Solución Taller 1: Espacios normados, con producto interno, de Banach y de Hilbert

Alejandro Salazar Arango

8 de marzo de 2023

1. Considere las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.

   a) Pruebe que $\|u\| = \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.

   b) Pruebe que $\|u\|_p \to \|u\|_\infty$ cuando $p \to \infty$.

   c) Para $0 < p < 1$, la función $\|\cdot\|_p$ define una norma para $\mathbb{R}^n$?

   d) Pruebe que $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

2. Verifique que $\|f\|_\infty = \text{máx}_{a\leq t\leq b}|f(t)|$, es una normal en el espacio vectoria $C([a,b])$.

3. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la noma de la suma en $\mathbb{R}^n$ sea la igualdad, es decir encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir los vectores $x, y\ in\mathbb{R}^n$ para verificar que:

$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

4. Sea X un espacio vectorial y sean $u, v : X \to [0,\infty)$ dos normas en X. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida para todo $x, y \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X:

   a) $\|x\| = u(x) + v(x)$

   b) $\|x\| = \text{máx}\, u(x), v(x)$

   c) $\|x\| = \left(u(x)^2 + v(x)^2\right)^{1/2}$

5. Probar que la función $\rho : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x,y) = |y-v|^{1/2}$$

   Es una distancia en $\mathbb{R}$.

6. Sean Y un espacio normado, X un espacio vectorial y $f : X \to Y$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que definiendo

$$\|x\| = \|f(x)\|\,,\ \forall x \in X$$

se obtiene una norma en X. Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

7. Consideremos en $V = L^2([a,b] \times [a,b])$ la aplicación

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |f(t,s)|^2 dt ds}$$

Mostrar que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

8. Sea $C^1([0,1]) = \{f \in C([0,1]) : \exists f' \in C([0,1])\}$. Mostrar que la siguiente función sobre $C^1([0,1])$ es una norma

$$\|f\| = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}$$

9. Sea $(v, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Demostrar que para $x, y \in V$ se tiene

   a) La ley del Paralelogramo $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

   b) Teorema de Pitagoras $\langle x, y \rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

   c) La identidad polar

   Caso Real: $\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$

   Caso Complejo: $\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}$

   d) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = ay$ o $y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$

10. Sea $V = C([a,b])$

    a) Prube que V es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty$

    b) Pero no lo es para la norma $\|f\|_1$

11. Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ determine si $\langle x, y \rangle$ es o no es un producto interno, en caso de no serlo indicar cuales propiedades no se cumplen

    a) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i |y_i|$

    b) $\langle x, y \rangle = |\sum_{i=1}^n x_i y_i|$

    c) $\langle x, y \rangle = (\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2)^{1/2}$

12. Sea $V = C([0,1])$ determine si $\langle f, g\rangle$ es o no es un producto interno, en caso de no serlo indicar cuales propiedades no se cumplen

    a) $\langle f, g\rangle = f(1)g(1)$
    b) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$
    c) $\langle f, g\rangle = \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right)$

13. En el espacio vectorial $V = C([1, e])$, se define un producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^e ln(t)f(t)g(t)dt$$

    a) Si $f(t) = \sqrt{t}$, calcular $\|f\|$.
    b) Encontrar un polinomio de primer grado $g(t) = a + bt$ que sea ortogonal a la función constante $f(t) = 1$

14. En el espacio $C(-1, 1)$, sea $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Considere las tres funciones

$$u_1(t) = 1, u_2(t) = t, u_3(t) = 1 + t$$

    Pruebe que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo de $\pi/3$ y dos forman entre sí un ángulo de $\pi/6$

15. En el espacio vectoria $\mathcal{P}_n$ de todos los polinomios de reales de grado $\leq n$, se define

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g(\frac{k}{n})$$

    a) Demostrar que $\langle f, g\rangle$ es un producto interno para $\mathcal{P}_n$.
    b) Calcular $\langle f, g\rangle$ cuando $f(t) = t$ y $g(t) = at + b$.
    c) Si $f(t) = t$ encontrar todos los polinomios g ortogonales a f.

16. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

    a) Pruebe que $H^\perp$ es un sibespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$
    b) Para $V = \mathbb{R}^3$ y $H = \{(x, y, z) : 4x - y + 6z = 0\}$
        1) Enceuntre $H^\perp$
        2) Muestre que $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$
        3) Exprese el vector $v = (2, 1, 3)$ como $h + u$, donde $h \in H, u \in H^\perp$

17. Sea $V = C([-1,1])$ y $H = \{f \in V : f(-t) = f(t), \forall t \in [-1,1]\}$, el conjunto de las funciones pares.

    a) Pruebe que el complemento ortogonl $H^\perp$ es el conjunto de todas las funciones impares.

    b) Pruebe que $V = H \oplus H^\perp$

18. Sean H y K subespacios de $\mathbb{R}^n$.

    a) Pruebe que si $H \subset K$, entonces $K^\perp \subset H^\perp$.

    b) Pruebe que $(H+K)^\perp = K^\perp \cap H^\perp$

    c) Pruebe que $H^{\perp\perp} = H$ donde $H^{\perp\perp} = (H^\perp)^\perp$

19. Sea $V = M_{n\times n}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$

    a) Definamos $\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$, donde $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, es la traza de la matriz $A = (a_{ij})$ y B^T es la transpuesta de B. Pruebe que V es un espacio con producto interno.

    Sean $A, B \in V$. Veamos si $\langle A, B\rangle$ es en efecto un producto interno.
    Primero veamos que $\langle A, A\rangle = 0 \iff A = 0$. Empezemos por probar $\langle A, A\rangle = 0 \implies A = 0$.

$$
\begin{aligned}
\langle A, A\rangle = 0 &\implies tr(AA^T) = 0\\
&\implies \sum_{i=1}^n aa_{ii} = 0\\
&\implies \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0\\
&\implies a_{ij}^2 = 0\\
&\implies a_{i,j} = 0\\
&\implies A = 0
\end{aligned}
$$

    Veamos ahora que $A = 0 \implies \langle A, A\rangle = 0$.

$$
\begin{aligned}
A = 0 &\implies AA^T = 0\\
&\implies tr(AA^T) = 0\\
&\implies \langle A, A\rangle = 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \langle A, A\rangle = 0 \iff A = 0$$

Ahora, probemos que $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= Tr(AB^T)\\ &= Tr((AB^T)^T)\\ &= Tr(BA^T)\\ &= \langle B, A\rangle\end{aligned}$$

$$\therefore \langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$$

b) Pruebe que $tr(AB) = tr(BA)$.

Sea $A, B \in V$, por al definición de traza tenemos que

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} ab_{ii}$$

Sin embargo por la defnición de producto matricial es claro que esto es equivalente a

$$\begin{aligned}tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} ba_{jj}\\ &= tr(BA)\end{aligned}$$

c) Si P es una matriz invertible de orden $n \times n$, pruebe que $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.

$$\begin{aligned}tr(P^{-1}AP) &= tr(P^{-1}(AP))\\ &= tr((AP)P^{-1})\\ &= tr(A(PP^{-1}))\\ &= tr(AI)\\ &= tr(A)\end{aligned}$$

20. Sea $x_1, x_2, ...x_n,\ y_1, y_2, ..., y_n$ números reales, $1 < p < \infty$ y q definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pribar las siguientes desigualdades:

   a) Desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

   Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in (0,1)$. Ahroa sea la función

$$\phi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$$

   luego

$$\phi(t)' = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

   Ahora bien, como $\lambda - 1 < 0$ entonces para $t < 1$ $\phi(t)' < 0$ y para $t > 1$ $\phi(t)' > 0$; luego tenemos un mínimo en $t = 1$ con un valor de $\phi(1) = 0$. Luego $\phi(t) \geq 0$ y reemplazando $t = \alpha/\beta$

$$(1-\lambda) + \lambda(\alpha/\beta) - (\alpha/\beta)^{\lambda} \geq 0$$

$$(1-\lambda) + \lambda(\alpha/\beta) \geq \alpha^{\lambda}\beta^{-\lambda}$$

$$(1-\lambda)\beta + \lambda\alpha \geq \alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}$$

   Sean $c, d \in \mathbb{R}^+$ y $0 < p, q < \infty$ definidos como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sea ahora $\alpha = c^p$, $\beta = d^q$, $\lambda = 1/p$ y $1 - \lambda = 1/q$ luego por la demostración que vimos anteriormente obtenemos

$$cd \leq \frac{c}{p} + \frac{d}{q}$$

   Ahora, sea $c = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}}$ y $d = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}}$, luego

$$\frac{|x_i||y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{|x_i|^p}{p(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}$$

   Ahora evaluando la sumatoria a ambos lados

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

b) Desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

21. Sea $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $\alpha \in (0,1)$, tal que

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha \|v_k - v_{k-1}\|\,,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente en $\mathbb{R}^n$

Sea $\epsilon > 0$ y $c = \|v_2 - v_1\|$. Como

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha \|v_k - v_{k-1}\|$$

entonces si aplicamos esto de forma recursiva obtenemos.

$$\begin{gathered}
\|v_3 - v_2\| \leq \alpha \|v_2 - v_1\| = \alpha c \\
\|v_4 - v_3\| \leq \alpha \|v_3 - v_2\| \leq \alpha^2 \|v_2 - v_1\| = \alpha^2 c \\
\vdots \\
\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha^{k-1} c
\end{gathered}$$

Ahora como $\alpha \in (0,1), \epsilon > 0$ y $c > 0$ siempre es posible encontrar N tal que

$$\frac{\alpha^N c}{1-\alpha} < \epsilon$$

Ahora bien, sean n, m con $m < n$ y $n, m > N$

$$
\begin{aligned}
\|v_n - v_m\| &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \|v_i - v_{i-1}\| \\
&\leq \alpha^{m-1} c \sum_{i=0}^{n-m-1} \alpha^i \\
&< \alpha^{m-1} c \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\
&= \frac{\alpha^{m-1} c}{1-\alpha} \\
&\leq \frac{\alpha^N c}{1-\alpha} \\
&< \epsilon
\end{aligned}
$$

Luego concluimos que dado $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N \implies \|v_n - v_m\| < \epsilon$ luego la sucesión es de Cauchy y por tal converge en $\mathbb{R}^n$

22. Pruebe que todo espacio finito-dimensional normado es de Banach

Sea $(V, \|.\|)$ un epacio vectorial finito-dimesnional normado de dimensión n sobre el campo $\mathbb{K}$. Al ser V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ este será a su vez isomorfo a $\mathbb{K}^n$ y por tal existe una isometría $f : V \to \mathbb{K}^n$ continua que nos conserva $d_V(x, y) = d_{\mathbb{K}^n}(f(x), f(y))$ y que acepta inversa $f^{-1} : \mathbb{K}^n \to V$ tambien continua.

Ahora para cada suceción de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como f es isometría, $\{f(x_n)\}_n \in \mathbb{N}$ será a su vez una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}^n$ y por la definisión de los espacio $\mathbb{K}^n$, este es completo y por tal $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to v \in K^n$. Ahora bien, como f^{-1} es continua esta debe cumplir que si $x_n \to x \implies f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x)$ y por tal al aplicar esta a la sucesión anterior obtenemos que, dado $f(v_n) \to v$ entonces $\{f^{-1}(f(x_n))\}_{n\in\mathbb{N}} \to f^{-1}(\mathrm{v})$ o lo que es lo mismo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f^{-1}(v) \in V$ por definición de f^{-1} y por tal concluimos que $(V, \|.\|)$ es un espacio normado y completo, o lo que es igual, es de Banach.

23. Pruebe que $l_p(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ para $p \geq 1$, es un espacio de Banach con la norma definida por:

$$
\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}
$$

donde $x + y = (x_n) + (y_n)$ y $\alpha x = (\alpha x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en l_p, definimos $x_n := \{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$, luego dado $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > N$

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{mk}|^p\right)^{1/p} < \epsilon \tag{1}$$

Ahora bien, es claro que además $\forall k$

$$(|a_{nk} - a_{mk}|^p)^{1/p} < \epsilon$$

$$|a_{nk} - a_{mk}| < \epsilon$$

Luego $\forall k$ $\{a_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Ahora bien, al ser $\mathbb{R}$ un espacio completo, entonces toda sucesión de Cauchy en ella converge y por tal

$$\forall k \; \exists a_k : \lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$$

Por lo que la sucesión $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es candidata a ser el límite de neustra sucesión de Cauchy.

Ahora, saquemos límite con respecto a n en 1

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{mk}|^p\right)^{1/p} < \epsilon \tag{2}$$

Veamos ahora si $a \in l_p$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |-a_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_i - a_{mk} + a_{mk}|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{mk}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{mk}|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{mk}|^p\right)^{1/p} + \|x_m\|
\end{aligned}$$

Y finalmente por 2 y ya que $x_m \in l_p$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p} \leq \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p \leq \infty$$

y por tal $a \in l_p$ con lo que queda demostrado que l_p es de Banach

24. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V. Pruebe que $V = M \oplus M^{\perp}$, es decir, hay que demostrar:

    a) $V = M + M^{\perp}$

    b) Todo $v \in V$ se puede expresar como $v = m + p$ de manera única, donde $m \in M$ y $p \in M^{\perp}$

25. Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert. entonces

    a) M es completo si y sólo si M es cerrado en V.

    Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert V completo, luego toda sucesión de cauchy en M es convergente a un punto en M, lo que implica que todos los puntos de acumulación de M pertenecen a su vez a M. Ahora bien, la cerradura $\overline{X}$ de un conjunto X está definida como el conjunto cerrado más pequeño que contiene a X. mas formalmente, se define como:

    $$\overline{X} = X \cup X'$$

    Donde X' es el conjuntos de todos los puntos de acumulación de X. Como M ya contiene todos sus puntos de acumulación, entonces $\overline{M} = M \cup M' = M$, y por la defnición de cerradura sabemos que esta es un conjunto cerrado, luego

    $$\therefore M \text{ completo } \implies M \text{ cerrado en } V$$

    Sea ahora M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V, como $M \subset V$ y V es completo por ser espacio de Hilbert, entonces M es tambien completo y port al conlcuimos qur M es completo si y sólo si M es cerrado en V.

    b) $M^{\perp} = \{0\}$ si y sólo si M es denso en V.

    Antes de empezar este ejercicio es importa que recordemos la definición de un subconjunto denso: Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dice que un conjunto $A \subset X$ es denso en X si y sólo sí $\overline{A} = X$. Donde $\overline{A}$ representa la cerradura de A.

Ahora teniendo en cuenta que todo espacio métrico es a su vez un espacio topológico vamos a realizar la prueba solicitada.
Sea M un subespacio de V tal que $M^{\perp} = \{0\}$ luego por el ejercicio demostración 25.d $M^{\perp\perp}$ es la cerradura de M, sin embargo, es claro que al ser $M^{\perp} = \{0\}$ entonces

$$\overline{M} = M^{\perp\perp} = V$$

Y por la definición de un conjunto denso

$$\therefore M^{\perp} \implies M \text{ es denso en } V$$

Sea ahora un subespacio M denso en V, sabemos por definición de conjunto denso que entonces $\overline{M} = V$ y como pudimos ver en la demostración 14.a $H = M^{\perp}$ siempre será cerrado en V por lo que por la proposición 25.e $H^{\perp\perp} = H$. Sabemos por la proposición 25.d que $H^{\perp} = M^{\perp\perp} = \overline{M}$. Luego es facil ver que $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$. Finalmente como $\overline{M} = V$ entonces $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp} = \{0\}$ pues 0 es el único vector que es ortogonal a todo el espacio y finalmente conlcuimos

$$\therefore M^{\perp} \iff M \text{ es denso en } V$$

c) Si M es cerrado y $M^{\perp} = \{0\}$, entonces $M = V$.

Dado que M es cerrado, entonces por la proposición 25.e $M^{\perp\perp} = M$, y como $M^{\perp} = \{0\}$ por hipótesis, obtenemos que $M = M^{\perp\perp} = V$

d) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es la clausura de M.

e) Si M es cerrado, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

26. Supongamos que $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ un conjunto ortonormal de un espacio de Hilbert V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para V.

b) $\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j\rangle \overline{\langle v, v_j\rangle}$ para cada $v \in V$.

c) La igualdad de Parseval se tiene: $\|u\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2$, donde $\alpha_j = \langle u, v_j\rangle$, para todo $u \in V$

d) El subespacio generado por $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en V.

e) Para cada $u \in V$ si $\langle u, v_j\rangle = 0, \ \forall j$ entonces $u = 0$

Vamos a empezar demostrando que $a \implies b$

sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para V, sabemos entonces que para todo $u \in V$ podemos escrivir u como

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \langle u, v_i \rangle v_i$$

Ahora sean $u, v \in V$ es claro que $\langle u, v \rangle$ podemos escribirla como

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \langle \sum_{i=0}^{\infty} \langle u, v_i \rangle v_i, \sum_{i=0}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \langle v_j, \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \overline{\langle v, v_i \rangle} \langle v_j, v_i \rangle
\end{aligned}$$

Sin embargo como $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $j \neq i$ y $\langle v_i, v_j \rangle = 1$ para $j = i$. Luego

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \overline{\langle v, v_j \rangle} \langle v_j, v_j \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \overline{\langle v, v_j \rangle}
\end{aligned}$$

Con lo que queda demotrado que $a \implies b$

Probemos ahora que $b \implies c$.
Como sabemos, por hipotesis

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \overline{\langle v, v_j \rangle}$$

para cada $v \in V$. Veamos ahora a cuanto es igual $\|u\|^2$

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \langle u, u\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j\rangle \overline{\langle u, v_j\rangle} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} |\langle u, v_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 \text{ con } \alpha_j = \langle u, v_j\rangle
\end{aligned}$$

Luego queda probado que $b \implies c$