 0 &\Rightarrow \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty = 0\\ &\Rightarrow \|u\|_1 = 0 \wedge \|u\|_\infty = 0\\ &\Rightarrow u = 0 \wedge u = 0 \quad \text{pues } \|u\|_1, \|u\|_\infty \text{ son normas}\\ &\therefore u = 0\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}u = 0 &\Rightarrow \|u\|_1 = 0 \wedge \|u\|_\infty = 0 \quad \text{pues } \|u\|_1, \|u\|_\infty \text{ son normas}\\ &\Rightarrow \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty = 0\\ &\therefore \|u\| = 0.\end{aligned}$$

II) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\alpha u\| &= \frac{1}{3}\|\alpha u\|_1 + \frac{2}{3}\|\alpha u\|_\infty\\ &= \frac{1}{3}|\alpha|\|u\|_1 + \frac{2}{3}|\alpha|\|u\|_\infty \quad \text{pues } \|u\|_1, \|u\|_\infty \text{ son normas}\\ &= |\alpha|\left(\frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty\right) \quad \text{factor común}\\ \therefore \|\alpha u\| &= |\alpha|\|u\| \quad \text{por definición}\end{aligned}$$

III) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
Sean u, v elementos de un espacio vectorial V, entonces

$$\begin{aligned}\|u+v\| &= \frac{1}{3}\|u+v\|_1 + \frac{2}{3}\|u+v\|_1\\ &\leq \frac{1}{3}\Big(\|u\|_1 + \|v\|_1\Big) + \frac{2}{3}\Big(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty\Big) \quad \text{pues } \|u\|_1, \|u\|_\infty \text{ son normas}\\ &\leq \left(\frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty\right) + \left(\frac{1}{3}\|v\|_1 + \frac{2}{3}\|v\|_\infty\right)\\ \therefore \|u+v\| &\leq \|u\| + \|v\| \quad \text{por definición de } \|\cdot\|\end{aligned}$$

Así, $\|u\|$ es una norma ■

b) Pruebe que $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$, cuando $p \to \infty$.
Veamos que $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo x de un espacio vectorial V. Note que

$$\begin{aligned}\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{pues } |X_i|^p \leq \max_{1\leq i\leq n}|x_i|^p\\ &= \left(n \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^p\right)^{1/p}\\ &= n^{1/p} \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \quad \text{pues } g(x) = x^{1/p} \text{ es monótona en } [0,\infty) \text{ y } \max g(f(x)) = g(\max f(x))\end{aligned}$$

$$\therefore \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$$

Por otra parte

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \ge \left(\max_{1\le i\le n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$
$$\ge \max_{1\le i\le n}|x_i| \quad \text{pues } g(x)=x^{1/p} \text{ es monótona en } [0,\infty) \text{ y } \max g(f(x)) = g(\max f(x))$$
$$\therefore \|x\|_p \ge \|x\|_\infty$$

Entonces, tenemos que

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$$
$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_\infty \le \lim_{p\to\infty}\|x\|_p \le \lim_{p\to\infty} n^{1/p}\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \le \lim_{p\to\infty}\|x\|_p \le \|x\|_\infty$$
$$\therefore \lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty \ \blacksquare$$

c) Para $0<p<1$, la función $\|\cdot\|_p$ (ver presentación) define una norma para $\mathbb{R}^n$?
Sean $x=(0,1)$ y $y=(1,0)$ elementos de un espacio vectorial $V=\mathbb{R}^2$. Suponga que $\|\cdot\|_p$ define una norma para $\mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que cumple la propiedad de la desigualdad triangular

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$
$$(|0+1|^p + |1+0|^p)^{1/p} \le (|0|^{1/p}+|1|^{1/p})^{1/p} + (|1|^{1/p}+|0|^{1/p})^{1/p} \quad \text{por definición de } \|\cdot\|_p$$
$$(1+1)^{1/p} \le 1^{1/p} + 1^{1/p}$$
$$\therefore 2^{1/p} \le 2$$

Lo cual es absurdo pues $2^{1/p} \not\le 2,\ \forall p \in (0,1)$, lo que implica que la hipótesis es falsa y $\|\cdot\|_p$ no define una norma en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, no define una norma en $\mathbb{R}^n$ $\blacksquare$

d) Pruebe que $|x_i| \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
Por definición, sabemos que $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$. Ahora, note que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \ge \left(|x_i|^2\right)^{1/2} = |x_i|$$
$$\therefore \|x\|_2 \ge |x_i|$$

Por otro lado, note que $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \sum_{i=1}^n \max_{1\le i\le n}|x_i|^2$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{n}\max_{1\le i\le n}|x_i|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(n\max_{1\le i\le n}|x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{pues el máximo es único}$$
$$= n^{1/2}\max_{1\le i\le n}|x_i| \quad \text{pues } g(x)=x^{1/p} \text{ es monótona en } [0,\infty) \text{ y } \max g(f(x)) = g(\max f(x))$$
$$= n^{1/2}\|x\|_\infty$$
$$\therefore \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Así, $|x_i| \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$ para todo $i\in[1,n], n\in\mathbb{N}$ $\blacksquare$

Punto 1.2 Verifique que $\|f\|_\infty = \max_{a\le t\le b}|f(t)|$, es una norma en el espacio vectorial $C([a,b])$.
Basta con probar que $\|f\|_\infty$ cumple con las propiedades de una norma.

I) $\underline{\|f\|_\infty \ge 0 \text{ y } \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f=0}$

Como $|f(t)| \geq 0 \; \forall t \in [a,b] \Rightarrow \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)| = \|f\|_\infty \geq 0$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = 0 &\Rightarrow \max_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0 \quad \text{por definición} \\ &\Rightarrow |f(t)| = 0 \\ &\Rightarrow f(t) = 0, \; \forall t \in [a,b] \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} f(t) = 0 &\Rightarrow |f(t)| = 0 \\ &\Rightarrow \max_{t\in[a,b]} |f(t)| = 0 \\ &\Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \quad \text{por definición} \end{aligned}$$

II) $\underline{\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \|\alpha f(t)\|_\infty &= \max_{t\in[a,b]} |\alpha f(t)| \\ &= \max_{t\in[a,b]} |\alpha||f(t)| \\ &= |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \\ \therefore \|\alpha f(t)\|_\infty &= |\alpha| \|f(t)\|_\infty \end{aligned}$$

III) $\underline{\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty}$
Sean $f, g \in C([a,b])$. Entonces

$$\|f+g\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \left\{ |f(t)+g(t)| \right\}$$

Ahora, observe que

$$\begin{aligned} |f(t)+g(t)| &\leq |f(t)| + |g(t)| \quad \text{por propiedad del valor absoluto} \\ \max_{t\in[a,b]} \left\{ |f(t)+g(t)| \right\} &\leq \max_{t\in[a,b]} \left\{ |f(t)| + |g(t)| \right\} \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \left\{ |f(t)| \right\} + \max_{t\in[a,b]} \left\{ |g(t)| \right\} \quad \text{por propiedad del máximo} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{por definición de } \|\cdot\|_\infty \\ \therefore \|f+g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{por definición de } \|\cdot\|_\infty \end{aligned}$$

Así, $\|f\|_\infty$ es una norma en $C([a,b])$ ■

Punto 1.3 Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$ sea la igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ para verificar que

$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Veamos que Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ ssi $x_i y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

$\Leftarrow$ Si $x_i y_i \geq 0$ Para $i = 1, \ldots, n$, entonces $|x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$.
Así $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$

$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$

($\Rightarrow$)

Que $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ implica que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i| = \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i|$$

Lo cual implica que para todo $i = 1, ..., n$ se cumple que $|x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$. Observe que

$$\begin{aligned}
|x_i + y_i| &= |x_i| + |y_i| \\
|x_i + y_i|^2 &= (|x_i| + |y_i|)^2 \\
(x_i + y_i)^2 &= |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2 \\
x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2 &= x_i^2 + 2|x_i||y_i| + y_i^2 \\
&\Rightarrow x_iy_i = |x_i||y_i| \geq 0 \\
&\therefore x_iy_i \geq 0,\ \forall i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Así $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1 \Leftrightarrow x_iy_i \geq 0,\ \forall i = 1, ..., n$ ■

Punto 1.4 Sea X un espacio vectorial y sean $u, v : X \to [0, \infty)$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

$$\|x\| = u(x) + v(x)$$
$$\|x\| = \text{máx}\{v(x), u(x)\}$$
$$\|x\| = \left(u(x)^2 + v(x)^2\right)^{1/2}$$

a) $\|x\| = u(x) + v(x)$

Basta con probar que $\|x\|$ cumple con las propiedades de una norma.

i) $\underline{\|x\| \geq 0 \text{ y } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$

Note que $u, v \geq 0$ pues son normas $\Rightarrow u(x) + v(x) = \|x\| \geq 0$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|x\| = 0 &\Rightarrow u(x) + v(x) = 0 \\
&\Rightarrow u(x) = 0 \wedge v(x) = 0 \quad \text{pues } u, v \geq 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \wedge x = 0 \quad \text{pues } u, v \text{ son normas} \\
&\therefore x = 0
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $x = 0 \Rightarrow u, v = 0$ por ser normas, luego $u(x) + v(x) = \|x\| = 0$.

ii) $\underline{\|ax\| = |a|\|x\|,\ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\|ax\| = u(ax) + v(ax) &= |a|u(x) + |a|v(x) \quad \text{pues son normas} \\
&= |a|(u(x) + v(x)) \\
\therefore \|ax\| &= |a|\|x\|
\end{aligned}$$

iii) $\underline{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X}$

$$\begin{aligned}
\|x+y\| = u(x+y) + v(x+y) &\leq (u(x) + u(y)) + (v(x) + v(y)) \quad \text{pues } u, v \text{ son normas} \\
&= (u(x) + v(x)) + (u(y) + v(y)) \\
\therefore \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

Así, $\|x\|$ es una norma en X ■

b) $\|x\| = \text{máx}\{u(x), v(x)\}$

Basta con probar que $\|x\|$ cumple con las propiedades de una norma.

i) $\underline{\|x\| \geq 0 \text{ y } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$

Note que $u, v \geq 0$ pues son normas $\Rightarrow$ $\max\{u(x), v(x)\} = \|x\| \geq 0$. Ahora

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Rightarrow \max\{u(x), v(x)\} = 0 \\ &\Rightarrow u(x) = 0 \vee v(x) = 0 \quad \text{pues } u, v \geq 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \vee x = 0 \quad \text{pues } u, v \text{ son normas} \\ &\therefore x = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x = 0 \Rightarrow u, v = 0$ por ser normas, luego $\max\{u(x), v(x)\} = \|x\| = 0$.

ii) $\underline{\|ax\| = |a|\|x\|, \ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \|ax\| = \max\{u(ax), v(ax)\} &= \max\{|a|u(x), |a|v(x)\} \quad \text{pues son normas} \\ &= |a| \max\{u(x), v(x)\} \quad \text{por propiedad del máx.} \\ \therefore \|ax\| &= |a|\|x\| \end{aligned}$$

iii) $\underline{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X}$

$$\|x + y\| = \max\{u(x + y), v(x + y)\} \leq \max\{u(x) + u(y), v(x) + v(y)\}$$

Sean $a = u(x), b = u(y), c = v(x), d = v(y)$. Entonces

$$\begin{aligned} \max\{a + b, c + d\} &\leq \max\{a + b, a + d, c + b, c + d\} \quad \text{pues } \{a + b, c + d\} \subseteq \{a + b, a + d, c + b, c + d\} \\ &\leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\} \quad \text{pues se consideran todos los casos anteriores de máx sum} \leq \text{sum máx} \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \max\{u(x + y), v(x + y)\} &\leq \max\{u(x), v(x)\} + \max\{u(y), v(y)\} \\ \therefore \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Así, $\|x\|$ es una norma en X ■

c) $\|x\| = (u(x)^2 + v(x)^2)^{1/2}$

Basta con probar que $\|x\|$ cumple con las propiedades de una norma.

i) $\underline{\|x\| \geq 0 \text{ y } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$

Note que $u, v \geq 0$ pues son normas $\Rightarrow u(x)^2 + v(x)^2 \geq 0$ luego $(u(x)^2 + v(x)^2)^{1/2} = \|x\| \geq 0$. Ahora

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Rightarrow (u(x)^2 + v(x)^2)^{1/2} = 0 \\ &\Rightarrow u(x)^2 + v(x)^2 = 0 \\ &\Rightarrow u(x) = 0 \wedge v(x) = 0 \quad \text{pues } u, v \geq 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \wedge x = 0 \quad \text{pues } u, v \text{ son normas} \\ &\therefore x = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x = 0 \Rightarrow u, v = 0$ por ser normas, luego $u(x)^2 + v(x)^2 = 0$ y así $(u(x)^2 + v(x)^2)^{1/2} = \|x\| = 0$.

ii) $\underline{\|ax\| = |a|\|x\|, \ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \|ax\| = (u(ax)^2 + v(ax)^2)^{1/2} &= ((|a|u(x))^2 + (|a|v(x))^2)^{1/2} \quad \text{pues son normas} \\ &= \left(|a|^2 \left(u(x)^2 + v(x)^2\right)\right)^{1/2} \\ &= |a| \left(u(x)^2 + v(x)^2\right)^{1/2} \\ \therefore \|ax\| &= |a|\|x\| \end{aligned}$$

iii) $\underline{\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|,\ \forall x,y \in X}$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= u^2(x+y)+v^2(x+y)\\
&\leq \Big(u(x)+u(y)\Big)^2+\Big(v(x)+v(y)\Big)^2 \quad \text{pues } u,v \text{ son normas}\\
&= \Big(u^2(x)+2u(x)u(y)+u^2(y)\Big)+\Big(v^2(x)+2v(x)v(y)+v^2(y)\Big)\\
&= \Big(u^2(x)+v^2(x)\Big)+2\Big(u(x)u(y)+v(x)v(y)\Big)+\Big(u^2(y)+v^2(y)\Big)\\
&= \|x\|^2+2\Big(u(x)u(y)+v(x)v(y)\Big)+\|y\|^2
\end{aligned}$$

Sea $a=(a_1,a_2)=\big(u(x),v(x)\big)$ y $b=(b_1,b_2)=\big(u(y),v(y)\big)$, entonces

$$\begin{aligned}
&= \|x\|^2+2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)+\|y\|^2\\
&\leq \|x\|^2+2\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|+\|y\|^2\\
&\leq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 \quad \text{por la desigualdad de Cuachy-Schwarz}\\
&= (\|x\|+\|y\|)^2\\
\therefore\ \|x+y\| &= \|x\|+\|y\|
\end{aligned}$$

Así, $\|x\|$ es una norma en X ■

Punto 1.5 Probar que la función $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x,y) := |y-x|^{1/2}$$

es una distancia en $\mathbb{R}$.

Basta con probar que ρ cumple con las propiedades de una distancia.

i) $\underline{\rho(x,y)\geq 0 \wedge \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y}$

Note que $|y-x|\geq$ por definición del valor absoluto, lo cual implica que $|y-x|^{1/2}=\rho(x,y)\geq 0$. Ahora, si $\rho(x,y)=0 \Rightarrow |y-x|^{1/2}=0 \Rightarrow |y-x|=0 \Rightarrow x=y$. Por otra parte, si $x=y \Rightarrow |y-x|=0 \Rightarrow |y-x|^{1/2}=\rho(x,y)=0$.

ii) $\underline{\rho(x,y)=\rho(y,x)}$

$$\begin{aligned}
\rho(x,y)=|y-x|^{1/2} &= |-(x-y)|^{1/2}\\
&= (|-1||x-y|)^{1/2} \quad \text{por propiedad del valor absoluto}\\
&= |x-y|^{1/2}\\
\therefore\ \rho(x,y) &= \rho(y,x) \quad \text{por definición de } \rho(\cdot,\cdot)
\end{aligned}$$

iii) $\underline{\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)}$

Sean $x,y,z\in\mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= |y-x|^{1/2}\\
&= |y-x+z-z|^{1/2}\\
&= |-x+z+y-z|^{1/2}\\
&\leq (|-x+z|+|y-z|)^{1/2}\\
&= (|x-z|+|y-z|)^{1/2} \quad \text{por propiedad del valor absoluto}
\end{aligned}$$

Ahora, sean $a=|z-x|$ y $b=|y-z|$. Observe que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$= \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b}$$

Lo cual implica que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &\leq (|x-z| + |y-z|)^{1/2} \\
&\leq |x-z|^{1/2} + |y-z|^{1/2} \\
\therefore \rho(x,y) &\leq \rho(x,z) + \rho(z,y)
\end{aligned}$$

Así, ρ es una distancia en $\mathbb{R}$ ∎

Punto 1.6 Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : X \to Y$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$\|y\| = \|f(x)\|, \quad \forall y \in Y$$

se obtiene una norma en Y. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

Para espacios normados
Basta probar que $\|y\|$ cumple con las propiedades de una norma.

i) $\underline{\|y\| \geq 0 \text{ y } \|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0}$

Note que $\|f(x)\| \geq 0$ pues es precisamente la norma del espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, entonces $\|y\| \geq 0$ por definición. Ahora, si $\|y\| = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ pues $\|\cdot\|$ es una norma. Por otro lado, si $f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0$ pues $\|\cdot\|$ es una norma, luego $\|y\| = 0$ por definición.

ii) $\underline{\|ay\| = |a|\|y\|, \ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\|ay\| &= \|f(ax)\| \\
&= \|af(x)\| \quad \text{por propiedad de una función lineal } f \\
&= |a|\|f(x)\| \quad \text{pues } \|\cdot\| \text{ es la norma del espacio normado } X \\
\therefore \|ay\| &= |a|\|y\| \quad \text{por definición}
\end{aligned}$$

iii) $\underline{\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|, \ \forall y, z \in Y}$

Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $\|y\| = \|f(x_1)\|$ y $\|z\| = \|f(x_2)\|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|y+z\| &= \|f(x_1 + x_2)\| \\
&= \|f(x_2) + f(x_2)\| \quad \text{por propiedad de una función lineal } f \\
&\leq \|f(x_1)\| + \|f(x_2)\| \quad \text{pues } \|\cdot\| \text{ es una norma} \\
\therefore \|x_1 + x_2\| &\leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad \text{por definición}
\end{aligned}$$

Así, $\|y\|$ es una norma en Y ∎

Para espacios métricos
Sea X un espacio métrico, Y un espacio vectorial y $f : X \to Y$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que definiendo $d(a,b) = \|f(b-a)\|$, $\forall a, b \in Y$ se obtiene una distancia en Y.

Basta probar que $d(a,b)$ cumple con las propiedades de una distancia.

i) $\underline{d(a,b) \geq 0 \wedge d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b}$

$d(a,b) = 0$ ssi $f(b-a) = 0$ pues $d(a,b)$ es la norma de $f(b-a)$. Por linealidad de f, $f(b-a) = f(b) - f(a) = 0$. Además, como f es inyectiva, entonces cada imagen está asociada a una única preimagen, luego $f(a) = f(b)$ ssi $a = b$.
ii) $\underline{d(a,b) = d(b,a)}$

$$d(a,b) = \|f(b-a)\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|f(-(a-b))\| \\
&= \|-f(a-b)\| \quad \text{por propiedad de una función lineal } f \\
&= |-1|\|f(a-b)\| \quad \text{pues } \|\cdot\| \text{ es una norma} \\
&= \|f(a-b)\| \\
\therefore d(a,b) &= d(b,a) \quad \text{por definición}
\end{aligned}
$$

iii) $\underline{d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)}$

Sean $a, b, c \in Y$. Entonces

$$
\begin{aligned}
d(a,b) &= \|f(b-a)\| \\
&= \|f(b-a+c-c)\| \\
&= \|f(-a+c+b-c)\| \\
&= \|f(-a+c) + f(b-c)\| \quad \text{por propiedad de una función lineal } f \\
&\leq \|f(-a+c)\| + \|f(b-c)\| \quad \text{pues } \|\cdot\| \text{ es una norma} \\
&= \|f(c-a)\| + \|f(b-c)\| \\
\therefore d(a,b) &\leq d(a,c) + d(c,b) \quad \text{por definición}
\end{aligned}
$$

Así, $\|y\|$ es una distancia en Y ■

Punto 1.7 Consideremos en $L^2([a,b] \times [a,b])$ la aplicación

$$
\|f\| := \sqrt{\int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 dtds}.
$$

Mostrar que $\left(L^2([a,b] \times [a,b]), \|\cdot\|\right)$ es una norma.

Basta con probar que $\|f\|$ cumple con las propiedades de una norma. Sin embargo, por facilidad considere primero este cambio de notación

$$
\int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 dtds = \int_{[a,b]\times[a,b]} |f(t,s)|^2 dL = \int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL
$$

Lo cual implica que la norma se puede reescribir como

$$
\|f\| = \sqrt{\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL}
$$

i) $\underline{\|f\| \geq 0 \text{ y } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0}$

Observe que, por definición del valor absoluto, $|f(t,s)| \geq 0 \Rightarrow |f(t,s)|^2 \geq 0$ lo cual implica que $\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL \geq \int_{L^2} 0 dL = 0$ pues por propiedad la integral preserva la desigualdad y así, $\sqrt{\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL} = \|f\| \geq 0$. Ahora

$$
\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\Rightarrow \sqrt{\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL} = 0 \\
&\Rightarrow \int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL = 0 \quad \text{al derivar en ambos lados} \\
&\Rightarrow |f(t,s)|^2 = 0 \\
&\Rightarrow |f(t,s)| = 0 \\
&\Rightarrow f(t,s) = 0
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
f(t,s) = 0 &\Rightarrow |f(t,s)| = 0 \\
&\Rightarrow |f(t,s)|^2 = 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL = 0 \quad \text{al integrar en ambos lados}$$

$$\Rightarrow \therefore \sqrt{\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL} = \|f\| = 0$$

ii) $\underline{\|af\| = |a|\|f\|,\ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\|af\| &= \sqrt{\int_{L^2} |af(t,s)|^2 dL} \\
&= \sqrt{\int_{L^2} (|a||f(t,s)|)^2 dL} \\
&= \sqrt{\int_{L^2} |a|^2 |f(t,s)|^2 dL} \\
&= \sqrt{|a|^2 \int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL} \quad \text{por propiedad de la integral} \\
&= |a| \sqrt{\int_{L^2} |f(t,s)|^2 dL} \\
\therefore \|af\| &= |a|\|f\|
\end{aligned}$$

iii) $\underline{\|f+g\| \leq \|g\| + \|g\|,\ \forall f, g \in L^2}$

Por facilidad considere la notación $f = f(t,s)$, $g = g(t,s)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \int_{L^2} |f+g|^2 dL \\
&= \int_{L^2} (f+g)^2 dL \\
&= \int_{L^2} (f^2 + 2fg + g^2) dL \\
&= \int_{L^2} f^2 dL + \int_{L^2} 2fg dL + \int_{L^2} g^2 dL \\
&= \int_{L^2} |f|^2 dL + 2\int_{L^2} fg dL + \int_{L^2} |g|^2 dL \\
&= \|f\|^2 + 2\int_{L^2} fg dL + \|g\|^2
\end{aligned}$$

Ahora, observe que $-|fg| \leq fg \leq |fg| \Rightarrow -\int_{L^2} |fg| dL \leq \int_{L^2} fg dL \leq \int_{L^2} |fg| dL$, lo cual implica que

$$\|f+g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\int_{L^2} |fg| dL + \|g\|^2$$

Ahora, considere la desigualdad de Hölder

$$\int_{L^2} |fg| dL \leq \left(\int_{L^2} |f|^p dL\right)^{1/p} \left(\int_{L^2} |g|^q dL\right)^{1/q}$$

para todo $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Note que si $p = q = 2$ se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_{L^2} |fg| dL &\leq \left(\int_{L^2} |f|^2 dL\right)^{1/2} \left(\int_{L^2} |g|^2 dL\right)^{1/2} \\
&= \|f\|\|g\|
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|f+g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\int_{L^2} |fg| dL + \|g\|^2$$

$$\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \quad \text{por la desigualdad de hölder con } p = q = 2$$
$$= (\|f\| + \|g\|)^2$$
$$\therefore \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{al aplicar raíz cuadrada a ambos lados}$$

Así, $\|f\|$ es una norma en $L^2([a, b] \times [a, b])$ ■

Punto 1.8 Sea $\mathcal{C}^1([0,1]) := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \exists f' \in \mathcal{C}([0,1])\}$. Mostrar que la siguiente función sobre $\mathcal{C}^1([0,1])$ es una norma

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt + \int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}.$$

Basta con probar que $\|f\|$ cumple con las propiedades de una norma. Por facilidad, se usará la notación $f = f(t)$ y $f' = f'(t)$ para cuando se trate con la definición de la norma.

i) $\underline{\|f\| \geq 0 \text{ y } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0}$

Como $|f|^2 \geq 0 \wedge |f'|^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 |f|^2 dt \geq 0 \wedge \int_0^1 |f'|^2 dt \geq 0$ pues por propiedades de la integral se preserva la desigualdad, y esto implica que $\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt \geq 0 \Rightarrow (\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt)^{1/2} = \|f\| \geq 0$. Ahora

$$\|f\| = 0 \Rightarrow \left(\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt\right)^{1/2} = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f|^2 dt = \int_0^1 |f'|^2 dt = 0$$
$$\Rightarrow |f|^2 = |f'|^2 = 0 \quad \text{al derivar a ambos lados de cada ecuación}$$
$$\Rightarrow \therefore f = 0 \wedge f' = 0 \quad \text{al aplicar raíz cuadrada y usar la definición de } |\cdot|$$

Por otro lado

$$f = 0 \wedge f' = 0 \Rightarrow |f|^2 = 0 \wedge |f'|^2 = 0 \quad \text{al elevar al cuadrado y usar la definición de } |\cdot|$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f|^2 dt = 0 \wedge \int_0^1 |f'|^2 dt = 0 \quad \text{al integrar a ambos lados de cada ecuación}$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt = 0$$
$$\Rightarrow \left(\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt\right)^{1/2} = 0$$
$$\Rightarrow \therefore \|f\| = 0$$

ii) $\underline{\|af\| = |a|\|f\|, \ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$\|af\| = \left(\int_0^1 |af|^2 dt + \int_0^1 |af'|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_0^1 (|a||f|)^2 dt + \int_0^1 (|a||f'|)^2 dt\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_0^1 |a|^2 |f|^2 dt + \int_0^1 |a|^2 |f'|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$= \left(|a|^2 \int_0^1 |f|^2 dt + |a|^2 \int_0^1 |f'|^2 dt\right)^{1/2}$$
$$= \left(|a|^2 \left(\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt\right)\right)^{1/2}$$
$$= |a| \left(\int_0^1 |f|^2 dt + \int_0^1 |f'|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\therefore \|af\| = |a|\|f\|$$

iii) $\underline{\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,\ \forall f,g \in \mathcal{C}^1([0,1])}$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \|f+g\|_2^2 + \|f'+g'\|_2^2 \\
&\leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 + (\|f'\|_2 + \|g'\|_2)^2 \quad \text{pues } \|\cdot\|_2 \text{ cumple la desigualdad triangular} \\
&= (\|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2) + (\|f'\|_2^2 + 2\|f'\|_2\|g'\|_2 + \|g'\|_2^2) \\
&= (\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2) + 2(\|f\|_2\|g\|_2 + \|f'\|_2\|g'\|_2) + (\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2) \quad \text{asociativa} \\
&= \|f\|^2 + 2(\|f\|_2\|g\|_2 + \|f'\|_2\|g'\|_2) + \|g\|^2 \quad \text{por definición}
\end{aligned}$$

Por facilidad, se propone el siguiente cambio de notación $\mathbf{f} = \big(\|f\|_2, \|f'\|_2\big)$ y $\mathbf{g} = \big(\|g\|_2, \|g'\|_2\big)$, entonces reescribiendo de esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i\mathbf{g}_i + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i\mathbf{g}_i\right| + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i^2)(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i^2)} + \|g\|^2 \text{por la desigualdad de Cauchy-Schwarz} \\
&= \|f\|^2 + 2\sqrt{(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)(\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)} + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 + 2\sqrt{(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2)}\sqrt{(\|g\|_2^2 + \|g'\|_2^2)} + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2 \\
\therefore \|f+g\| &\leq \|f\| + \|g\| \quad \text{al aplicar raíz cuadrada a ambos lados}
\end{aligned}$$

Así, $\|f\|$ es una norma en $\mathcal{C}^1([0,1])$ ■

Punto 1.9 Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio con producto interno. Demostrar que para $x, y \in V$ se tiene

a) La ley del paralelogramo: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

b) La ley de Pitagoras: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

[$\Rightarrow$]
Supongamos que $x \perp y$, es decir que $\langle x,y\rangle = 0$, y veamos que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ .En efecto
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$
[$\Leftarrow$]
Supongamos que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ y veamos que $u \perp v$,
$\|x+y\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$
$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle$, claramente $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi $\langle u,v\rangle = 0$, es decir, $u \perp v$.

c) **i)** La identidad polar: $\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

Observe que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle \\
&= (\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) - (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle) \quad \text{linealidad y simetría} \\
&= 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle \\
&= 4\langle x,y\rangle \quad \text{simetría}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\therefore \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \langle x,y\rangle$$

c) **ii)** $\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2}{4}$

como estamos sobre el conjunto $\mathbb{C}$ recuerde que $\langle x,y\rangle = \Re\langle x,y\rangle + i\Im\langle x,y\rangle$. Por el inciso anterior sabemos que $\Re\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}$. Veamos que $i\Im\langle x,y\rangle = \frac{i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2}{4}$.

$$
\begin{aligned}
i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 &= i\big(\langle x+iy, x+iy\rangle - \langle x-iy, x-iy\rangle\big)\\
&= i\Big[\big(\langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle\big) - \big(\langle x,x\rangle - \langle x,iy\rangle - \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle\big)\Big]\\
&= i\big(2\langle x,iy\rangle + 2\langle iy,x\rangle\big)\\
&= i\big(-2i\langle x,y\rangle + 2i\langle y,x\rangle\big) \quad \text{propiedad ii'), } \bar{i} = -i,\ \overline{-i} = i + \textit{simetria}\\
&= -2i^2\big(\langle x,y\rangle - \overline{\langle x,y\rangle}\big) \quad \text{propiedad iii') simetría}\\
&= 2\big(\Re\langle x,y\rangle + i\Im\langle x,y\rangle - \Re\langle x,y\rangle + i\Im\langle x,y\rangle\big) \quad \langle x,y\rangle, \overline{\langle x,y\rangle} \in \mathbb{C}\\
&= 2\big(2i\Im\langle x,y\rangle\big) = 4i\Im\langle x,y\rangle\\
&\Rightarrow i\Im\langle x,y\rangle = \frac{i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\therefore \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4} = \Re\langle x+y\rangle + i\Im\langle x+y\rangle = \langle x,y\rangle$$

d) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = ay$ o $y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$.

($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x,y\rangle\\
&= \langle x+y, x+y\rangle \quad \text{linealidad y simetría}\\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \quad \|\cdot\|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ y simetría}\\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,ax\rangle + \|ax\|^2 \quad y = ax\\
&= \|x\|^2 + 2a\langle x,x\rangle + (|a|\|x\|)^2\\
&= \|x\|^2 + 2a\|x\|^2 + a^2\|x\|^2\\
&= (\|x\| + a\|x\|)^2\\
&= (\|x\| + |a|\|x\|)^2 \quad \text{pues } a \geq 0\\
&= (\|x\| + \|ax\|)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\\
\Rightarrow \therefore \|x+y\| &= \|x\| + \|y\|
\end{aligned}
$$

($\Rightarrow$)
Sabemos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Por el caso anterior tenemos que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Por otro lado,

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Por otro lado, considere la ley de cosenos

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\|x\|\|y\|cos\theta + \|y\|^2$$

Por hipótesis estas 3 ecuaciones deben de ser iguales cuando se considera la ley de cosenos para $\|x+y\|^2$. Esto implica que (EN REALIDAD ESTO ES UNA DEFINICIÓN, mentiras)

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

Considere el caso no trivial en el que $\|x\|, \|y\| > 0$. Esto quiere decir que

$$
\begin{aligned}
&\|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|\cos\theta\\
&\Rightarrow \cos\theta = 1\\
&\qquad \theta = \cos^{-1}(1) = 0,\ \pi
\end{aligned}
$$

Lo cual ocurre ssi $x = ay$ o $y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$, para todo $x, y \in V$. Note que este caso incluye el caso trivial en el que $x = 0$ o $y = 0$. Así, se cumple que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = ay$ o $y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$ ■

Punto 1.10 Sea $V = C([a,b])$.

a) Pruebe que V es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b}|f(t)|$ para todo $f \in V$ y para todo $t \in [a,b]$.

b) Pero con la norma $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$, no lo es.
Ayuda: Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (t-\frac{1}{2})^{1/n}, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Siga estos pasos:

I) Pruebe que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.

II) Sea $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ verifique que $f \notin V$.

Recuerde que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V, es una sucesión de Cauchy si

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

Veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = \begin{cases} \lim\limits_{m,n\to\infty} \|0-0\| = 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{m,n\to\infty} \|(t-\frac{1}{2})^{1/n} - (t-\frac{1}{2})^{1/m}\| = \|1-1\| = 0, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

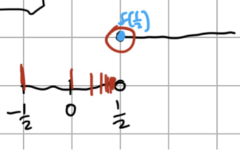
$$\therefore \lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

Sea $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$. Veamos que f no es una función continua en $[a,b]$, es decir, que $f \notin V = ([0,1])$.

II.b.ii. Sea $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$, Veamos que $f(t) \notin C[a,b]$

Pues $f(t)$ no es continua en $t = \frac{1}{2}$. $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} := \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$, pero

$\underbrace{f(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})} \to 0 \ne f(\frac{1}{2}) = 1$ cuando $n \to \infty$, luego $f(t)$ No es continua.



Respuesta.

1. ESTÁ EN LAS DIAPOSITIVAS (59 en adelante). **Nota:** está con el $\sup A$, pero $\sup A = \max A$ cuando $\max A \in A$.

2. ESTÁ EN LAS NOTAS DE CAMILO COSSIO PERO TIENE ERRORES (ESTÁN CORREGIDOS).

Punto 1.11 Sea $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Determine si $\langle x, y\rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

a) $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k |y_k|$

b) $\langle x, y\rangle = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$

c) $\langle x, y\rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k^2\right)^{1/2}$

Punto 1.12 Sea $V = C[0,1]$, determine si $\langle f, g\rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

a) $\langle f, g\rangle = f(1)g(1)$

b) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)df$, donde $f' = \frac{df}{dt}$ y lo mismo para g'.

c) $\langle f, g\rangle = \left(\int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt\right)$

Punto 1.13 En el espacio vectorial $V = C(1, e)$, se define un producto interno por

$$\langle f, g\rangle = \int_1^e (\ln t) f(t)g(t)dt.$$

a) Si $f(t) = \sqrt{t}$, calcular $\|f\|$.

b) Encontrar un polinomio de primer grado $g(t) = a + bt$ que sea ortogonal a la función constante $f(t) = 1$.

a) $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_1^e t \operatorname{Ln}(t)\, dt = \frac{t^2}{2}\operatorname{Ln}(t)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\, dt = \frac{t^2}{2}\operatorname{Ln}(t)\Big|_1^e - \frac{t^2}{4}\Big|_1^e$

$u = \operatorname{Ln}(t) \quad du = \frac{1}{t}dt$

$dv = t\,dt \quad v = \frac{t^2}{2}$

$uv| - \int v\,du$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$ ✓ $\therefore \|f\| = \frac{1}{2}(e^2+1)^{0.5}$

b) $\langle f, g\rangle = \int_1^e \operatorname{Ln}(t)(a+bt)\, dt = a\int_1^e \operatorname{Ln}(t)dt + b\int_1^e t\operatorname{Ln}(t)dt$

$= aI_1 + bI_2 = a + \frac{b}{4}(e^2+1) = 0, \quad a = -\frac{b}{4}(e^2+1)$

$\therefore I_1 = t\operatorname{Ln}(t)\Big|_1^e - \int_1^e dt = e - (e-1) = 1 \qquad I_2 = \frac{1}{4}(e^2+1)$

$u = \operatorname{Ln}(t) \quad du = \frac{1}{t}dt$

$dv = dt \quad v = t,$

Finalmente $g(t) = b\left(t - \frac{e^2+1}{4}\right)$

Punto 1.14 En el espacio $C(-1, 1)$, sea $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Considere las tres funciones u_1, u_2 y u_3 dadas por

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = t, \quad u_3(t) = 1 + t.$$

Pruebe que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo de $\pi/3$, y dos forman entre sí un ángulo de $\pi/6$.

Punto 1.15 En el espacio vectorial $\mathcal{P}_n$ de todos los polinomios reales de grado $\leq n$, se define

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

a) Demostrar que $\langle f, g\rangle$ es un producto interno de para $\mathcal{P}_n$.

b) Calcular $\langle f, g\rangle$ cuando $f(t) = t$ y $g(t) = at + b$.

c) Si $f(t) = t$, hallar todos los polinomios g ortogonales a f.

Punto 1.16 Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. El complemento ortogonal de H, denotado por $H^{\perp}$, se define como

$$H^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0, \ \forall h \in H\}.$$

a) Pruebe que $H^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$.

b) Para $V = \mathbb{R}^3$ y $H = \{(x, y, z) : 4x - y + 6z = 0\}$

   I) Encuentre $H^{\perp}$.

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z) : 4x - y + 6z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : y = 4x + 6z\} \\ &= \{(x, 4x + 6z, z) : \ \forall x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 4, 0) + z(0, 6, 1) : \ \forall x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{gen}\{(1, 4, 0), (0, 6, 1)\} \end{aligned}$$

Sea $h = (a, b, c) \in H^{\perp}$. Entonces, por definición de $H^{\perp}$, se tiene que $\langle h, u_1\rangle = 0$ y $\langle h, u_2\rangle = 0$ donde $u_1 = (1, 4, 0)$ y $u_2 = (0, 6, 1)$.

$$\langle h, u_1\rangle = a + 4b = 0, \quad \langle h, u_2\rangle = 6b + c = 0$$

Entonces $a = -4b$ y $c = -6b$. Luego $(a, b, c) = (-4b, b, -6b) = b(-4, 1, -6)$ y así $H^{\perp} = \text{gen}\{(-4, 1 - 6)\}$

   II) Muestre que $\mathbb{R}^3 = H \bigoplus H^{\perp}$, es decir, $\mathbb{R}^3 = H + H^{\perp}$ y $H \cap H^{\perp} = \{0\}$.

$$\begin{aligned} H &= \{x(1, 4, 0) + z(0, 6, 1) : \ \forall x, z \in \mathbb{R}\} \\ H^{\perp} &= \{y(-4, 1, -6) : \ \forall y \in \mathbb{R}\} \\ H + H^{\perp} &= \{x(1, 4, 0) + y(-4, 1, -6) + z(0, 6, 1) : \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^3 = H + H^{\perp}$ (VER NOTAS JUAN, PARA QUE ESTO SEA CIERTO TENEMOS QUE VER QUE LA MA cada vector en $V = \mathbb{R}^3$ es una suma de un vector en H y un vector en $H^{\perp}$. Suponga que $H \cap H^{\perp} \neq \{0\}$ y sea $u \in H \cap H^{\perp}$. Entonces $u = u + 0$ con $u \in H$ y $0 \in H^{\perp}$, pero también $u = 0 + u$ con $0 \in H$ y $u \in H^{\perp}$. Lo cual es una contradicción pues, por definición del complemento ortogonal $H^{\perp}$, si $u \in H^{\perp}$ entonces $u \notin H$ y viceversa. Luego $u = 0$, entonces $H \cap H^{\perp} = \{0\}$. Como $H + H^{\perp} = \mathbb{R}^3 \wedge H \cap H^{\perp} = \{0\}$, así $H \bigoplus H^{\perp} = \mathbb{R}^3$ ■

   III) Exprese el vector $v = (2, 1, 3)$ como $h + u$, donde $h \in H$ y $u \in H^{\perp}$.

Si $h \in H$ entonces es de la forma $h = \alpha(1, 4, 0) + \gamma(0, 6, 1)$. Si $u \in H^{\perp}$ entonces es de la forma $u = \beta(-4, 1, -6)$. Entonces $h + u$

$$(2, 1, 3) = \alpha(1, 4, 0) + \beta(-4, 1, -6) + \gamma(0, 6, 1)$$

Lo cual resulta en el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} \alpha - 4\beta = 2 \\ 4\alpha + \beta + 6\gamma = 1 \\ -6\beta + \gamma = 3 \end{gathered}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones en WolframAlpha se obtiene $\alpha = 6/53, \beta = -25/53, \gamma = 9/53$.

Punto 1.17 Sea $V = C[-1,1]$ y $H = \{f \in V : f(-t) = f(t), \forall t \in [-1,1]\}$ el conjunto de las funciones pares.

a) Pruebe que el complemento ortogonal $H^\perp$ es el conjunto de todas las funciones impares.

Punto 1.18 Sea H y K subespacios de $\mathbb{R}^n$.

a) Pruebe que si $H \subset K$, entonces $K^\perp \subset H^\perp$.

Sea cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \in K^\perp$ esto significa que $\langle v, k\rangle = 0$ para $\forall k \in K$ y como por hipótesis H es un subespacio de K, también tenemos que $\langle v, h\rangle = 0$ para $\forall h$ donde $h \in H$, lo que quiere decir que $v \in H^\perp$. con esto podemos decir que $K^\perp \subset H^\perp$ ya que todo elemento de $K^\perp$ esta contenido en $H^\perp$.

b) Pruebe que $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.

Claramente $H + K$ es un subespacio pues es la suma de subespacios de $\mathbb{R}^n$, y por tanto, su complemento ortogonal también. Sea cualquier vector $v \in (H + R)^\perp$ esto significa que $\langle v, k + h\rangle = 0$ para $\forall k \in K$ y $\forall h \in H$, si aplicamos propiedades del producto interno tenemos que $\langle v, k\rangle + \langle v, h\rangle = 0$, esto significa que tanto $\langle v, k\rangle = \langle v, h\rangle = 0$, es decir, $h \in H^\perp$ y $k \in K^\perp$. Por tanto $v \in H^\perp \cap K^\perp$ entonces $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.

c) Pruebe que $H^{\perp\perp} = H$, donde $H^{\perp\perp} = (H^\perp)^\perp$.

Razonando por el absurdo, supongamos $H^{\perp\perp} \neq H$, es decir, existe un $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \in H$ y $v \notin (H^\perp)^\perp$, ahora por definición del complemento ortogonal tenemos que $\langle v, h\rangle = 0$ para $\forall h \in H^\perp$, pero $(H^\perp)^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, h\rangle = 0, \quad \forall h \in H^\perp\}$, lo cual implica que $v \in (H^\perp)^\perp$ y hallamos una contradicción. Siendo así las cosas, concluimos que $H^{\perp\perp} = H$.

Punto 1.19 Sea $V = \mathcal{M}_{nn}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$.

a) Definamos $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr} AB^T$, donde $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ es la traza de la matriz $A = (a_{ij})$ y B^T es la transpuesta de B. Pruebe que V es un espacio con producto interno.

b) Pruebe que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \quad \text{por definición de tr} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{ij} \quad \text{pues } a_{ii} \text{ y } b_{ii} \text{ son números arbitrarios} \\
\therefore \operatorname{tr}(AB) &= tr(BA) \blacksquare \quad \text{por definición de tr}
\end{aligned}$$

c) Si P es una matriz invertible de orden $n \times n$, pruebe que

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A.$$

Que P sea una matriz invertible de orden $n \times n$ quiere decir que $P^{-1}P = PP^{-1} = I$ donde I es la matriz identidad de dimensión $n \times n$ o la matriz diagonal $\operatorname{diag}(a_1 = 1, ..., a_n = 1)$. Sean $P^{-1} = (p'_{ij})$, $A = (a_{ij})$ y $P = (p_{ii})$ la notación para denotar cada matriz para todo $i, j \in [1, n]$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}((P^{-1}A)P) &= \operatorname{tr}(P(P^{-1}A)) \quad \text{por la propiedad anterior} \\
&= \operatorname{tr}(IA) \quad \text{pues } P^{-1}P = I \\
&= \operatorname{tr}(A)
\end{aligned}$$

Punto 1.20 Sean $x_1, ..., x_n,\ y_1, ..., y_n$ números reales, $1 < p < \infty$ y q definido por $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Probar las siguientes desigualdades:

a) Desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/q}.$$

Prueba:

Si $(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{1/p} = 0$ o $(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q)^{1/q} = 0$ la desigualdad es verdadera. Esto es equivalente a decir que $(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p) = 0$ o $(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q) = 0$, y por estar en valor absoluto sería cero solo si cada uno de sus términos es cero, esto es $|x_k|^p = 0$ o $|y_k|^q = 0$ para $\forall k$. Entonces $|x_k|^p|y_k|^q = 0$ para $\forall k$.

Ahora, consideremos el caso en el que ambos sean diferentes de cero. Podemos definir z_k, w_k como

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k w_k| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|z_k|^p}{p} + \frac{|w_k|^q}{q}\right)$$

ahora

$$z_k = \frac{x_k}{(\sum_{l=1}^{n}|x_l|^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad w_k = \frac{y_k}{(\sum_{l=1}^{n}|y_l|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

por la desigualdad de Young

$$\sum_{l=1}^{n}|z_l|^p = \sum_{l=1}^{n}\frac{|x_l|^p}{|(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}|^p} = \frac{\sum_{l=1}^{n}|x_l|^p}{|(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}}|^p} = 1$$

y se le aplica lo mismo a w_l, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{|z_k|^p}{p} + \frac{|w_k|^q}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces $\sum_{k=1}^{n}|z_k w_k| \leq 1$. Multiplicando a ambos lados de la desigualdad por el valor positivo $(\sum_{l=1}^{n}|x_l|^p)^{\frac{1}{p}})(\sum_{l=1}^{n}|y_l|^q$ se obtiene la desigualdad de Hölder ■

b) Desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Prueba:
Observe que, para todo $k = 1, ..., n$, se cumple que

$$\begin{aligned} |x_k + y_k|^p &= |x_k + y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq (|x_k| + |y_k|)|x_k + y_k|^{p-1} \quad \text{por la desigualdad triangular} \\ \therefore |x_k + y_k|^p &\leq |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \quad \text{distributiva} \end{aligned}$$

Lo cual implica que la desigualdad se mantiene al considerar la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n}\left(|x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k + y_k|^{p-1}$$

Sea $q = \frac{p}{p-1}$. Observe que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$, entonces al aplicar la desigualdad de Hölder a cada uno de los términos de la derecha de la desigualdad, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Luego, al sumar ambas desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Note que como $q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow p = (p-1)q$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

Ahora, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, así

$$\therefore \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \quad \blacksquare$$

Punto 1.21 Sea $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha \|v_k - v_{k-1}\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que la sucesión $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente en $\mathbb{R}^n$.

Punto 1.22 Pruebe que todo espacio vectorial finito-dimensional normado es de Banach.

Punto 1.23 Pruebe que $l_p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ para $p \geq 1$, es un espacio de Banach con la norma definida por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

donde $x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)_{n \geq 1}$ y $ax = (ax_n)_{n \geq 1}$, a un escalar real.

Prueba:

Debemos ver que la sucesión es de Cauchy en l_p y convergente en l_p (lím $\in l_p$).

Punto 1.24 Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V. Pruebe que $V = M \bigoplus M^{\perp}$, es decir, hay que demostrar:

I) $V = M + M^{\perp}$.

II) Todo $v \in V$ se puede expresar como $v = m + p$ de manera única, donde $m \in M$ y $p \in M^{\perp}$.

Punto 1.25 Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert V. Entonces

a) M es completo si y sólo si M es cerrado en V.

b) $M^{\perp} = \{0\}$ si y sólo si M es denso en V.

c) Si M es cerrado y $M^{\perp} = \{0\}$, entonces $M = V$.

d) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es la clausura de M.

e) Si M es cerrado, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

Punto 1.26 Supongamos que $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base ortonormal para V.

b) $\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\langle u, v_j\rangle\overline{\langle v, v_j\rangle}$ para cada $u, v \in V$.

c) La igualdad de Parseval se tiene: $\|u\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty}|\alpha|^2$, donde $\alpha_j = \langle u, v_j\rangle$, para todo $u \in V$.

d) El subespacio generado por $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ es denso en V.

e) Para cada $u \in V$, si $\langle u, v_j\rangle = 0$, para $j = 0, 1, 2, ...$ entonces $u = 0$.

Afirmaciones equivalentes significa que a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$a).

Taller 2

Punto 2.6 Supongamos que $\{u_n\}_{=1}^{\infty}$ es una sucesion ortonormal en un espacio de Hilbert H y sea $x \in H$ tal que

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, u_n\rangle|^2$$

Entonces

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle u_n$$

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, u_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle \langle x, u_n\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, u_k\rangle \langle u_n, u_k\rangle \quad \text{Por ser ortonormales} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle \langle u_n, \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, u_k\rangle u_k\rangle \quad \text{Por Cauchy-Schwarz} \\
&= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle u_n, \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, u_k\rangle u_k\rangle
\end{aligned}$$

y esto es

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle u_n, \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, u_k\rangle u_k\rangle \\
x &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, u_n\rangle u_n
\end{aligned}$$