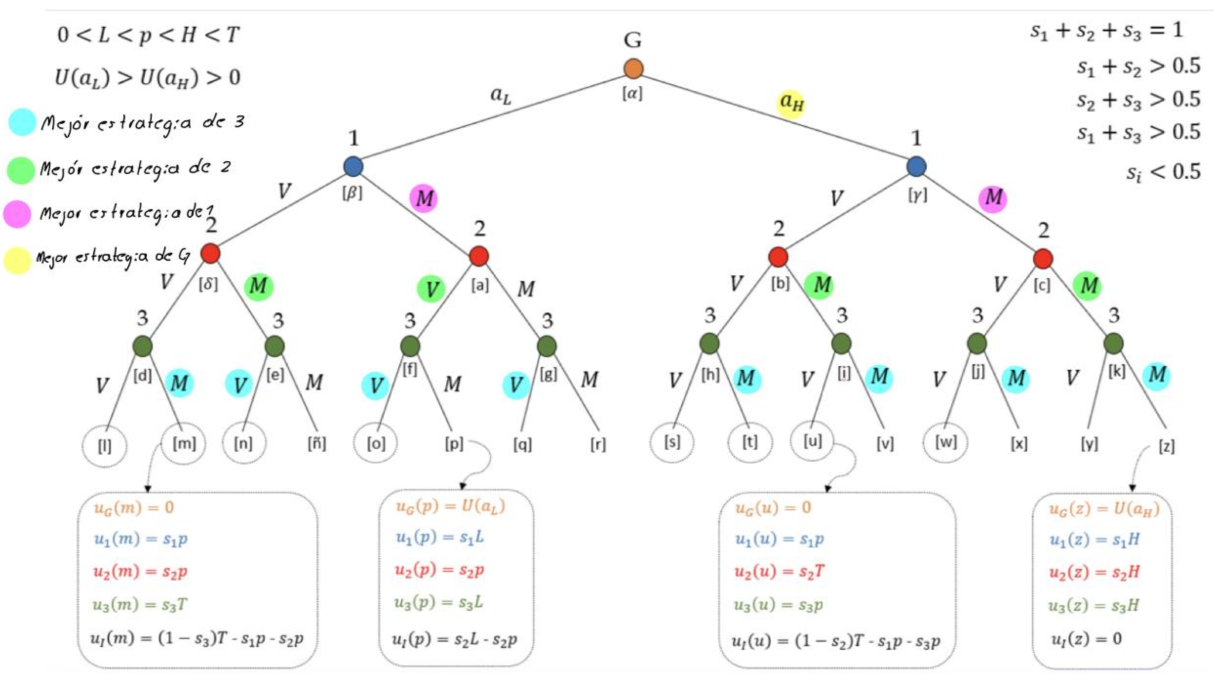
Taller 2 Teoría de juegos

Tomás Urrego, Adrián Guerrero, Pablo Buitrago

2023-04-25

Solución.

1.



Primera parte: representación matemática y conteo de estrategias puras.

1)-

$$N = (G, 1, 2, 3)$$
$$A = (a_L, a_H, V, M)$$

2)-

$$S_g = \chi(\alpha) = [a_L, a_H]$$
$$S_1 = \chi(\beta) \cdot \chi(y) = [(V, V); (V, M); (M, V); (M, M)]$$

3)-

$$\sqcap_{h\in H:\rho(h)=2}$$
$$\rho(\delta)=\rho(a)=\rho(b)=\rho(c)=2$$

En este caso, para el accionista 2, $H=(\delta,a,b,c)$, en donde podemos ver como ejemplo:

$$S_2=\chi(\delta)\cdot\chi(a)\cdot\chi(b)\cdot\chi(c)=(V,M,V,M)$$

El número de elementos de todo el conjunto de estrategias puras del jugador 2 (S_2) es de 16 elementos, pues $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16=2^4$.

4)-

$$\sqcap_{h\in H:\rho(h)=3}$$

En este caso, para el accionista 3, $H=(d,e,f,g,h,i,j,k)$, en donde podemos ver como ejemplo:

$$S_2=\chi(d)\cdot\chi(e)\cdot\chi(f)\cdot\chi(g)\cdot\chi(h)\cdot\chi(i)\cdot\chi(j)\cdot\chi(k)=(V,V,V,M,V,M,M,V)$$

El número de elementos de todo el conjunto de estrategias puras del jugador 3 (S_3) es de 256 elementos, pues $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=256=2^8$.

Segunda parte: comportamiento óptimo del tercer accionista.

5)-

$$U_3(z)=S_3H$$
$$U_3(y)=S_3P$$

$H>P$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es mantener (M), $U_3(z)>U_3(y)$.

6)-

$$U_3(w)=S_3P$$
$$U_3(x)=S_3H$$

$H>P$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es mantener (M). $U_3(x)>U_3(w)$.

7)-

$$U_3(u)=S_3P$$
$$U_3(v)=S_3H$$

$H>P$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es mantener (M). $U_3(v)>U_3(u)$.

8)-

$$U_3(s)=S_3P$$
$$U_3(t)=S_3T$$

$T>P$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es mantener (M). $U_3(t)>U_3(s)$.

9)-

$$U_3(q) = S_3P$$
$$U_3(r) = S_3L$$

$P > L$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es vender (V). $U_3(q) > U_3(r)$.

10)-

$$U_3(o) = S_3P$$
$$U_3(p) = S_3L$$

$P > L$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es vender (V). $U_3(o) > U_3(p)$.

11)-

$$U_3(n) = S_3P$$
$$U_3(\tilde{n}) = S_3L$$

$P > L$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es vender (V). $U_3(n) > U_3(\tilde{n})$.

12)-

$$U_3(l) = S_3P$$
$$U_3(m) = S_3T$$

$T > P$ por lo que la decisión óptima del accionista 3 es mantener (M). $U_3(m) > U_3(l)$.

13)-

Esta promesa depende de la decisión del gerente, en caso de que el gerente decida hacer un esfuerzo alto (a_H), la promesa si sería creíble pues si los accionistas 1 y 2 mantienen, lo más conveniente para el accionista 3, también sería mantener; por otro lado si el gerente decide hacer poco esfuerzo, entonces la promesa no será creíble, pues si los inversionistas 1, 2 cumplen y mantienen, lo mejor que podría hacer el accionista 3 es vender, pues así obtendría una mayor utilidad.

14)-

Para el accionista 3, según los resultados encontrados, podemos ver que la estrategia que más le convendría sería: (M,V,V,V,V,M,M,M,M).

Tercera parte: comportamiento óptimo del segundo accionista.

15)-

$$U_2(z) = S_2H$$
$$U_2(y) = S_2H$$
$$U_2(x) = S_2P$$
$$U_2(w) = S_2P$$

Lo mejor que puede hacer el accionista 2 en este caso es mantener (M), pues independientemente de lo que haga el accionista 3, el accionista 2 va a recibir $H > P$.

16)-

$$U_2(s) = S_2P$$

$$U_2(t) = S_2P$$
$$U_2(u) = S_2T$$
$$U_2(v) = S_2H$$

En este caso lo que más le conviene al accionista 2 es mantener (M), pues $S_2T, S_2H > S_2P$.

17)-

$$U_2(r) = S_2L$$
$$U_2(q) = S_2L$$
$$U_2(p) = S_2P$$
$$U_2(o) = S_2P$$

Lo mejor que puede hacer el accionista 2 en este caso es vender (V), pues independientemente de lo que haga el accionista 3, el accionista 2 va a recibir $P > L$.

18)-

$$U_2(l) = S_2P$$
$$U_2(m) = S_2P$$
$$U_2(n) = S_2T$$
$$U_2(\tilde{n}) = S_2L$$

Este caso es más especial, pues es seguro que el accionista 3 venderá, por lo que lo mejor que puede hacer el accionista 2 es mantener (M) obteniendo una utilidad de S_2T.

Cuarta parte: comportamiento óptimo del primer accionista y del gerente.

19)-

$$U_1(s) = S_2P$$
$$U_1(t) = S_2P$$
$$U_1(u) = S_2P$$
$$U_1(v) = S_2P$$
$$U_1(w) = S_2T$$
$$U_1(x) = S_2H$$
$$U_1(y) = S_2H$$
$$U_1(z) = S_2H$$

Puesto que los accionistas 2 y 3 les conviene mantener (M), al accionista 1 también le convendría, pues obtendría una utilidad de $S_2H > S_2P$.

20)-

$$U_1(l) = S_2P$$
$$U_1(m) = S_2P$$
$$U_1(n) = S_2P$$

$$U_1(\tilde{n}) = S_2 P$$

$$U_1(o) = S_2 T$$

$$U_1(p) = S_2 L$$

$$U_1(q) = S_2 L$$

$$U_1(r) = S_2 L$$

Lo que más le convendría al accionista 1 es mantener (M), pues en este caso los accionistas 2 y 3 venderían (V) dándole al accionista 1 una utilidad de $S_1 T > H > P > L > 0$.

21)-

Lo mejor que el gerente puede hacer es realizar un alto esfuerzo (a_H), pues al hacer esto, los accionistas 1,2 y 3 mantendrían (M), generando que el gerente obtenga una $U(a_H) > U(a_L) > 0$.

22)-

Las estrategias puras que configuran el equilibrio perfecto estarían dadas por:

$$S_G = a_H; S_1 = M; S_2 = M; S_3 = M \rightarrow (a_H, M, M, M)$$

es imposible que todos obtengan la mayor utilidad T, sin embargo, en este caso específico, todos podrían obtener la segunda mayor utilidad (H) dejando al inversionista por fuera, por lo que ni los agentes ni los gerentes tienen incentivos a desviarse.

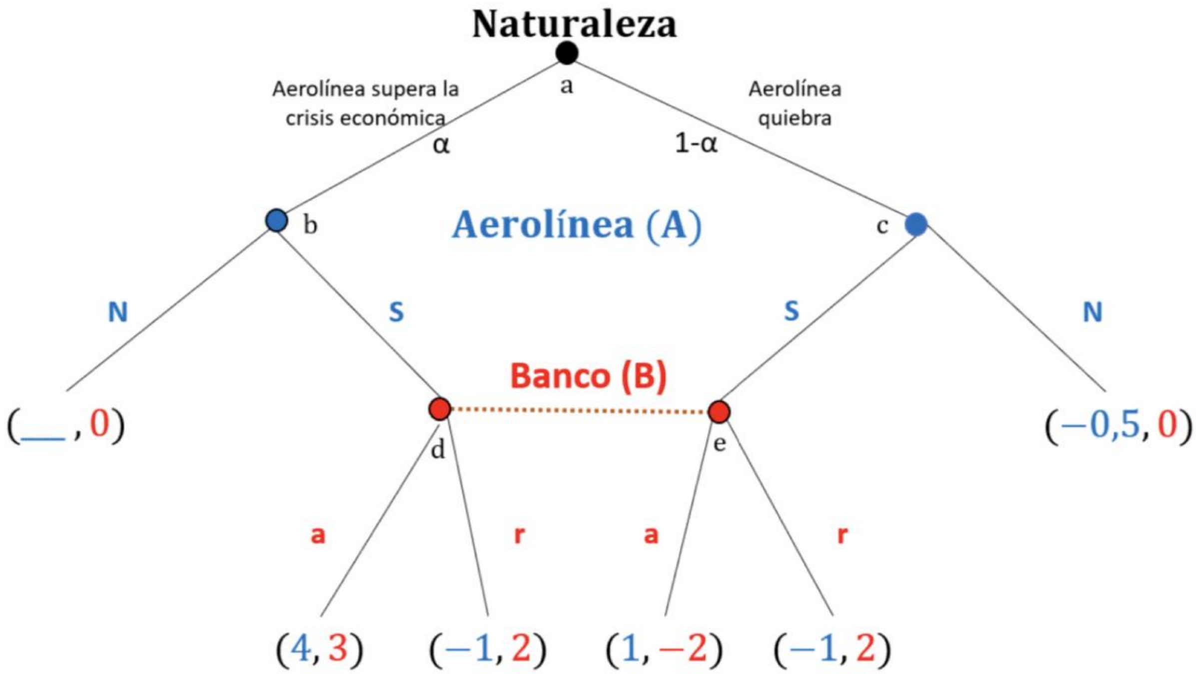
23)-

Este análisis es parecido al punto anterior, en el equilibrio los accionistas no venden (V) ya que esto les generaría una utilidad menos (P), les conviene más mantener (M), ya que así están obteniendo una utilidad $H > P$.

24)-

Básicamente, la finalidad sería que los accionistas no se encontrasen incentivados a optar por vender sus participaciones, para ello, la mejor recomendación que podríamos darle al grupo Gilinski sería que el parámetro P debería ser mayor al parámetro H, pues así podrían controlar las acciones, al no ser así, es decir P<H, los accionistas no tendrían interés en las acciones del gerente, es decir, actuarían de maneta independiente probablemente cediendo sus posiciones o acciones.

2.



a)-

La empresa de consultoría estima que la probabilidad de quebrar es dos veces mayor a la probabilidad de no quebrar, por lo que tenemos:

- Probabilidad de no quebrar:

$$2\alpha = (1 - \alpha)$$
$$2\alpha + \alpha = 1$$
$$3\alpha = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{3}$$

* Probabilidad de quebrar:

$$\alpha = 2(1 - \alpha)$$
$$\alpha = 2 - 2\alpha$$
$$3\alpha = 2$$
$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Debido a que la aerolínea tiene una alta probabilidad de quebrar, el riesgo para el banco de otorgar un crédito también es alto, por lo que el banco debe ser cauteloso al analizar el riesgo de la empresa, pues este no sabe si la empresa va a quebrar o no.

b)-

No solicitar el préstamo cuando el estado de naturaleza es favorable producirá el doble de pérdidas que en el caso que se solicita el préstamo, pero el banco lo rechaza, es decir:

El pago que recibe la empresa cuando deciden hacer el préstamo pero el banco lo rechaza es de -1, por lo que el pago que recibe la empresa cuando no realiza el préstamo estando en condiciones favorables es de $2(-1) = -2$. la equivalencia de este pago tiene sentido, pues haber superado la crisis no indica que la empresa se encuentre en las mejores instancias económicas por lo que si fuéramos la empresa de consultoría, le sugeriríamos a la aerolínea que independientemente del estado de la naturaleza, esta deberá solicitar siempre el préstamo.

c)-

$$N = (Aerolinea(A), Banco(B))$$
$$A = ([Nosolicitar(N), Solicitar(S)]; [Aceptar(a), Rechazar(r)])$$
$$H = (b, c, d, e)$$
$$\rho(b) = A; \rho(c) = A; \rho(d) = B; \rho(e) = B$$
$$\Pi_A = (b, c); \Pi_B = ([d, e]); \Pi = (b, c, [e, d])$$
$$S_A = ([N, N]; [N, S]; [S, N]; [S, S])$$
$$S_B = (a, r)$$

d)-

Debido a que nos encontramos ante un juego con información incompleta e imperfecta, encontramos que únicamente existe solo un subjuego, pues debido a la falta de información del banco, este solo cuenta con un conjunto de información que se puede ver reflejado con la línea punteada del gráfico. En conclusión, la estructura de este juego únicamente presenta un subjuego, por lo que es imposible ejecutar la sugerencia que está proponiendo el compañero del equipo, donde propone que el juego se resolviera dividido en 5 subjuegos.

e)-

(S,S)

$$U_A^E((S, S)a) = \frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}1 = 2$$
$$U_A^E((S, S)r) = \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(-1) = -1$$
$$U_B^E((S, S)a) = \frac{1}{3}3 + \frac{2}{3}(-2) = -\frac{1}{3}$$
$$U_B^E((S, S)r) = \frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}2 = 2$$

(S,N)

$$U_A^E((S, N)a) = \frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}(-0.5) = 1$$
$$U_A^E((S, N)r) = \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(-0.5) = -\frac{2}{3}$$
$$U_B^E((S, N)a) = \frac{1}{3}3 + \frac{2}{3}0 = 1$$
$$U_B^E((S, N)r) = \frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$$

(N,S)

$$U_A^E((N, S)a) = \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}1 = 0$$
$$U_A^E((N, S)r) = \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}(-1) = -\frac{4}{3}$$

$$U_B^E((N,S)a) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}(-2) = -\frac{3}{3}$$

$$U_B^E((N,S)r) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}$$

(N,N)

$$U_A^E((N,N)a) = \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}(-0.5) = -1$$

$$U_A^E((N,N)r) = \frac{1}{3}(-2) + \frac{2}{3}(-0.5) = -1$$

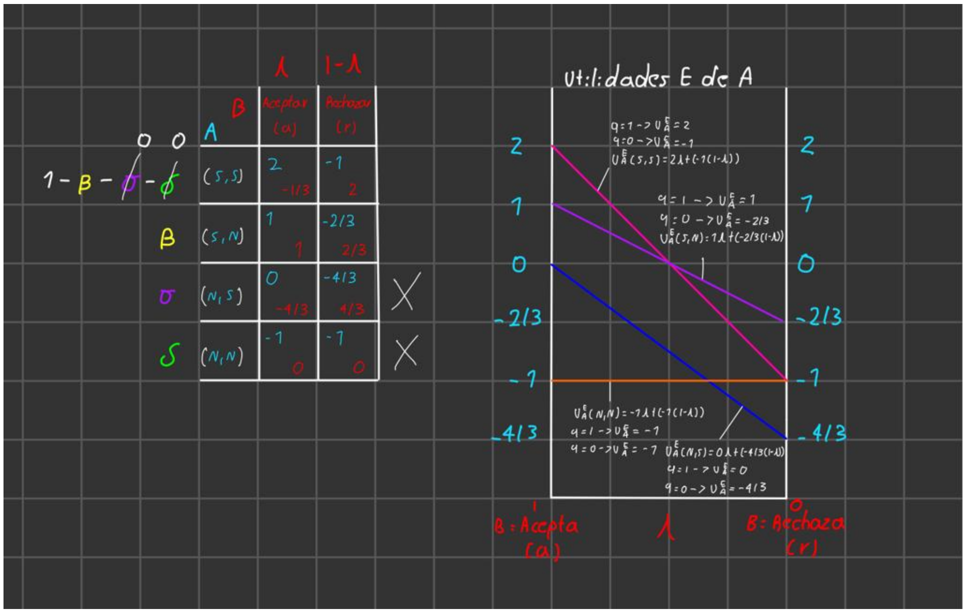
$$U_B^E((N,N)a) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}0 = 0$$

$$U_B^E((N,N)r) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}0 = 0$$

Obteniendo como resultado la siguiente matriz que representa los pagos o utilidades esperadas de la Aerolínea (A) y el Banco (B)

A \ B	Aceptar (a)	Rechazar (r)
(S,S)	2 ; -1/3	-1 ; 2
(S,N)	1 ; 1	-2/3 ; 2/3
(N,S)	0 ; -4/3	-4/3 ; 4/3
(N,N)	-1 ; 0	-1 ; 0

f)-



g)-

La estrategia (N,N) es débilmente dominada por la estrategia (S,S), y dominada fuertemente por la estrategia (S,N), por esta razón, se debería enfocar la búsqueda de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas en las mejores estrategias (S,S) y (S,N), por otro lado podemos descartar la estrategia (N,S) pues esta no domina a (N,N) y está siendo estrictamente dominada por (S,S) y (S,N). Por último (N,N) no domina a ninguna estrategia, por lo cual también podemos descartarla.

h)-

sabemos que:

$$\sigma = 0, \delta = 0$$

$$U_A^E(S,S) = U_A^E(S,N)$$

$$2\lambda + (-1(1-\lambda)) = \lambda + (-\frac{2}{3}(1-\lambda))$$

$$2\lambda + (-1+\lambda) = \lambda - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lambda$$

$$3\lambda - 1 = \frac{5}{3}\lambda - \frac{2}{3}$$

$$3\lambda - \frac{5}{3}\lambda = -\frac{2}{3} + 1$$

$$\frac{4}{3}\lambda = \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

Ahora:

$$U_B^E(a) = U_B^E(r)$$

$$-\frac{1}{3}(1-\beta) + \beta = 2(1-\beta) + \frac{2}{3}\beta$$

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\beta+\beta=2-2\beta+\frac{2}{3}\beta$$
$$-\frac{1}{3}\beta+\beta+2\beta-\frac{2}{3}\beta=2+\frac{1}{3}$$
$$2\beta=\frac{7}{3}$$
$$\beta=\frac{\frac{7}{3}}{2}=\frac{7}{6}$$
$$\sigma=0,\delta=0$$