

ANÁLISIS NUMÉRICO 2
PROFESOR: Cristhian Montoya
Ingeniería Matemática: Taller 1

1. Considere las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^n .

- a) Pruebe que $\|u\| = \frac{1}{3}\|u\|_1 + \frac{2}{3}\|u\|_\infty$ define una norma en \mathbb{R}^n .
- b) Pruebe que $\|\cdot\|_p \rightarrow \|\cdot\|_\infty$, cuando $p \rightarrow \infty$.
- c) Para $0 < p < 1$, la función $\|\cdot\|_p$ (ver presentación) define una norma para \mathbb{R}^n ?
- d) Pruebe que $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.

2. Verifique que $\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$, es una norma en el espacio vectorial $C([a, b])$.

3. Discutir la posibilidad de que la desigualdad triangular para la norma de la suma en \mathbb{R}^n sea la igualdad, es decir, encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ para verificar que

$$\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

4. Sea X un espacio vectorial y sean $u, v : X \rightarrow [0, \infty)$ dos normas en X . En cada uno de los siguientes casos, probar que la función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida para todo $x \in X$ en la forma que se indica, es una norma en X :

$$\begin{aligned} \|x\| &= u(x) + v(x) \\ \|x\| &= \max\{v(x), u(x)\} \\ \|x\| &= (u(x)^2 + v(x)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

5. Probar que la función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x, y) := |y - x|^{1/2}$$

es una distancia en \mathbb{R} .

6. Sean X un espacio normado, Y un espacio vectorial y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal e inyectiva. Probar que, definiendo

$$\|y\| = \|f(x)\| \quad \forall y \in Y$$

se obtiene una norma en Y . Establecer un resultado análogo para espacios métricos.

7. Consideremos en $L^2([a, b] \times [a, b])$ la aplicación

$$\|f\| := \sqrt{\int_a^b \int_a^b |f(t, s)|^2 dt ds}.$$

Mostrar que $(L^2([a, b] \times [a, b]), \|\cdot\|)$ es una norma.

8. Sea $\mathcal{C}^1([0, 1]) := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : \exists f' \in \mathcal{C}([0, 1])\}$. Mostrar que la siguiente función sobre $\mathcal{C}^1([0, 1])$ es una norma

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt + \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}.$$

9. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Demostrar que para $x, y \in V$ se tiene

- a) La ley del paralelogramo: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- b) Teorema de Pitágoras: $\langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- c) La identidad polar: $\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$ (caso real)
 $\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2}{4}$.
- d) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = ay \text{ o } y = ax$ para alguna constante $a \geq 0$.

10. Sea $V = C([a, b])$.

- a) Pruebe que V es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ para todo $f \in V$ y para todo $t \in [a, b]$.
- b) Pero con la norma $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$, no lo es.

Ayuda: Considere la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ definidas por

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ (t - \frac{1}{2})^{1/n}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siga estos pasos:

- i) Pruebe que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.
- ii) Sea $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$
 verifique que $f \notin V$.

11. Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ vectores de \mathbb{R}^n determine si $\langle x, y \rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

- a) $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k |y_k|$
- b) $\langle x, y \rangle = \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|$
- c) $\langle x, y \rangle = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 \right)^{1/2}$

12. Sea $V = C[0, 1]$, determine si $\langle f, g \rangle$ es o no un producto interno, en caso de no serlo, indicar qué propiedades no se cumplen.

- a) $\langle f, g \rangle = f(1)g(1)$
- b) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$, donde $f' = \frac{df}{dt}$ y lo mismo para g' .
- c) $\langle f, g \rangle = \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right)$

13. En el espacio vectorial $V = C(1, e)$, se define un producto interno por

$$\langle f, g \rangle = \int_1^e (\ln t) f(t) g(t) dt.$$

- Si $f(t) = \sqrt{t}$, calcular $\|f\|$.
- Encontrar un polinomio de primer grado $g(t) = a + bt$ que sea ortogonal a la función constante $f(t) = 1$.

14. En el espacio $C(-1, 1)$, sea $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$.

Considere las tres funciones u_1 , u_2 y u_3 dadas por

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = t, \quad u_3(t) = 1 + t.$$

Pruebe que dos de ellas son ortogonales, dos forman entre sí un ángulo de $\pi/3$, y dos forman entre sí un ángulo de $\pi/6$.

15. En el espacio vectorial \mathcal{P}_n de todos los polinomios reales de grado $\leq n$, se define

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Mostrar que $\langle f, g \rangle$ es un producto interno para \mathcal{P}_n .
- Calcular $\langle f, g \rangle$ cuando $f(t) = t$ y $g(t) = at + b$.
- Si $f(t) = t$, hallar todos los polinomios lineales g ortogonales a f .

16. Sea H un subespacio de \mathbb{R}^n . El complemento ortogonal de H , denotado por H^\perp , se define como

$$H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, h \rangle = 0, \forall h \in H\}.$$

- Pruebe que H^\perp es un subespacio cerrado de \mathbb{R}^n .
- Para $V = \mathbb{R}^3$ y $H = \{(x, y, z) : 4x - y + 6z = 0\}$
 - Encuentre H^\perp .
 - Muestre que $\mathbb{R}^3 = H \oplus H^\perp$, es decir, $\mathbb{R}^3 = H + H^\perp$ y $H \cap H^\perp = \{0\}$.
 - Expresa el vector $v = (2, 1, 3)$ como $h + u$, donde $h \in H$ y $u \in H^\perp$.

17. Sea $V = C[-1, 1]$ y $H = \{f \in V : f(-t) = f(t), \forall t \in [-1, 1]\}$, el conjunto de las funciones pares.

- Pruebe que el complemento ortogonal H^\perp es el conjunto de todas las funciones impares.
- Pruebe que $V = H \oplus H^\perp$.

18. Sea H y K subespacios de \mathbb{R}^n .

- Pruebe que si $H \subset K$, entonces $K^\perp \subset H^\perp$.
- Pruebe que $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.
- Pruebe que $H^{\perp\perp} = H$, donde $H^{\perp\perp} = (H^\perp)^\perp$.

19. Sea $V = \mathcal{M}_{nn}$ el espacio de las matrices de orden $n \times n$.

- a) Definamos $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$, donde $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, es la traza de la matriz $A = (a_{ij})$ y B^T es la transpuesta de B . Pruebe que V es un espacio con producto interno.
- b) Pruebe que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- c) Si P es una matriz invertible de orden $n \times n$, pruebe que

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}A.$$

20. Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ números reales, $1 < p < \infty$ y q definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar las siguientes desigualdades:

- a) Desigualdad de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

- b) Desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

21. Sea $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de \mathbb{R}^n . Supongamos que existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\|v_{k+1} - v_k\| \leq \alpha \|v_k - v_{k-1}\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que la sucesión $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente en \mathbb{R}^n .

22. Pruebe que todo espacio vectorial finito-dimensional normado es de Banach.

23. Pruebe que $l_p(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ para $p \geq 1$, es un espacio de Banach con la norma definida por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

donde $x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)_{n \geq 1}$ y $ax = (ax_n)_{n \geq 1}$, a un escalar real.

24. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V .

Pruebe que $V = M \oplus M^{\perp}$, es decir, hay que demostrar:

- i) $V = M + M^{\perp}$.
- ii) Todo $v \in V$ se puede expresar como $v = m + p$ de manera única, donde $m \in M$ y $p \in M^{\perp}$.

25. Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert V . Entonces

- a) M es completo si y sólo si M es cerrado en V .
- b) $M^{\perp} = \{0\}$ si y sólo si M es denso en V .
- c) Si M es cerrado y $M^{\perp} = \{0\}$, entonces $M = V$.

d) $M^{\perp\perp} = \overline{M}$, donde \overline{M} es la clausura de M .

e) Si M es cerrado, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

26. Supongamos que $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert V . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una base ortonormal para V .

b) $\langle u, v \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle u, v_j \rangle \overline{\langle v, v_j \rangle}$ para cada $u, v \in V$.

c) La igualdad de Parseval se tiene: $\|u\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2$, donde $\alpha_j = \langle u, v_j \rangle$, para todo $u \in V$.

d) El subespacio generado por $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ es denso en V .

e) Para cada $u \in V$, si $\langle u, v_j \rangle = 0$, para $j = 0, 1, 2, \dots$ entonces $u = 0$.

Afirmaciones equivalentes significa que $a) \Rightarrow b) \Rightarrow \dots \Rightarrow a)$.