Universidad EAFIT
Escuela de Finanzas, Economía y Gobierno
Curso de Econometría Avanzada
Taller de Modelos ARIMA

Prof. Manuel Correa
20 de febrero de 2023

---

1. Modelos ARIMA

1. El operador diferencia se define como $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. Demuestre que:

   a) $\Delta^3 y_t = y_t - 3y_{t-1} + 3y_{t-2} - y_{t-3}$

   b) En general, para todo n natural, se cumple:

   $$\Delta^n y_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_{t-k}$$

   Nota: Use inducción matemática

2. Demostrar que la covarianza de orden k para un modelo MA(1) esta dada por:

   $$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \left(1+\theta_1\right)^2 & si \quad k=0 \\ \theta_1 \sigma_\epsilon^2 & si \quad k=1 \\ 0 & si \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

   y el coeficiente de correlación de orden k en un modelo MA(1) es:

   $$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{\left(1+\theta_1^2\right)} & si \quad k=1 \\ 0 & si \quad k \geq 2 \end{cases} \tag{2}$$

3. Demostrar que la covarianza de orden k para un modelo MA(q) esta dada por:

   $$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \left(1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2\right) & si \quad k=0 \\ \sigma_\epsilon^2 \left(-\theta_k + \theta_1\theta_{1+k} + \theta_2\theta_{2+k} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q\right) & si \quad k=1,2,\ldots,q \\ 0 & si \quad k>q \end{cases} \tag{3}$$

   y que, el coeficiente de correlación de orden k en un modelo MA(q) es:

   $$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k+\theta_1\theta_{1+k}+\theta_2\theta_{2+k}+\ldots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\ldots+\theta_q^2} & si \quad k=1,2,\ldots,q \\ 0 & si \quad k>q \end{cases} \tag{4}$$

4. Simule un proceso ruido blanco discreto a partir de una distribución exponencial y trace el histograma y el correlograma. Por ejemplo, puede utilizar el comando de R, $\varepsilon < -rexp(1000) - 1$ para ruido blanco exponencial. Comente los gráficos.

5. Simule series temporales de longitud 200 a partir de un modelo AR(1) con ϕ igual a -0,9, -0,5, 0,5 y 0,9. Estime el parámetro de cada modelo y haga predicciones para los siguientes 10 periodos.

6. Genere $n = 500$ observaciones del modelo ARMA dado por

$$y_t = 0.9y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1} \tag{5}$$

con $\varepsilon_t \sim iidN(0,1)$. Represente gráficamente los datos simulados, calcule la ACF y la PACF de los datos simulados y ajuste un modelo ARMA(1,1) a los datos. ¿Qué ocurrió y cómo explica los resultados?

7. Genere 10 realizaciones de longitud $n = 200$ de una serie a partir de un modelo ARMA(1,1) con $\phi_1 = 0.9$, $\theta_1 = 0.2$ y $\sigma_\varepsilon^2 = 0.25$. Estime el modelo por máxima verosimilitud en cada caso y compare los estimadores con los valores reales. Para las 4 primeras realizaciones calcule la ACF y la PACF.

8. *a*) Demuestre que la serie $\{y_t\}$ dada por

$$y_t = \frac{3}{2}y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} + \varepsilon_t$$

No es estacionaria.

b) Escriba el modelo para $\{z_t\}$, donde $z_t = \Delta y_t$. Demuestre que $\{z_t\}$ es estacionario.

c) Simule una serie de 1000 valores para $\{y_t\}$, colocando los datos simulados en y, y utilice estos valores simulados para producir una serie de 999 valores para $\{z_t\}$, colocando esta serie en el vector z.

d) Ajuste un modelo AR a z. Proporcione las estimaciones de los parámetros del modelo ajustado y un intervalo de confianza del 95 % para el modelo subyacente. Compare los intervalos de confianza con los parámetros utilizados para simular los datos y explique los resultados.

e) Trace el correlograma de los residuos del modelo ajustado y comente

9. La serie $\{\varepsilon_t\}$ es ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2 . Para los siguientes modelos de medias móviles, halle la función de autocorrelación y determinar si los procesos son invertibles. Además, simule 300 observaciones para cada modelo en R, compare los gráficos temporales de las series simuladas y comente cómo podrían distinguirse las dos series.

a) $y_t = \varepsilon_t + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1}$

b) $y_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$

10. Escriba los siguientes modelos en notación ARMA(p,q) y determine si son estacionarios y/o invertibles (ε_t es ruido blanco). En cada caso realice una simulación del modelo en R y determine los gráficos ACF y PACF

a) $y_t = y_{t-1} - 1/4y_{t-2} + \varepsilon_t + 1/2\varepsilon_{t-1}$

b) $y_t = y_{t-1} - 1/4y_{t-2} + \varepsilon_t + 1/2\varepsilon_{t-1}$

c) $y_t = \frac{7}{10}y_{t-1} - \frac{1}{10}y_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{3}{2}\varepsilon_{t-1}$

En las siguientes preguntas, asuma que $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso discreto, puramente aleatorio, tal que $E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ y los valores sucesivos de ε_t son independientes de modo que $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$; para $k \neq 0$

11. Muestre que la ACF de un proceso MA de segundo orden:

$$y_t = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} \tag{6}$$

esta dado por:

$$
\rho_k = \begin{cases} 1 & si \quad k=0 \\ 0.37 & si \quad k=1 \\ -0.13 & si \quad k=2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7}
$$

12. Consideremos el proceso MA(q), con ponderaciones iguales $1/(m+1)$ en todos los retardos (por lo que es una media móvil real), dada por

$$
y_t = \sum_{k=0}^{q} \varepsilon_{t-k}/\left(q+1\right) \tag{8}
$$

Demuestre que el ACF de este proceso es

$$
\rho_k = \begin{cases} \frac{(q+1-k)}{(q+1)} & si \quad k=0,1,\ldots,q \\ 0 & si \quad k>p \end{cases} \tag{9}
$$

13. *a*) Demuestre que el proceso AR(2)

$$
y_t = y_{t-1} + cy_{t-2} + \varepsilon_t \tag{10}
$$

es estacionario siempre que $1 < c < 0$. Encuentre la función de autocorrelación cuando $c = \frac{3}{16}$.

b) Demuestre que el proceso AR(3)

$$
y_t = y_{t-1} + cy_{t-2} + cy_{t-3} + \varepsilon_t \tag{11}
$$

es no estacionario para todos los valores de c.

14. Descargue una serie de tiempo de la plataforma Bloomberg. Haga una descripción y un análisis de los datos, ajuste el mejor modelo ARIMA posible. Realice una predicción para el periodo que usted desee acorde a la frecuencia de los datos.

Referencias

[1] Chatfifield, C., and H. Xing. *The analysis of time series: an introduction with R*, Seventh Edition, 2019.

[2] Cowpertwait, Paul S.P., and Andrew V. Metcalfe. *Introductory time series with R*, Springer, 2009.