LOGICA Y ALGORITMOS

Módulos

- Cardinalidad y conjuntos inductivos
- Lógica: proposicional y de 1er orden
- Formalismos de cálculo: FR y FL
- Lenguajes y autómatas

Distintos Sistemas Lógicos:

LOGICA PROPOSICIONAL

LOGICA DE PREDICADOS

LOGICAS NO-CLASICAS

- MULTIVALUADAS (Fuzzy Logic)
- MODALES

OBJETIVO: ESTABLECER LA VALIDEZ DE DISTINTOS RAZONAMIENTOS - OBTENER CONCLUSIONES DE UN CONJUNTO DE FORMULAS

Lógica de predicados

Introducción

Lógica de Predicados

LENGUAJE

– ***Sintaxis:*** fbfs del lenguaje, más rico que PROP

– ***Semántica:*** Cómo probar la veracidad de las fórmulas ??

RAZONAMIENTOS

– Justificación sintáctica (pruebas formales)

Motivación

$\overbrace{\text{Todo natural es entero}}^{p}$ **y** $\overbrace{\text{2 es un natural}}^{q}$,

luego $\underbrace{\text{2 es un entero}}_{r}$.

$$p, q \not\models r$$

No es un razonamiento válido?

Todo natural es entero **y** 2 es un natural, **luego** 2 es un entero.

$$\forall x\ (x \in N \rightarrow x \in Z)$$
$$2 \in N$$

$$2 \in Z$$

- La corrección de este razonamiento depende de la relación entre los sujetos de las proposiciones.

Todo perro es un mamífero **y Rex es un perro**, **luego** Rex es un mamífero..

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x\ (Perro(x) \rightarrow Mamífero\ (x)) \\ Perro\ (Rex)\end{array}}{Mamífero\ (Rex)} \qquad \frac{\forall x.\ P(x)}{P(Rex)}$$

La corrección de este razonamiento depende de la relación entre los sujetos de las proposiciones.

- **Lógica proposicional NO es suficientemente expresiva para captar esta relación**

Por qué lógica de predicados

Lógica proposicional : bajo poder expresivo

proposiciones usuales en matemática no son expresables

En proposicional:

p (una prop. atómica)

« 2 es natural »

En predicados:

Sujeto: 2

Propiedad: Ser Natural

Natural(2)

La validez de ciertos razonamientos depende de la relación entre las proposiciones

⇓

- análisis « fino » de la estructura de las proposiciones

- el análisis de oraciones clásico no es el más adaptado para reflejar (o explicitar) la relación (o la estructura) entre las proposiciones que componen el razonamiento

Como Traducir ???

Por ejemplo la oración

Rex es un perro

puede analizarse de una de las siguientes maneras:

Es (Rex, perro)

Es-perro (Rex)   Perro (Rex)

Es-Rex (Perro)

Otro ejemplo

Mafalda detesta la sopa

puede analizarse de una de las siguientes maneras:

Detesta(Malfalda, x)

DetestaSopa (Mafalda)

DetestadoPorMafalda(sopa)

- según la **propiedad o relación** que se identifique, y según los **individuos** del universo de quienes se hable.

Lógica de predicados

Informal

Lenguaje de lógica de predicados

- *Símbolos para denotar* ***objetos***

  - **sb. de constante** (ej. Mafalda, Rex, 2)

  - **sb. de variable** (ej. x, y, z)

  - **sb. de función** (ej. Padre, +, *, etc que permiten crear nuevos nombres de objetos como Padre(juan), (1+1), (2*1))

- *Símbolos de* ***propiedades y de relaciones***
- ***Conectivos***
- ***Cuantificadores***

Símbolos de relación

- símbolos unarios, binarios, etc

Ejemplos.

Símbolos de propiedad (unario)

Par(x)

Primo(x)

$\geq$ es un símbolo de relación binario

$x \geq 0$ *Mayor(x,0)*

Símbolos de relación

- *Pedro es docente*
- *Pedro tiene otro trabajo*

Ejemplo: *Docente y Otro-trabajo* son símbolos de propiedad (unarios)

Docente(pedro) *Otro-trabajo(pedro)*

Ejemplos de mayor aridad:

Tiene (pedro, otro-trabajo)

Padre (pedro,juan)

Vuelo (123,AA,BsAs,Madrid)

Por qué símbolos de función si tenemos símbolos de relación?

padre (juan) — $\exists y\ Padre(y,juan)$

suma(x,y) — $\exists s\ Suma(s,x,y)$

- *el factorial de un número es par*

  $Par(fact(x))$

  $\exists y\ Fact(x,y) \rightarrow Par(y)$

➢ *los símbolos de función simplifican la notación*

Conectivos: Enunciados compuestos

- Las sentencias simples del cálculo de predicado se pueden combinar usando los conectivos ya vistos (C= $\{\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow\}$)

Ejemplos:

Si alguien es docente entonces gana poco

$$Docente(x) \rightarrow Gana\text{-}poco(x)$$

La suma de dos naturales no es negativa

$$(Nat(x) \wedge Nat(y)) \rightarrow Positivo(suma(x, y))$$

$$suma(x, y)>0$$

Enunciados compuestos

x es natural par y es mayor o igual a cero.

$$Par(x) \land (x \geq 0)$$

$$Par(x) \land (Mayor(x,0))$$

Pedro es el padre de Juan y Juan es el padre de María

$$Padre(pedro,juan) \land Padre(juan, maria)$$

Pedro es el padre de Juan y Pedro es el padre de María

$$Padre(pedro,juan) \lor Padre(pedro,maria)$$

Enunciados compuestos

La suma de dos naturales es positiva

$(Nat(x) \land Nat(y)) \rightarrow Positivo(suma(x, y))$

$suma(x, y) > 0$

Juan escribe el programa y no funciona

$Escribe\text{-}prog(juan) \land \neg Funciona(programa)$

$Escribe(juan, programa) \land \neg Funciona(programa)$

Traducción

- Puede ser mas complicado definir los predicados…

  Si Juan escribe el programa y no funciona, entonces o lo arregla por la tarde o se lo da a un programador al dia siguiente.

(Escribe(juan, programa) $\wedge \neg$ Funciona(programa)) $\rightarrow$

$\rightarrow$ (Arregla (juan, programa, tarde) $\vee$

$\vee$ Da(programador, programa, dia-siguiente))

Cuantificadores

Necesitamos tratar con expresiones que incluyan términos como *todos* o *algunos*:

➢ *todos* ⟶ $(\forall\ x)$ **CUANTIFICADOR UNIVERSAL**

- Todo entero tiene un factor primo

  $(\forall\ x)\ (E(x) \rightarrow Fp(x))$

- Todo número es par o impar

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee I(x))$

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee \neg\ P(x))$

Cuantificadores

➢ *algunos* → $(\exists\, x)$ **CUANTIFICADOR EXISTENCIAL**

- Agunos docentes tienen otro trabajo

  $(\exists\, x)\ (D(x) \wedge O\text{-}t(x))$

- Existen números pares que son cuadrados de otro número par

  $(\exists\, x)\ (\exists\, y)\ (P(x) \wedge P(y) \wedge (x=y^2))$

  $(\exists\, x)\ (\exists\, y)\ (P(x) \wedge P(y) \wedge Igual(x, cuad(y)))$

Cuantificadores

-*En general, si A es un predicado (simple o compuesto), son predicados:*

$(\forall x)\ A(x)$

"Todo objeto tiene la propiedad A"

$(\exists\ x)\ A(x)$

"Existe algún objeto con la propiedad A"

Relación Cuantificadores

- *No todas las aves vuelan*

  $\neg(\forall\ x)\ (A(x) \rightarrow V(x))$

- Justificamos la expresión anterior pues "*existen aves que no vuelan*"

  $(\exists\ x)\ (A(x) \land \neg\ V(x))$

  Aquí tenemos una equivalencia semantica entre las dos expresiones que nos lleva a una equivalencia entre los cuantificadores:

  $\neg(\forall\ x)\ P(x)$ equivale a $(\exists\ x)\ \neg P(x)$

  $\neg(\forall\ x)\ \neg\ P(x)$ equivale a $(\exists\ x)\ P(x)$

Relación Cuantificadores

- *Algunos números reales no son racionales*

Usando el cuantificador existencial

$$(\exists\ x)\ (R(x) \wedge \neg\ Q(x))$$

Usando el cuantificador universal

$$\neg(\forall\ x)\neg\ (R(x) \wedge \neg\ Q(x))$$

$$\neg(\forall\ x)\ (R(x) \rightarrow Q(x))$$

Ejemplos de traducción

- Si algunos trenes se retrasan entonces todos se retrasan

  $(\exists x)\ (T(x) \wedge R(x)) \rightarrow (\forall x)\ (T(x) \rightarrow R(x))$

- Todo número es par o impar

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee I(x))$

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee \neg P(x))$

- Ningún número es a la vez par e impar

  $\neg(\exists x)\ (P(x) \wedge I(x))$

Ejemplos de traducción

- Todo número es negativo o tiene raíz cuadrada.

  $(\forall x)\ (Neg(x) \vee (\exists y)\ \ (y*y) = x)$

  $(\forall x)\ ((x \leq 0\ ) \vee (\exists y)\ Raiz(x,y))$

- Todo número es par o impar

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee I(x))$

  $(\forall x)\ (N(x) \rightarrow P(x) \vee \neg\ P(x))$

Universo de discurso

- Si algunos trenes se retrasan entonces todos se retrasan

  y sólo hablamos de trenes

  $(\exists x)\ R(x) \rightarrow (\forall x)\ R(x)$

- Todo número es par o impar

  y sólo hablamos de naturales

  $(\forall x)\ (P(x) \vee I(x))$

Universo de discurso

- ✓ Si la naturaleza de los objetos de quienes hablamos está sobreentendida (ej. hablamos siempre de trenes, de naturales, de reales, etc.) podemos obviar el símbolo de propiedad respectivo

- ✓ cuando el universo de discurso se particiona en clases de objetos, y predicamos sobre las subclases, utilizamos símbolos de propiedad para referenciar los objetos de la subclase

Ejemplos de traducción

- Ningún número es par e impar a la vez

  $\neg(\exists\, x)\ (P(x) \wedge I(x))$

  $\neg(\exists\, x)\ (P(x) \wedge \neg P(x))$

- *El sucesor del sucesor de un número par, es par.*

  $(\forall x)\ (\ P\ (x) \rightarrow P(S(S\ (x))\ )$

- *Existe un entero que es mayor que cualquier otro entero* *traducción???*

Antes de formalizar el lenguaje de la lógica de predicados...

✓Qué es lo que determina los símbolos del alfabeto que necesitamos en nuestro lenguaje?

⇓

La realidad que queremos describir

⇓

<u>noción de estructura</u>

Lógica de predicados

Definición de FORM y propiedades

Sintaxis: Lógica de predicados

- ***Debemos definir un lenguaje formal dando el alfabeto y las reglas de construcción de las fórmulas bien formadas (conjunto FORM)***
- ***Según la realidad que quiera representar tendré distintos lenguajes (L1, L2...), que utilizarán distinto alfabeto (me interesa su estructura)***

Un lenguaje formal:

provee nombres abstractos para denotar los individuos, funciones y relaciones de nuestro universo o estructura. De las funciones y predicados nos interesa la aridad (i.e. si es unaria, binaria, etc). De las constantes interesa la cantidad.

Esta información esta dada por el alfabeto elegido (funciones y relaciones con su aridad, conjunto de ctes)

Def ***[alfabeto de un leng. de primer orden]***

Un alfabeto para un lenguaje de primer orden, consiste de los siguientes símbolos:

- Símbolos de relación: $A_1^1, .., A_2^1, A_1^2, \ldots, A_n^m$
- Símbolos de función: $f_1^1, .., f_1^2, f_2^2 \ldots, f_i^j$
- Símbolos de constantes: $\underline{c}_i$ *tal que* $i \in I$
- Variables: $x_1, x_2, x_3, ..$
- Conectivos : $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
- Cuantificadores: $\forall \exists$
- Auxiliares : (,)

Dado el alfabeto

< $A_1^1, \ldots, A_n^m$; $f_1^1, .., f_i^j$; $c_1, \ldots c_k$;
otros elementos >

para predicar sobre esa estructura usaremos en el lenguaje n símbolos de relación, m símbolos de función y k de constantes donde:

- ✓ **Aridad**

m es la aridad del símbolo de relación A_n^m

j es la aridad del símbolo de función f_i^j

- ✓ **Nota:**

cuando escribimos « alfabeto » daremos por entendido que también están los símbolos independientes (variables, conectivos, cuantificadores, paréntesis).

Para definir un Lenguaje L de primer orden, debemos definir la noción de término

Def [términos de un leng. de primer orden]

El conjunto TERM de los *términos de un lenguaje de primer orden* de alfabeto $A_1^1, \ldots, A_n^m$; $f_1^1, \ldots, f_i^j$; $c_1, \ldots c_k$; se define inductivamente por:

ι) $x_i \in$ TERM $(i \in \mathbb{N})$

ιι) $c_i \in$ TERM $(i \in I)$

ιιι) si $t_1 \in$ TERM, ... $t_n \in$ TERM

entonces $f_i^n(t_1, \ldots t_n) \in$ TERM

Términos de un leng. de primer orden

El conjunto TERM de los *términos de un lenguaje de primer orden* se utilizan para representar los objetos del dominio

- ✓ Constantes
- ✓ Variables
- ✓ Funciones aplicadas a términos (objetos) que me dan objetos del dominio

Ejemplos de términos

Sea el lenguaje de alfabeto A_1^2, f_2^1 f_1^2 c_1, c_2.

$x_1 \in TERM$?

Si (por i)

$c_2 \in TERM$?

Si (por ii)

$f_2^1(x_1) \in TERM$?

Si pues por i) $x_1 \in$ TERM y f_2^1 es unario

$f_2^1(x_1,c_2) \in TERM$?

No pues f_2^1 es unario y no puede aplicarse a dos términos

$f_1^2(f_2^1(x_1),c_2) \in TERM$?

Si pues … (completar)

$A_1^2(c_2, c_2) \in TERM$?

No pues … (completar)

Def [FORM] f.b.f.

El conjunto **FORM** de las *fórmulas de un lenguaje de primer orden L* de alfabeto $A_1^1, \ldots, A_n^m; f_1^1, \ldots, f_i^j; c_1, \ldots c_k$ se define inductivamente por:

ι) Si $t_1 \in$ **TERM**, ... $t_m \in$ **TERM** entonces $A_n^m(t_1, \ldots, t_{ri}) \in$ FORM

⬇ **Fórmulas atómicas**

ii) Si $\alpha \in$ FORM y $\beta \in$ FORM entonces

– $(\alpha \text{€} \beta) \in$ FORM donde $\text{€} \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$

– $(\neg \alpha) \in$ FORM

ιιι) Si $\alpha \in$ FORM entonces

– $((\forall x_i)\, \alpha) \in$ FORM

- $((\exists x_i)\, \alpha) \in$ FORM

Ejemplos de fórmulas

Sea L el lenguaje definido por el alfabeto

A_1^1, A_1^2; f_1^1 , f_1^2, c_1, c_2.

$A_1^1(x_1) \in$ FORM ?

SI pues $x_1 \in$ TERM

$A_1^2(f_1^1(x_1), c_1) \in$ FORM ?

SI pues A_1^2 es binario, $f_1^1(x_1) \in$ TERM y $c_1 \in$ TERM

$A_1^1(f_1^2(x_1, c_1)) \in$ FORM ?

SI pues …completar!

$((\forall x_1)(A_1^1(f_1^2(x_1, c_1)) \rightarrow A_1^1(f_1^2(x_1, c_1)))) \in$ FORM ?

SI pues …. completar !

Ejemplos de fórmulas

$((\forall x_1)\ A_1^2(f_1^1(x_1), c_1)) \rightarrow ((\exists x_2)\ A_1^1(x_1)) \in \text{FORM}$?

SI pues … completar!

$(\exists x_2)\ f_1^1(x_1) \in \text{FORM}$? → NO

$f_1^1(x_1) \in \text{FORM}$?

NO pues según el alfabeto f_1^1 es

un sb. de función y no de predicado

$\Rightarrow$ **No confundir sb. de predicado y**

sb. de función !

$f_1^1(x_1) \in \text{TERM}$ y $A_1^1(x_1) \in \text{FORM}$

Ejemplos (cont)

$A_1^3(x_1, x_2, x_3) \in$ FORM ?

NO pues A_1^3 no es un símbolo del alfabeto dado

$A_1^1(x_1, c_1) \in$ FORM ?

NO pues A_1^1 es un sb. de predicado unario y se está utilizando como binario

Def **[fórmula atómica]**

Se llaman fórmulas atómicas, a aquellas fórmulas FORM que se obtienen con las cláusulas base (o sea que son de la forma $A_1^k(t_1,...,t_k)$)

Lema [ppio. de inducción para TERM]

Sea **P** una propiedad sobre TERM. Si se cumple:

ι) **P** (x_i) para todo i $\in \mathbb{N}$.

ιι) **P** (c_i) para todo $i \in \mathrm{I}$.

ιιι) si **P**(t_1),... **P** (t_k) entonces **P** $(f_i^k(t_1,..t_k))$

Entonces para todo $t \in$ TERM se cumple **P**(t)

<u>Lema</u> [ppio. de inducción para FORM]

Sea **P** una propiedad sobre FORM. Si se cumple:

ι) **P** (α) para todo α atómico.

ιι) si **P**(α) y **P** (β) entonces **P**(α € β)

ιιι) si **P**(α) entonces **P**($\neg\alpha$)

ιν) si **P**(α) entonces **P**($(\forall x_i)\ \alpha$) para todo i $\in \mathbb{N}$.

ν) si **P**(α) entonces **P**($(\exists x_i)\ \alpha$) para todo i $\in \mathbb{N}$.

Entonces para todo $\alpha \in$ FORM se cumple **P**(t)

Reglas de parentización

Para simplificar la escritura de las fórmulas, omitimos ciertos paréntesis:

- Las reglas de precedencia de conectivos son las mismas que para PROP.
- Reglas para cuantificadores:

el $(\forall x)$ y el $(\exists x)$ tienen igual precedencia que el $\neg$.

- Atención: No confundir las siguientes fórmulas

$(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta)$ **y** $(\forall x)\alpha \rightarrow \beta$

$(\exists x)(\alpha \rightarrow \beta)$ **y** $(\exists x)\alpha \rightarrow \beta$

Alcance de cuantificadores

Def [radio de acción o alcance]

En la fórmula $(\forall x)\alpha$ $[(\exists x)\alpha]$ *radio de acción del* $(\forall x)$ $[(\exists x)]$ es la fórmula α. También se la llama ***alcance.***

Una ***ocurrencia de x_i en α es ligada*** si se encuentra bajo alcance de un cuantificador $(\forall x_i)$ o si es la variable de un $(\forall x_i)$. Si la ocurrencia no es ligada se dice que es una ***ocurrencia libre.***

Una ***variable x_i es ligada en α*** si tiene alguna ocurrencia ligada.

Una ***variable x_i es libre en α*** si tiene alguna ocurrencia libre en α.

Ejemplo de alcance de cuantificadores

$(\forall x)\ A_1^1(x) \rightarrow (\forall y)\ A_1^2(x,y)$

$(\forall x)\ A_1^1(x) \rightarrow (\forall y)\ A_1^2(x,y)$

$(\forall y)(\forall x)\ (A_1^1(x) \rightarrow A_1^2(x,y))$

$(\forall y)\ (\forall x)\ A_1(x) \rightarrow A_2(x,y)$

Ocurrencias libres y ligadas

$((\forall x_1)\ A_1^1(x_1)) \rightarrow (\forall x_2)\ A_1^2(x_1, x_2))$

Ocurrencia libre

Ocurrencias ligadas

$(\forall x_1)\ A_1^1(c_1)$

Ocurrencia ligada

Ejemplo

Sea α la fórmula $((\forall x)\ A_1(x)) \rightarrow (\forall y)\ A_2(x,y)$

x tiene 2 ocurrencias ligadas en α
entonces x es ligada en α

x tiene 1 ocurrencias libre en α
entonces x es libre en α

Obs: - una ocurrencia de variable en una fórmula es **o bien** libre **o bien** ligada
- una variable puede ser libre y ligada en una fórmula

<u>Def</u> 2.3.6 [conj. de variables libres de un término]

Definimos **FV** :TERM $\rightarrow$ Pot(Var) recursiva enTERM.

$\mathbf{FV}(x_{\mathbf{i}}) = \{\, x_{\mathbf{i}} \,\}$ si $x_{\mathbf{i}} \in$ Var

$\mathbf{FV}(c_{\mathbf{i}}) = \varnothing$

$\mathbf{FV}(f_1^k(t_{\mathbf{1}},\ldots,t_{\mathbf{k}})) = \mathbf{FV}(t_1) \cup \ldots, \cup\, \mathbf{FV}(t_{\mathbf{k}})$.

<u>Def</u> 2.3.7 [conj. de variables libres de un fórmula]

Definimos FV :FORM $\rightarrow$ Pot(Var) recursiva enTERM.

$FV(A_1^r(t_{\mathbf{1}},\ldots,t_{\mathbf{r}})) = \mathbf{FV}(t_1) \cup \ldots, \cup\, \mathbf{FV}(t_{\mathbf{r}})$

$F(\alpha \quad \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta))$

$FV(\neg\, \alpha\,) = FV(\alpha)$

$FV((\forall x_{\mathbf{i}}\,)\alpha\,) = F((\exists\, x_{\mathbf{i}}\,)\alpha\,) = FV(\alpha) - \{\, x_{\mathbf{i}} \,\}$

Ejercicio: Definir recursivamente la función que calcula el conjunto de variables ligadas de una fórmula (BV)

Def 2.3.8 [términos y fórmulas cerradas]

Un término *t* es cerrado si $FV(t) = \emptyset$.

Una fórmula α es cerrada si $FV(\alpha) = \emptyset$.

Notación:

$TERM_c$ denota $\{t \in TERM \mid t \text{ es cerrado}\}$

SENT denota $\{\alpha \in FORM \mid \alpha \text{ es cerrada}\}$

Ejemplo 1: el lenguaje L*, aritmética de los $\mathbb{N}$

Queremos definir un lenguaje que sea apropiado para representar predicados referentes a la aritmética de los $\mathbb{N}$

Alfabeto:

símbolos de predicado A_1^2 rep =

símbolos de función: f_1^1, f_1^2, f_2^2 rep. S,+, *

símbolos de constante: c_1 rep 0

variables, conectivas, cuantificadores, puntuación

Luego expresiones como $\forall x_1 \exists x_2 / x_1+x_2 = x_1 x_2$

Se traducen al lenguaje L*

$$(\forall x_1)(\exists x_2)\ A_1^2\ (f_1^2\ (x_1\ x_2), f_2^2\ (x_1, x_2\ ))$$

$x_1+x_2 = 0$ se traduce ????

<u>Ejemplo 1:</u> el lenguaje de la aritmética

Mas expresiones para traducir

Son algunas propiedades de estructuras denominadas de Peano

$\forall x\ (0 \neq S(x))$

$\forall xy\ (S(x)=S(y) \rightarrow x=y)$

$\forall x\ (x+0 = x)$

$\forall xy\ (x+S(y) = S(x+y))$

$\forall x\ (x*0 = 0)$

$\forall xy\ (x*S(y)) = (x*y) + x$

$(\forall\ x_1)\ \neg A_1^2\ (c_1, f_1^1\ (x_1))$

...

Traducir !!!

Ejemplo 2: L^G el lenguaje de Grupos

Alfabeto:

símbolos de predicado A_1^2 rep $=$

símbolos de función: f_1^1, f_1^2 rep. $^{-1}, *$

símbolos de constante: c_1 rep e (identidad)

variables, conectivas, cuantificadores, puntuación

Luego expresiones como $\forall x_1 : x_1 * x_1^{-1} = e$

Se traducen al lenguaje L^G

$$(\forall x_1)\, A_1^2 (f_1^2 (x_1, f_1^1(x_1)), c_1)$$

La expresión $\forall x_1 x_2 x_3 \;\; (x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

se traduce???

Ejemplo 2: el lenguaje de los Grupos

Una grupo es un modelo (verifica) las siguientes fórmulas:

$$\forall xyz\ (x.y).z = x.(y.z)$$

$$\forall x\quad (x.e = x \wedge e.x = x)$$

$$\forall x\quad (x.x^{-1} = e \wedge x^{-1}.x = e)$$

Traducirlas al lenguaje formal $\mathbf{L^G}$