ANÁLISIS NUMÉRICO 2: EXAMEN 4
PROFESOR: Cristhian Montoya

El examen 4 deben ser entregada el **domingo 04 de junio, 23:59**, y su estilo de presentación debe ser un formato .pdf con los argumentos en detalle a cada ejercicio. La presentación de material tipo fotografía o documento tipo escáner será penalizada en la calificación del respectivo informe entregado. Tampoco hay lugar a consultas puesto que es un examen.

1) **2.0 puntos.**

Los elementos finitos de tipo $\mathbb{P}_2$ (Lagrange) usan el espacio discreto $V_h := \{v \in C([0,1]) : v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_2,\ 0 \le j \le n\}$ y su subespacio $V_{0h} := \{v \in V_h : v(0) = v(1) = 0\}$. A partir de lo anterior, se definen las funciones de referencia $\phi(x), \psi(x)$ como sigue:

$$\phi(x) := \begin{cases} (1+x)(1+2x) & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ (1-x)(1-2x) & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) := \begin{cases} 1-4x^2 & \text{si} \quad |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1/2. \end{cases}$$

a) **1.0 puntos.** Sea $\Omega = (a,b) = (0,1)$.Considere el problema de Poisson siguiente: Dada $f \in L^2(\Omega)$, determinar la función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (en el sentido débil):

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Para una malla uniforme sobre $[0,1]$, las funciones base son:
$\phi_j(x) := \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$ para $j = 0, \cdots, n+1, y,,$ $\psi_{j+1/2}(x) = \psi\left(\frac{x-x_{j+1/2}}{h}\right)$ para $j = 0, \cdots, n$.
Además, es sabido que la solución aproximada u_h es de la forma

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_h(x_j)\phi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} u_h(x_{j+1/2})\psi_{j+1/2}(x).$$

• Considere una solución exacta no nula de la ecuación (1), la cual denotaremos por $u_{ex}(x)$ (cada uno de ustedes la propone).
• Encuentre la formulación variacional del problema (1) y describa tal formulación como un sistema matricial determinando de forma explícita las matrices respectivas.
• Implemente el sistema matricial obtenido en el inciso anterior y obtener la solución aproximada $u_h(x)$.
• Posteriormente, construya una tabla de error en función de la cantidad de nodos, es decir, puede considerar $n = 5, 10, 20, 50, 100$ y construir la tabla asociada a $\|u_{ex} - u_h\|$.
Nota: La norma del error puede ser $L^2(\Omega)$ o $L^\infty(\Omega)$.

b) **1.0 puntos.** Sean $\Omega = (0,1)$ y $t \in [0,T]$. Considere el problema de conductividad térmica: dada $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f(t,x)$ en un apropiado espacio de Sobolev, determinar la función $u(t,x)$ en un apropiado espacio de Sobolev (a saber, H^{-1} para el tiempo y H_0^1 para el espacio) que satisface (en el sentido débil):

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,0) = 0,\ u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ u(t=0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

• Considere una solución exacta no nula de la ecuación (2), la cual denotaremos por $u_{ex}(t,x)$ (cada uno de ustedes la propone).
• Encuentre la formulación variacional del problema (2) y describa tal formulación como un sistema matricial determinando de forma explícita las matrices respectivas.
• Use el inciso a) de este ejercicio para discretizar la parte espacial de (2) y simultáneamente use diferencias finitas para la parte temporal. Determinar el sistema matricial asociado a la formulación variacional y obtener la solución aproximada $u_h(t,x)$.
• Posteriormente, fijar la cantidad de nodos espaciales (por ejemplo $n = 37$) y construir una tabla de error en función del tiempo que permita ver el cambio $\|u_{ex} - u_h\|$ a lo largo de los pasos temporales.

2) **1.5 puntos.** Los elementos finitos de tipo $\mathbb{P}_3$ (Hermite) usan el espacio discreto siguiente:
$V_h := \{v \in C^1([a,b]) : v|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_3,\ 0 \le j \le n\}$ y su subespacio $V_{0h} := \{v \in V_h : v(a) = v(b) = 0,\ v'(a) = v'(b) = 0\}$.
A partir de lo anterior, se definen las funciones de referencia $\phi(x), \psi(x)$ como sigue:

$$\phi(x) := \begin{cases} (1+x)^2(1-2x) & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ (1-x)^2(1+2x) & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1, \end{cases} \qquad \psi(x) := \begin{cases} x(1+x)^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ x(1-x)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Sea $\Omega = (0,1)$. Considere el problema de placas siguiente: Dada $f \in L^2(\Omega)$, determinar la función $u \in H_0^2(\Omega)$ que satisface (en el sentido débil):

$$\begin{cases} u_{xxx}(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \\ u'(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Para una malla uniforme sobre $[0,1]$, las funciones base son:
$\phi_j(x) := \phi\big(\frac{x-x_j}{h}\big)$ para $j = 0, \cdots, n+1, y,,\ \psi_j(x) = \psi\big(\frac{x-x_j}{h}\big)$ para $j = 0, \cdots, n+1$.
Además, es sabido que la solución aproximada u_h es de la forma

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} u_h(x_j)\phi_j(x) + \sum_{j=0}^{n+1} (u_h)'(x_j)\psi_j(x), \quad (u_h)' \equiv du_h/dx. \tag{4}$$

• Considere una solución exacta no nula de la ecuación (3), la cual denotaremos por $u_{ex}(x)$ (cada uno de ustedes la propone).
• Encuentre la formulación variacional del problema (3) y describa tal formulación como un sistema matricial determinando de forma explicito las matrices respectivas.
• Implemente el sistema matricial obtenido en el inciso anterior y obtener la solución aproximada $u_h(x)$.
• Posteriormente, construya una tabla de error en función de la cantidad de nodos, es decir, puede considerar particiones del dominio con $n = 5, 10, 20, 50, 100$ y construir la tabla asociada a $\|u_{ex} - u_h\|$.
Nota: La norma del error puede ser $L^2(\Omega)$ o $L^\infty(\Omega)$.

3) **1.5 puntos.** Sea $\Omega = (0,1)$. Considere el problema siguiente: Dada $f \in L^2(\Omega)$, determinar la función $u \in H_0^2(\Omega)$ que satisface (en el sentido débil):

$$\begin{cases} u_{xxx}(x) - u_{xx} = f(x) & x \in \Omega, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \\ u'(0) = 0,\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

(a) Considere una solución exacta no nula de la ecuación (5), la cual denotaremos por $u_{ex}(x)$ (cada uno de ustedes la propone).

(b) Para una malla uniforme sobre $[0,1]$, implemente y resuelva el sistema matricial que surge de la formulación variacional al usando la base (4) sobre la ecuación (5). Escriba la solución aproximada $u_h(x)$.

(c) En función del número de nodos n (por ejemplo, $n = 5, 10, 20, 50, 100$), realice una tabla y compare los resultados en la norma $\|u_{ex} - u_h\|$. Comente los resultados obtenidos.
Nota: La norma del error puede ser $L^2(\Omega)$ o $L^\infty(\Omega)$.