Parcial 1. Análisis Numérico 2. ①

David Andrés Romero Millán

cód. 20182900101

1. Sea $V=\mathbb{R}^3$ y $W=\text{gen}\{(2,-3,4)\}$

i) Encuentre $W^\perp$

Sea $w=(a,b,c)\in W^\perp$

Luego

$$\langle w,u\rangle=0 \quad \text{para} \quad u=(2,-3,4)$$

$$\langle w,u\rangle = 2a-3b+4c=0$$

$$\therefore 2a-3b+4c=0$$

$$\begin{aligned} 2a-3b+4c&=0 \\ 2a&=3b-4c \\ a&=\frac{3}{2}b-2c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{3}{2}b-2c \\ b=b \\ c=c \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} w &= (\tfrac{3}{2}b-2c,b,c) \\ &= (\tfrac{3}{2},1,0)b+(-2,0,1)c \end{aligned}$$

Así,

$$\therefore W^\perp=\text{gen}\{(\tfrac{3}{2},1,0),(-2,0,1)\}. \blacksquare$$

ii) Pruebe que $\mathbb{R}^3=W\oplus W^\perp$

Demonstración

Condición #1 $\mathbb{R}^3=W+W^\perp$

Sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Veamos que $(x,y,z)=h+v$ donde $h\in W$ y $v\in W^\perp$

combinación lineal

②

$(x, y, z) = \alpha(2, -3, 4) + \beta(3/2, 1, 0) + \gamma(-2, 0, 1)$

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3/2\beta - 2\gamma &= x \\ -3\alpha + \beta + 0 &= y \\ 4\alpha + 0 + \gamma &= z \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

calculemos el determinante de A

$\det(A) = \frac{29}{2} = 14.5 \neq 0$

Lo que implica que el sistema tiene solución única

$\therefore \mathbb{R}^3 = W + W^\perp$

condición 2. $W \cap W^\perp = \{0\}$

Claramente $\emptyset \in W$ y $\emptyset \in W^\perp$ por ser subespacios de $\mathbb{R}^3$

$\therefore \emptyset \in W \cap W^\perp$

verifiquemos la unicidad.

veamos que si $x \in W \cap W^\perp \Rightarrow x = 0$

como $x \in W \cap W^\perp \Rightarrow x \in W \wedge x \in W^\perp$

como $x \in W^\perp \Rightarrow \langle x, h \rangle = 0 \ \forall h \in W$

y como $x \in W$ se tiene que

$\therefore \langle x, x \rangle = 0$

como $\langle \cdot \rangle$ es producto interno $\Rightarrow x = 0$

$\therefore x = 0$

$\therefore x \in W \cap W^\perp \Rightarrow x = 0$

$\therefore W \cap W^\perp = \{0\}$

Luego por la condición ① y ②

$\therefore \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$ ■

iii) Exprese el vector $v = (2, 1, 3)$ como $h + u$, $h \in W \wedge u \in W^\perp$

utilizamos el sistema desarrollado en el punto ⓘⓘ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3/2 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolvemos él sistema (MATLAB**) y obtenemos

R/ $\alpha = \frac{13}{29}$, $\beta = \frac{68}{29}$, y $\gamma = \frac{35}{29}$

Así,

$$\therefore (2,1,3) = \frac{13}{29}(2,-3,4) + \frac{68}{29}(3/2,1,0) + \frac{35}{29}(-2,0,1)$$

iv) Proyección ortogonal de $v = (2,1,3)$ sobre $W^{\perp}$. y tambien la distancia de v al subespacio $W^{\perp}$.

Sabemos que

$$W^{\perp} = \text{gen}\{(3/2,1,0), (-2,0,1)\}$$

Normalicemos

$$x = (3/2,1,0) \qquad \|x\|_2 = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|_2} = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, 0\right) = x^*$$

$$y = (-2,0,1) \qquad \|y\|_2 = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{y}{\|y\|_2} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = y^*$$

$$P_{W^{\perp}} v = \langle v, x^* \rangle x^* + \langle v, y^* \rangle y^*$$

$$= \frac{1369}{617}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, 0\right) - \frac{1292}{2889}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\therefore P_{W^{\perp}} v = \frac{1369}{617}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, 0\right) - \frac{1292}{2889}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

Ahora la distancia,

$$v - P_{W^{\perp}} v = (2,1,3) - P_{W^{\perp}} v$$

$$= (-0.2462, -0.2308, 3.2)$$ *calculado en MatLAB

y ahora, $d = \|v - P_{W^{\perp}} v\|_2 = 3.2177$

$\therefore$ Distancia de v al subespacio $W^{\perp}$ es de $d = 3.2177$ ∎

2.

a. Sea $V = C[0,1]$

V no es Banach con la norma $\|u\|_{L_1} = \int_0^1 |u(t)|\,dt$ considerando la sucesión de funciones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq t < 1/4 \\ (t-1/4)^{1/n} & , \ 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Demonstración

Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como arriba. Veamos que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de cauchy.

$$\|u_n - u_m\|_{L_1} = \int_0^1 |u_n(t) - u_m(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{1/4} |\cancel{u_n(t)}^{\,0} - \cancel{u_m(t)}^{\,0}|\,dt + \int_{1/4}^1 |u_n(t) - u_m(t)|\,dt$$

$$= \int_{1/4}^1 |u_n(t) - u_m(t)|\,dt$$

$$= \int_{1/4}^1 |(t-1/4)^{1/n} - (t-1/4)^{1/m}|\,dt$$

Para $n, m \to \infty$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_{L_1} = \lim_{n,m\to\infty} \int_{1/4}^1 |(t-1/4)^{1/n} - (t-1/4)^{1/m}|\,dt$$

$$= \int_{1/4}^1 \lim_{n,m\to\infty} |(t-1/4)^{1/n} - (t-1/4)^{1/m}|\,dt$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

$\therefore \{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en V

Ahora, sea $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq t < 1/4 \\ 1 & , \ 1/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Veamos que $u(t) \notin C[0,1]$

Verifiquemos la continuidad en $c = 1/4$

$$\lim_{t \to 1/4^-} u(t) = 0 \neq 1 = \lim_{t \to 1/4^+} u(t)$$

$\therefore u(t)$ no es continuo en $c = 1/4$

$\therefore u(t) \notin V = C[0,1]$

De esta forma,

$\therefore u_n \to u \notin V$

Luego

$\therefore V = C[0,1]$ no es completo con $\|\cdot\|_{L1}$

$\therefore V$ no es espacio de Banach con $\|\cdot\|_{L1}$

b. $V = M_{n \times n}$ $\quad \langle A, B\rangle = tr(AB^T)$

¿$\langle A, B\rangle$ producto interno?

① $\langle A+B, C\rangle = tr((A+B)C^T) = tr(AC^T + BC^T)$

$= tr(AC^T) + tr(BC^T) = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$

$\therefore \langle A+B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$

② $\langle \alpha A, B\rangle = tr(\alpha AB^T) = \alpha tr(AB^T) = \alpha\langle A, B\rangle$

$\therefore \langle \alpha A, B\rangle = \alpha\langle A, B\rangle$

③ $\langle A, B\rangle = tr(AB^T) = tr((AB^T)^T) = tr(BA^T) = \langle B, A\rangle$

$\therefore \langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$

④ $\langle A, A\rangle = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0 \Rightarrow \langle A, A\rangle \geq 0$

$\therefore \langle A, A\rangle \geq 0$

$\langle A, A\rangle \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow A = 0$

"$\Rightarrow$" $\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \; \forall i,j = 1, \dots, n \Rightarrow A = 0$

"$\Leftarrow$" $A = 0 \Rightarrow \langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 0^2 = 0 \Rightarrow \langle A, A\rangle = 0$

$\therefore \langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Por ①, ②, ③ y ④

$\therefore$ $\langle A, B\rangle$ es un producto interno en M_{nn} ■

3.

a. Identidad polar caso complejo

Demonstración

construyamosla por pedazos para x y y

- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$ ①

- $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$ ②

- $\|x+iy\|^2 = \langle x+iy, x+iy\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle$

$= \|x\|^2 + \langle iy,iy\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle$

$= \|x\|^2 + i\langle y,iy\rangle + \bar{i}\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,iy\rangle}$

$= \|x\|^2 + i\overline{\langle y,iy\rangle} - i\langle x,y\rangle + \bar{\bar{i}}\,\overline{\langle x,y\rangle}$

$= \|x\|^2 + i\bar{i}\,\overline{\langle y,y\rangle} - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle$

$= \|x\|^2 - i^2\langle y,y\rangle - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle$ ③

- $\|x-iy\|^2 = \langle x-iy, x-iy\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,iy\rangle - \langle iy,x\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \bar{i}\langle x,y\rangle - \langle iy,x\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x,y\rangle - \overline{\langle x,iy\rangle}$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x,y\rangle - \bar{\bar{i}}\,\overline{\langle x,y\rangle}$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x,y\rangle - i\langle y,x\rangle$ ④

① − ②

$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle$ ⑤

③ − ④

$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = -2i\langle x,y\rangle + 2i\langle y,x\rangle$

$\Rightarrow i[\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2] = i[-2i\langle x,y\rangle + 2i\langle y,x\rangle]$

$= 2\langle x,y\rangle - 2\langle y,x\rangle$ ⑥

(7)

(5) + (6)

$$2\langle x, y\rangle + \cancel{2\langle y, x\rangle} + 2\langle x, y\rangle - \cancel{2\langle y, x\rangle} = 4\langle x, y\rangle \quad (7)$$

Por (5), (6), y (7)

$$\therefore \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right]$$

Así,

$$\therefore \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right] \blacksquare$$

b. Muestre

$\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \iff u = av$ ó $v = au$, $a \geq 0$

Demonstración

"$\Rightarrow$" supongamos que $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \quad \text{por hipótesis} \\ &= \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2\end{aligned}$$

Luego

$$\cancel{\|u\|^2} + 2\langle u, v\rangle + \cancel{\|v\|^2} = \cancel{\|u\|^2} + 2\|u\|\,\|v\| + \cancel{\|v\|^2}$$

$$2\langle u, v\rangle = 2\|u\|\,\|v\|$$

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\| \quad (1)$$

Pero sabemos que $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Ahora, por (1) obtenemos

$$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

Luego como el ángulo entre u y v es 0, estos tienen la misma dirección. De lo cual concluimos que existe $a \geq 0$ t.q

$$\therefore u = av \text{ ó } v = au$$

"⇐" Supongamos que $u = av$ ó $v = au$, $a \geq 0$ (8)

Por la hipótesis los dos vectores tienen la misma dirección y por tanto el ángulo entre ellos es $\theta = 0$

Luego

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta = \|u\|\|v\| \quad (2)$$

Ahora

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$
$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$
$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad \text{por } (2)$$
$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$
$$\therefore \|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$
$$\therefore \|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

Así,

$$\therefore \|u+v\| = \|u\| + \|v\| \iff u = av \text{ ó } v = au,\ a \geq 0 \ \blacksquare$$