

# Introducción al método de los elementos finitos

Cristhian Montoya

Universidad EAFIT

*cdmontoyaz@eafit.edu.co*

Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería

Ingeniería Matemática

Mayo 2023

# ① Introducción al método de elementos finitos

Introducción

## ② Dos modelos como ejemplo

Barra elástica

transmisión del calor

## ③ Formulación débil

## ④ método de elementos finitos

## ⑤ Referencias

# Introducción

El método de los Elementos Finitos (MEF) es una técnica general para resolver ecuaciones diferenciales que aparecen en el modelado de problemas en ciencia e ingeniería, tales como mecánica de fluidos, propagación de ondas, problemas de conducción del calor, procesos de difusión-convección, procesos de reacción-difusión, problemas de estructuras, sólo por mencionar algunas áreas de interés de la matemática aplicada o ingeniería.

En esta introducción al método de elementos finitos, el objetivo es resolver algunos problemas elípticos que aparecen en la teoría de elasticidad y en la conducción de calor, como también presentar resultados de existencia y unicidad de las soluciones.

# Introducción

La esencia del método de los elementos finitos es dividir el dominio o cuerpo sobre el que se trabaja en subdominios más pequeños que llamaremos elementos, y formular el problema en cada uno de estos elementos en términos de ecuaciones más sencillas. La idea del método es discretizar y luego aproximar numéricamente la solución de la ecuación diferencial por medio de funciones de aproximación o de interpolación.

Para resolver un problema usando elementos finitos, se deben realizar los siguiente pasos:

- Hallar una formulación variacional del problema
- Construir los espacios de dimensión finita  $V_h$
- Resolver el problema discreto en  $V_h$
- Implementar el método en un programa de computación.

# Introducción

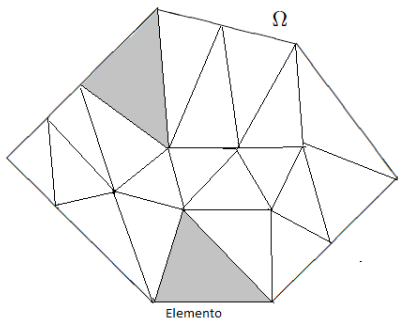


Figura: Dominio dividido en elementos triangulares

## Barra elástica

A manera de motivación, consideremos un elemento de barra elástica sujeta a tensiones longitudinales constantes en sus extremos. El propósito del estudio es encontrar la ecuación diferencial que modela el desplazamiento sufrido por la barra en los extremos, tras la aplicación de dichas fuerzas, como se muestra en la Figura.

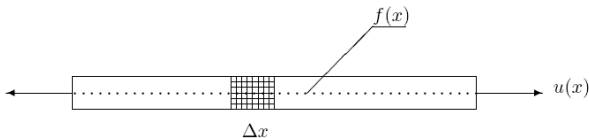


Figura: Barra elástica

## Barra elástica

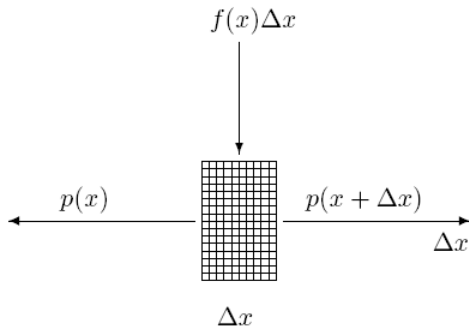


Figura: Diferencial de barra

## Barra elástica

El diferencial de barra debe satisfacer las siguientes condiciones:

- 1 Debe estar en equilibrio.
- 2 La relación entre la tensión  $\sigma$  y el esfuerzo  $\epsilon$  se da por la ley de Hooke  $\sigma(x) = E(x)\epsilon(x)$ , donde  $E(x)$  es el módulo de elasticidad.
- 3 El esfuerzo  $\epsilon$  se define por

$$\epsilon(x) := \frac{\text{elongación}}{\text{longitud original}} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx},$$

cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $u = u(x)$  es el desplazamiento o deformación.

- 4 La fuerza interna o axial se define por la ecuación  $p(x) := A(x)\sigma(x)$ , donde  $A(x)$  es el área de la sección de la barra.



## Barra elástica

Por equilibrio, la suma de fuerzas en dirección del eje  $x$ , está dada por

$$-p(x) + p(x + \Delta x) + f(x)\Delta x = 0,$$

o

$$\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} + f(x) = 0,$$

así,

$$\frac{dp}{dx} + f(x) = 0 \tag{1}$$

cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## Barra elástica

Como  $p(x) = A(x)\sigma(x)$  se tiene entonces que

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} [A(x)\sigma(x)]$$

pero  $\sigma(x) = E(x)\epsilon(x)$  y  $\epsilon(x) = \frac{du}{dx}$ , así,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ A(x)E(x) \frac{du}{dx} \right]$$

y al reemplazar en (1) se obtiene finalmente la ecuación de la elasticidad unidimensional

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x)E(x) \frac{du}{dx} \right] + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

## Barra elástica

Para encontrar una solución de la ecuación (2) es necesario dar condiciones en los extremos de la barra, se llaman condiciones de frontera o de contorno. Para este ejemplo se pueden elegir como  $u(0) = u(1) = 0$ . Estas condiciones sobre la función  $u$  se llaman *condiciones de Dirichlet o esenciales*.

También se pueden dar condiciones en la función  $u$  y en su derivada  $u'$ , este tipo de condiciones se denominan *condiciones de Neumann o naturales*. En este caso se pueden reescribir como  $u(0) = 0$  y  $u'(1) = c$ ,  $c$  una constante.

## transmisión del calor

A continuación se presenta otro ejemplo de aplicación a la transmisión del calor por una varilla aislada lateralmente de longitud unitaria, como se muestra en la Figura

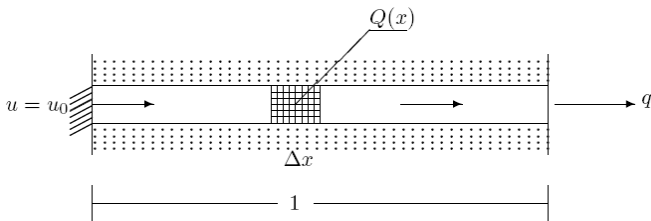


Figura: transmisión del calor por una varilla

## transmisión del calor

Consideremos la conducción del calor a través de una varilla homogénea con área de sección transversal  $A$  y con una fuente de calor interna dada por  $Q(x)$ . Suponga además que la temperatura en  $x = 0$  es  $u_0$  y el flujo de calor en  $x = 1$ ,  $\bar{q}$ .

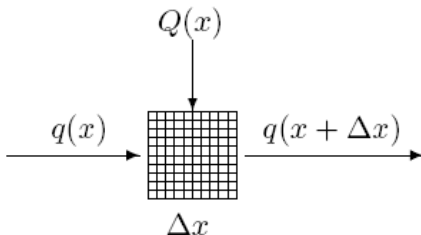


Figura: Diferencial de varilla para la conducción del calor

## transmisión del calor

Plantearemos la ecuación diferencial que modela la conducción del calor a través de la varilla. Para ello, consideremos el balance de flujos de calor para un elemento diferencial de la varilla, esto es,

$$q(x) - q(x + \Delta x) + Q(x)\Delta x = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{dq}{dx} = Q(x), \quad \text{cuando} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Por otro lado, la relación entre el flujo de calor  $q$  y la temperatura  $u$ , se rige por la ley de Fourier  $q = -k \frac{du}{dx}$ , donde  $k$  es la conductividad térmica.

## transmisión del calor

En consecuencia, la última ecuación queda

$$-\frac{d}{dx} \left[ k \frac{du}{dx} \right] = Q(x), \quad 0 < x < 1.$$

Con las condiciones de contorno dadas, se define el problema de valor de frontera unidimensional del calor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ k \frac{du}{dx} \right] + Q(x) &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, \quad q(1) &= \bar{q}. \end{aligned} \tag{3}$$

La última condición se puede expresar también como

$$k \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} + \bar{q} = 0.$$

## Formulación débil

Nótese que tanto el problema de elasticidad como el de la conducción de calor se pueden expresar en forma general como

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

El propósito de una formulación débil para un problema de frontera, es reducir suavidad o regularidad a la función  $u$ . Esto se consigue transformando el problema con derivadas en otro con integrales. Para tal fin se recurre a la fórmula de integración por partes.



## formulación débil

Para la formulación débil del problema de frontera (4), debemos introducir el siguiente espacio vectorial:  $V = \{v \in C[0, 1] :$

$v'$  es continua a tramos y acotada en  $[0, 1], v(0) = v(1) = 0\}$ ,

donde  $C[0, 1] = \{v/v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ es continua}\}$ .

Multiplicamos la ecuación (4) por una función arbitraria  $v \in V$  e integramos por partes en el intervalo  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u'' v dx &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u' v' dx \\ &= \int_0^1 u' v' dx. \end{aligned}$$

## formulación débil

Luego para toda función  $v \in V$ , la solución  $u$  del problema (4) verifica

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (5)$$

La expresión (5) se llama formulación débil del problema (4). Las dos formulaciones no necesariamente son equivalentes, puede suceder que el problema (4) no tenga solución y sin embargo el problema (5) si tenerla, todo depende de la regularidad de la función  $f$ .

# Espacios de Sobolev

## El espacio $\mathcal{H}^m(\Omega)$

Recuerde que el espacio de Sobolev

$$\mathcal{H}^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m\},$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} dx, \quad u, v \in \mathcal{H}^m(\Omega)$$

y la norma en es

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{H}^m(\Omega)}} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

## Espacios de Sobolev

La clausura de  $\mathcal{D}(\Omega)$  en  $\mathcal{H}^m(\Omega)$  se denota por  $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$ . Esto es,

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\mathcal{H}^m(\Omega)}$$

es un subespacio de  $\mathcal{H}^m(\Omega)$ . Más precisamente, toda  $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$  pertenece a  $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$  si y sólo si existe una sucesión  $\{u_n\}_n$  en  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\|u_n - u\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La restricción de una función  $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$  a la frontera de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega \equiv \Gamma$ , se llama la traza de  $u$ , este espacio es precisamente  $\mathcal{H}_0^m(\Omega)$ , es decir,

$$\mathcal{H}_0^m(\Omega) := \{u \in \mathcal{H}^m(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Para el caso  $\Omega = \mathbb{R}^n$   $\mathcal{H}_0^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$ .

# formulación débil a problemas elípticos

## formulación débil

Considere la EDP

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} u = f,$$

donde  $\alpha$  es un multiíndice y  $m$  un entero no negativo.

Si  $u, f \in L_1^{loc}(\Omega)$ , entonces la igualdad  $\langle u, L^*v \rangle = \langle f, v \rangle$  se puede escribir como

$$\int_{\Omega} u L^*v dV = \int_{\Omega} f v dV$$

es la formulación débil o variacional para  $Lu = f$ .

# formulación débil a problemas elípticos

## Problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u &= g \text{ sobre } \Gamma \equiv \partial\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

Se multiplica (6) por  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  e integrando sobre  $\Omega$  se obtiene

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dV = \int_{\Omega} v f dV.$$

La primera identidad de Green

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dV = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

nos conduce a la expresión

# formulación débil problema de Dirichlet

## Problema de Dirichlet

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Omega} v f dV,$$

pero  $\int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$  ( $v$  se anula en la frontera). Luego,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_{\Omega} v f dV, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En resumen, la formulación débil para el problema de Dirichlet se enuncia: Encontrar  $u \in V \equiv \mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_{\Omega} f v dV, \quad \forall v \in V \text{ y } f \in L_2(\Omega).$$

## formulación débil problema de Dirichlet

La formulación débil para el problema de Dirichlet se enuncia:  
Encontrar  $u \in V \equiv \mathcal{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}$  tal que

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v dV}_{\ell(v)} \quad \forall v \in V \text{ y } f \in L_2(\Omega)$$

En general, el problema de frontera se puede enunciar como:  
Encontrar  $u \in V \equiv \mathcal{H}_0^1(\Omega)$  tal que

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$$

donde  $\ell(v)$  es una forma lineal y continua, es decir

$$\begin{aligned} \ell : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \ell(v) = \int_{\Omega} f v dV, \text{ para } f \in L_2(\Omega). \end{aligned}$$



## formulación débil problema de Dirichlet

La linealidad de  $\ell$  es consecuencia de la linealidad de la integral.  
La continuidad es consecuencia de las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &\leq \int_{\Omega} |f||v|dV \leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L_2} \|v\|_{L_2} = c \|v\|_{L_2} \leq c \|v\|_{\mathcal{H}^1} \end{aligned}$$

es decir  $|\ell(v)| \leq c \|v\|_{\mathcal{H}^1}$  con  $c$  constante.

Observar que la última desigualdad se consigue al tener en cuenta que

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \int_{\Omega} [|u|^2 + |u'|^2] dx = \|u\|_{L_2}^2 + \|u'\|_{L_2}^2.$$

## formulación débil problema de Dirichlet

La función  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  espacio de Hilbert, se llama *forma bilineal*, es decir,  $\forall u, v, w \in V$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se tiene

$$a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v),$$

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w).$$

La forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica si

$$a(u, v) = a(v, u)$$

La forma bilineal es continua (ó acotada), si existe  $m > 0$  constante tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

La forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  es  $V$ -elíptica o coercitiva, si existe  $\alpha > 0$  constante tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

# formulación débil problema de Dirichlet

## Ejemplo

$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV$  cumple todo lo anterior.

En efecto, veamos que es una forma bilineal. Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in V$

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta w, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\alpha u + \beta w) \cdot \nabla v dV \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV + \beta \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dV \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v) \end{aligned}$$

De igual forma se prueba que

$$a(u, \alpha w + \beta v) = \alpha a(u, w) + \beta a(u, v).$$

Simetría:  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV = a(v, u).$

## formulación débil problema de Dirichlet

Acotamiento:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dV = \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dV \\ &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dV = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dV \\ &\leq \sum_{i=1}^3 \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dV \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dV \right)^{1/2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L_2} \leq M \|u\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \end{aligned}$$

luego,  $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1}$  y por tanto  $a(\cdot, \cdot)$  es acotada.

## formulación débil problema de Dirichlet

$V$ –elíptica:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{L_2}^2 dV = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dV \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dV \geq C_{\Omega} \|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 \end{aligned}$$

de donde  $a(u, u) \geq C_{\Omega} \|u\|_{\mathcal{H}^1}^2$ .

Observe que la última desigualdad se sigue de la desigualdad de Poincaré-Friedrich (ver J.N. Reddy, pág. 134).

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un dominio acotado, con frontera  $\Gamma$  suave a tramos, entonces  $\forall u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ , existe una constante  $C_{\Omega}$  tal que

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 \leq C_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dV + \int_{\Gamma} \|u\|^2 ds \right].$$

## formulación débil problema de Dirichlet

Si  $u \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ , entonces  $\int_{\Gamma} \|u\|^2 ds = 0$ , luego tenemos

$$\|u\|_{\mathcal{H}_0^1(\Omega)}^2 \leq C_{\Omega} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

### Teorema: Lax-Milgram

Sea  $V$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal acotada (continua),  $V$ -elíptica (coercitiva) y  $\ell \in V'$  (dual), entonces existe una solución única del problema en forma débil:

Encontrar  $u \in V$  tal que  $a(u, v) = \ell(v)$ ,  $\forall v \in V$ .

# método de elementos finitos

## Introducción

La idea del método de los elementos finitos es buscar una solución aproximada del problema de frontera (6) por medio de un número finito de funciones interpolantes, pero la dificultad de encontrar tal solución está en el hecho de que el espacio vectorial  $V$  es un espacio de funciones de dimensión infinita, con el resultado de que no es posible establecer un método práctico para obtener la solución. Esta dificultad se supera considerando un subespacio  $V_m$  de  $V$ , de dimensión finita, que nos permita representar cualquier función de este subespacio como una combinación lineal (número finito de sumandos) de elementos de una base.

# método de elementos finitos

## MEF

Como el espacio  $V \equiv \mathcal{H}^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un espacio de dimensión infinita, el MEF tiene como objetivo buscar soluciones del problema débil en un subespacio  $V_m$  de  $V$ , con  $\dim V_m < \infty$ . En virtud a que el espacio de Hilbert  $V \equiv \mathcal{H}^1(\Omega)$  es separable, (tiene una base ortonormal), existe una “base” formada por una sucesión  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots\}$  de funciones tal que

- a) Para todo  $m$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  son L.I. en  $V \equiv \mathcal{H}^1(\Omega)$
- b) Todas las combinaciones lineales finitas de la forma  $\sum_{j=1}^N b_j \varphi_j \quad \forall b_j \in \mathbb{R}$ , son densas en  $\mathcal{H}^1(\Omega)$



# Método de elementos finitos

## método de Galerkin

El método de buscar soluciones aproximadas al problema débil, construyendo el espacio  $V_m$ , se llama método de Galerkin; cuya descripción es la siguiente:

- i) Como  $V_m$  es de dimensión finita, entonces existe una base  $B = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  para  $V_m$  tal que todo  $v_m \in V_m$  se puede escribir como

$$v_m = \sum_{i=1}^m b_i \varphi_i = b_1 \varphi_1 + \dots + b_m \varphi_m, \text{ con } b_i \text{ constantes}$$

- ii) La sucesión de espacios  $V_m = \text{gen}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  es tal que  $V_m \subseteq V_{m+1} \subseteq V$ .

# método de elementos finitos

## método de Galerkin

Además,  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(v, V_m) = 0$  donde  $d$  es la distancia de  $v$  a  $V_m$  que está dada por  $d(v, V_m) = \inf_{w \in V_m} \|v - w\|_V$ .

- iii) La sucesión de espacios  $\{V_m\}$  permite construir la sucesión  $\{u_m\}$ , donde  $u_m$  es la única solución del problema variacional o débil aproximado:

Encontrar  $u_m \in V_m$  tal que

$$a(u_m, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V_m \quad (7)$$

donde  $u_m = \sum_{i=1}^m g_i \varphi_i$ ,  $g_i \in \mathbb{R}$ .  $a(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal y  $\ell$  es una forma lineal continua.

# método de elementos finitos

## método de Galerkin

La ecuación (7) es un sistema lineal de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas. Para determinar  $u_m$  basta calcular  $g_i \in \mathbb{R}$  tal que

$$a \left( \sum_{i=1}^m g_i \varphi_i, v \right) = \ell(v) \quad \forall v \in V_m$$

Como esto es válido para todo  $v$ , podemos elegir  $v = \varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  tales que

$$a \left( \sum_{i=1}^m g_i \varphi_i, \varphi_j \right) = \ell(\varphi_j) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

# método de elementos finitos

## método de Galerkin

$$\sum_{i=1}^m a(\varphi_i, \varphi_j) g_i = \ell(\varphi_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

el sistema homogéneo asociado a (8) tiene solución única, la trivial,

$$u_m = \sum_{i=1}^m g_i \varphi_i = g_1 \varphi_1 + \dots + g_m \varphi_m.$$

# método de elementos finitos

## método de Galerkin

Si  $a(\varphi_i, \varphi_j) = k_{ij}$  entonces (7) se transforma en  $\sum_{i=1}^m g_i k_{ij} = c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$   $c_j = \ell(\varphi_j)$  o matricial  $Ku = c$  donde

$$K = (k_{ij}), \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad u = (u_i) = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

la matriz  $K$  se llama matriz de rigidez,  $c = \ell(\varphi_j)$  es el vector de carga y  $u$  es el vector de desplazamientos nodales o simplemente vector de nodos.

# método de elementos finitos

## Caso unidimensional

Para construir el subespacio  $V_m$ , comencemos por formar una partición del intervalo  $[0,1]$  escogiendo puntos  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  con  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$  en subintervalos  $\Omega_j = (x_{j-1}, x_j)$  de longitud  $h_j = x_j - x_{j-1}$ , para  $j = 1, 2, \dots, n+1$  con  $h = \max h_j$ . Cada subintervalo es un elemento y sus puntos extremos son los nodos. La cantidad  $h$  es una medida de lo fina que es la partición.

Sea  $V_m$  el conjunto de funciones  $v_h$  lineales en cada subintervalo  $\Omega_j$ , continuas en  $[0,1]$  y tales que  $v(0) = v(1) = 0$ , como en la siguiente figura

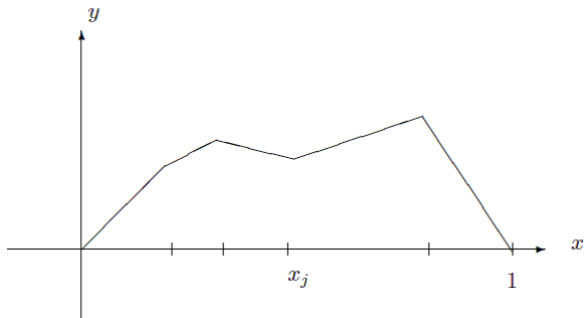


Figura: Ejemplo de una función  $v_h \in V_m$

Una base para este espacio  $V_m$  está dada por el conjunto de funciones  $\varphi_j \in V_m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , definidas por

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

es decir,  $\varphi_j$  es continua, lineal a tramos y toma el valor 1 en el nodo  $x_j$  y el valor 0 en los otros nodos, de manera más precisa

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{j-1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{h_{j-1}}, & x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_j}, & x_j < x < x_{j+1} \\ 0, & x_{j+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

como se muestra en la siguiente Figura



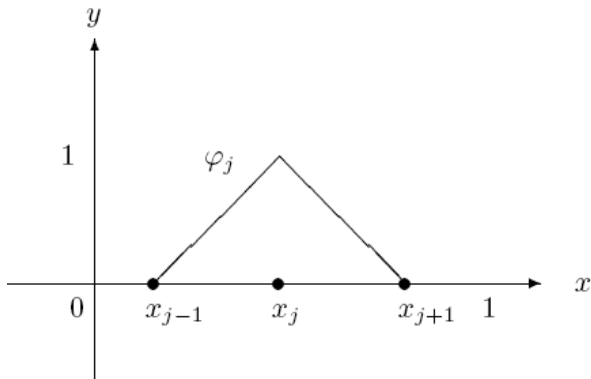


Figura: Ejemplo de una función de la base de  $V_m$

Una función  $v_h \in V_m$  se puede expresar de manera única como combinación lineal de las funciones de la base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$$v_h(x) = a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x),$$

donde  $a_i = v_h(x_i)$ .

Luego el método de elementos finitos para el problema de frontera (4) se puede formular como sigue:

Encontrar  $u_h \in V_m$  tal que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x) \quad (9)$$

para todo  $v_h \in V_m$ .

Como las funciones  $\varphi_j$  son lineales a tramos, las derivadas  $\varphi'_j$  son constantes en el subintervalo abierto  $(x_j, x_{j+1})$ , para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , pero no son continuas. Luego tenemos

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{j-1} \\ \frac{1}{h_{j-1}}, & x_{j-1} < x < x_j \\ -\frac{1}{h_j}, & x_j < x < x_{j+1} \\ 0, & x_{j+1} < x < 1, \end{cases}$$

para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Como  $\varphi_j$  y  $\varphi'_j$  son distintas de cero sólo en  $(x_{j-1}, x_{j+1})$ , entonces  $\varphi_j(x)\varphi_k(x) = 0$  y  $\varphi'_j(x)\varphi'_k(x) = 0$ , excepto para  $k = j - 1$ ,  $k = j$  o  $k = j + 1$ .

Por otro lado, la solución  $u_h$  también se puede expresar en términos de los elementos de la base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ,

$$u_h(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(x),$$

donde  $c_i = u_h(x_i)$ . Al sustituir  $u_h$  y  $v_h$  en (9) se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx \right] c_i = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad (10)$$

para cada  $j = 1, \dots, n$ . Esta ecuación da como resultado un sistema lineal de  $n \times n$ , en las variables  $c_1, \dots, c_n$  de la forma

$$Kc = b$$

donde la matriz  $K = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$  y  $b = (b_j)$  con  $b_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$ .

La matriz  $K$  de este sistema lineal es tridiagonal, es decir, únicamente los elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos diagonales adyacentes pueden ser diferentes de cero. Los elementos distintos de cero de la matriz  $K$  son:

Para  $j = i - 1$

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{1}{h_{i-1}} \right] \left[ -\frac{1}{h_{i-1}} \right] dx = -\frac{1}{h_{i-1}},$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Para  $j = i$  con  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 [\varphi'_i(x)]^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{1}{h_{i-1}} \right]^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ -\frac{1}{h_i} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}. \end{aligned}$$

Para  $j = i + 1$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ -\frac{1}{h_i} \right] \left[ \frac{1}{h_i} \right] dx = -\frac{1}{h_i},$$

para cada  $i = 1, \dots, n - 1$ .

En el caso especial de una malla uniforme  $h_j = h = \frac{1}{n+1}$ , el sistema toma la forma

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que la matriz  $K$  es simétrica,  $K^t = K$ , es la matriz de rigidez y los vectores  $b$  y  $c$  son los vectores de carga y nodos, respectivamente. Recuerde que  $c_i = u_h(x_i)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

## Ejemplo

Considere el problema de valor de frontera

$$-u'' = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad \text{en } \Omega = (0, 1)$$

$$u(0) = u'(1) = 0$$

La formulación variacional para este problema es:

Encontrar  $u \in V$  tal que

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 v \sin \frac{\pi x}{2} dx, \quad \text{para cada } v \in V,$$

donde  $V = \{v \in C[0, 1] :$

$v'$  es continua a tramos y acotada en  $[0, 1], v(0) = 0\}$ .



Sea  $V_m := \text{gen}\{\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2\}$  subespacio de  $V$ . Las entradas de la matriz  $K$  y el vector de carga son

$$a_{11} = \int_0^1 [\varphi_1'(x)]^2 dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx = \int_0^1 (1)(2x) dx = 1$$

$$a_{22} = \int_0^1 [\varphi_2'(x)]^2 dx = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$b_1 = \int_0^1 x \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.405$$

$$b_2 = \int_0^1 x^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{8(\pi - 2)}{\pi^3} \approx 0.295$$

Luego el sistema  $Kc = b$  está dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.405 \\ 0.295 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriz  $K$  es

$$K^{-1} = \frac{1}{1/3} \begin{pmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,  $c = K^{-1}b$ ,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.405 \\ 0.295 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.735 \\ -0.33 \end{pmatrix}.$$

Luego la solución aproximada es  $u_h(x) = 0.735x - 0.33x^2$ .

La solución exacta es  $u(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2}$ .

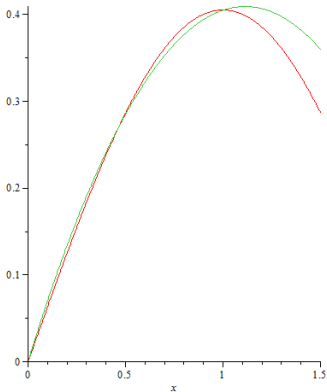


Figura: En rojo la solución exacta, en verde solución aproximada

El método de Galerkin está enmarcado dentro de un método más general como es el de los residuos ponderados, el cual consiste en transformar la ecuación diferencial que gobierna el problema en una expresión integral equivalente. Para ello considere el operador diferencial

$$L := \frac{d}{dx} \left( r(x) \frac{d(\cdot)}{dx} \right),$$

donde  $L : \mathcal{D}_L \subseteq V \rightarrow V$  con  $V$  un espacio de Hilbert.

La ecuación diferencial,  $\frac{d}{dx} \left( r(x) \frac{du}{dx} \right) = f$ , se puede escribir como

$$Lu = f, \quad \text{en } \Omega \tag{11}$$

Las condiciones de frontera se pueden escribir como  $B_{\mathcal{D}}u = g$  sobre  $\Gamma_u$  (condición de Dirichlet) y  $B_N u = h$  sobre  $\Gamma_N$  (condición de Neumann), con  $\partial = \Gamma_u \cup \Gamma_N$ . Si  $u \in \mathcal{D}_L$  es tal que

$$\langle Lu - f, \varphi_m \rangle = 0 \quad \forall m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

donde  $\{\varphi_m\}$  es una base en  $V$ , entonces  $Lu - f = 0$  en  $V$ , es decir  $u$  es solución de (11) en  $V$ , o equivalentemente, encontrar una solución  $u$  de (11) es lo mismo que encontrar la solución de (12). Esta equivalencia, es la base del método de los residuos ponderados.

Si  $v$  es una función de peso (o de prueba), no necesariamente representada con respecto a la base  $\{\varphi_m\}$ , entonces  $R_N \equiv Lv_N - f$  es ortogonal a todo subespacio generado por cualquier base  $\{\psi_m\}$  en  $V$ , es decir

$$\langle Lv_N - f, \varphi_0 \rangle = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad , \quad v_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i$$

fórmula conocida como método de los residuos ponderados (MRP). Si  $\varphi_m \neq \psi_m$  el método es el de Petrov-Galerkin; si  $\varphi_m = \psi_m$  es el método de Galerkin.

Si  $Au = Lu - f$  entonces la ecuación diferencial (11) se puede expresar como

$$\int_{\Omega} vA(u)dV + \int_{\Gamma} vB(u)ds = 0, \quad \forall v \in V \quad (13)$$

$B$  puede ser  $B_D$  y/o  $B_N$  o combinación de ellos.

Si las funciones que aparecen en (13) son integrables, ésta ecuación se puede escribir como

$$\sum_e \int_{\Omega_e} vA(u)dV + \sum_e \int_{\Gamma_e} vB(u)ds = 0$$

donde  $\Omega_e$  es uno de los elementos en los cuales se dividió  $\Omega$ , es decir,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_e$ ,  $\text{int}\Omega_i \cap \text{int}\Omega_j = \emptyset$

La forma usual de expresar la solución aproximada es a través de una combinación lineal de funciones como

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i N_i(x) = \alpha_1 N_1(x) + \dots + \alpha_m N_m(x)$$

donde  $\alpha_i$ , son coeficientes a determinar. Las funciones  $N_i(x)$  son las funciones de forma o base (o admisibles).

Al reemplazar la función  $\tilde{u}(x)$  en (13) se obtiene

$$\int_{\Omega} v A(\tilde{u}) dV + \int_{\Gamma} v B(\tilde{u}) ds \approx 0$$

que es la forma de residuos ponderados.



## Ejemplo

*Resolver el problema de valor de frontera*

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -10, \quad u(0) = 40, \quad u(9) = 265$$

*que describe la distribución de temperatura de una barra de longitud 9 unidades.*

Para aplicar MEF, una configuración simple para la discretización del modelo es tomar una partición regular de la barra, como se muestra en la Figura

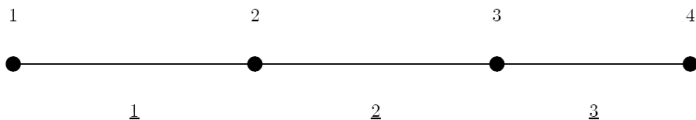


Figura: Partición en tres elementos y sus nodos

La distribución de temperatura para un solo elemento se puede representar por la función de aproximación

$$\bar{u} = N_1 u_1 + N_2 u_2, \quad (14)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son las funciones interpolantes definidas por

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

## MEF

En la Figura se muestran las gráficas de las funciones  $N_1$  y  $N_2$ .

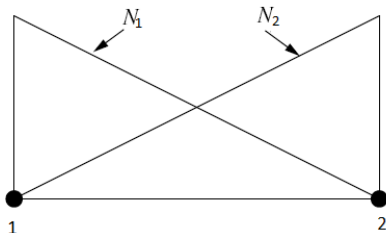


Figura: Funciones interpolantes

La función de aproximación viene a ser una interpolación lineal entre las dos temperaturas nodales, como se ve en la Figura siguiente



como la solución no es exacta, el lado izquierdo de la ecuación resultante no será cero, sino igual a un residuo,

$$R = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + 10.$$

El método de los residuos ponderados consiste en hallar un mínimo para el residuo de acuerdo con la expresión

$$\int_{\Omega} R \omega_i dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde  $\omega_i$  son las funciones de peso y  $\Omega$  es el dominio solución. Si utilizamos las funciones de interpolación  $N_i$ , como funciones de peso, esto es,  $N_i = \omega_i$ , obtenemos el método de Galerkin,

$$\int_{\Omega} R N_i dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Luego, la última expresión queda

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + 10 \right] N_i dx = 0, \quad i = 1, 2$$

la cual se puede escribir como

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} N_i(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} 10 N_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Al aplicar integración por partes al miembro izquierdo tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} N_i(x) dx = N_i(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx. \quad (15)$$

Para  $i = 1$ , el primer término del lado derecho de la última expresión, al evaluar se obtiene

$$\begin{aligned} N_1(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} &= N_1(x_2) \frac{d\bar{u}(x_2)}{dx} - N_1(x_1) \frac{d\bar{u}(x_1)}{dx} \\ &= - \frac{d\bar{u}(x_1)}{dx} \end{aligned}$$

ya que  $N_1(x_2) = 0$  y  $N_1(x_1) = 1$ . De igual manera para  $i = 2$  se tiene

$$N_2(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d\bar{u}(x_2)}{dx}.$$

así, el primer término del lado derecho de la ecuación (15) representa las condiciones de frontera naturales en los extremos de los elementos.

Por lo tanto, para  $i = 1$  se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = -\frac{d\bar{u}(x_1)}{dx} + 10 \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) dx$$

y para  $i = 2$ ,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \frac{d\bar{u}(x_2)}{dx} + 10 \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) dx.$$



Por otro lado,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{u_1 - u_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{u_1 - u_2}{x_2 - x_1}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{-u_1 + u_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{-u_1 + u_2}{x_2 - x_1}.$$

En forma matricial las ecuaciones para un solo elemento se expresan como

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d\bar{u}(x_1)}{dx} \\ \frac{d\bar{u}(x_2)}{dx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) dx \\ 10 \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) dx \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Esta ecuación la utilizamos para ensamblar el sistema con los tres elementos y los cuatro nodos. Como la partición es uniforme, cada elemento tiene una longitud de 3 unidades, luego el término fuente de calor del primer renglón de la ecuación (16) es

$$10 \int_0^3 \frac{3-x}{3} dx = \frac{10}{3} \left[ 3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 15.$$

De igual manera se obtiene para el segundo renglón

$$10 \int_0^3 \frac{x}{3} dx = 15.$$

Por tanto, al reemplazar en (16) se tiene

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{du(x_1)}{dx} + 15 \\ \frac{du(x_2)}{dx} + 15 \end{pmatrix}.$$

Como hay 4 nodos la matriz global es de orden  $4 \times 4$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{du(x_1)}{dx} + 15 \\ \frac{du(x_2)}{dx} + 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{du(x_1)}{dx} + 15 \\ 15 + 15 \\ \frac{du(x_3)}{dx} + 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{du(x_1)}{dx} + 15 \\ 30 \\ 15 + 15 \\ \frac{du(x_4)}{dx} + 15 \end{pmatrix}.$$

Observe que, a medida que se ensamblan las ecuaciones, las condiciones de frontera internas se cancelan, sólo permanecen la del primero y último nodos, que representan incógnitas. Además, como  $u_1 = u(0) = 40$  y  $u_4 = u(9) = 265$ , el sistema a resolver es el siguiente:

$$\frac{du(x_1)}{dx} - \frac{1}{3}u_2 = \frac{5}{3} \quad (17)$$

$$\frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 = \frac{130}{3} \quad (18)$$

$$-\frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 = \frac{355}{3} \quad (19)$$

$$\frac{du(x_4)}{dx} + \frac{1}{3}u_3 = \frac{220}{3}. \quad (20)$$

Al resolver las ecuaciones (18) y (19) se obtiene  $u_2 = 205$  y  $u_3 = 280$ . Además,  $\frac{du(x_1)}{dx} = 70$  y  $\frac{du(x_4)}{dx} = -20$ .  
solución exacta  $u(x) = -5x^2 + 70x + 40$ .

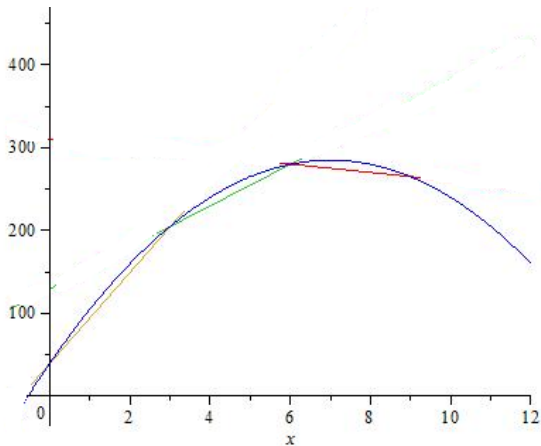


Figura: solución exacta y solución aproximada

# Referencias



Johnson, C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Dover Publications, Inc. New York, 2009.



Lewis, R.W., Nithiarasu, P., Seetharamu, K.N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. John Wiley & Sons, Inc. New York, 2004.



Pepper, D. W., Heinrich, J. C. The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications. Taylor & Francis, 2<sup>a</sup> Ed. New York, 2005.



Reddy, B. D. Introductory Functional Analysis. Tex. Appl. Math. 27 Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1998.



Reddy, J. N. An Introduction to the Finite Element Method. 3<sup>a</sup> Ed. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, New York, 2005.