Lógica de predicados

Lógica de Predicados

LENGUAJE

- ***Sintaxis:*** fbfs del lenguaje, más rico que PROP
- ***Semántica:*** Cómo probar la veracidad de las fórmulas ??

RAZONAMIENTOS

- Justificación sintáctica (pruebas formales)

Lógica de predicados

Semántica

Semántica: Lógica de predicados

- ***Hasta aquí hemos definido un lenguaje formal (conjunto FORM), para estudiar razonamientos y definir la noción de consecuencia semántica, necesitamos definir en primer lugar que significan los símbolos del lenguaje (alfabeto)***

$\Downarrow$

INTERPRETACIÓN

$\Downarrow$

NOCIÓN DE VERDAD ???

Semántica: Lógica de predicados

Pregunta:

¿Cuando es válido un razonamiento?

¿Cuándo se cumple $\Gamma \models \varphi$?

¿ $P_1^1(f_1^2(x_1,x_2)), P_1^1(c_1) \models P_1^2(c_2, f_1^2(x_1,x_2))$?

➔ **depende de quiénes sean P_1^1, P_1^2, f_1^2, c_1, c_2**

Semántica: Lógica de predicados

Debemos ***interpretar*** los elementos del alfabeto en algún universo.

- Primero debemos saber **qué objetos representan los términos.**
- después, **cuales son las funciones y qué propiedades representan los predicados**,

$\Downarrow$

- y finalmente **podremos saber el valor de verdad de las fórmulas (por ahora, cerradas).**

Semántica: Lógica de predicados

Def Interpretación

Una interpretación I para *L* de alfabeto

$(A_1^1,.., A_n^l, f_1^2,..,f_i^j ,c_1, c_2)$ consiste en:

- **D^I ($|\mathcal{I}|$)** **Dominio de $\mathcal{I}$**
- **$c_1,..., c_2 \in D^I$** **elementos distinguidos**
- **f_i^j $D^I \times ... \times D^I \to D^I$** **funciones sobre D^I**
- **$A_n^I \subset D^I \times ... \times D^I$** **relaciones sobre D^I**

Ejemplo 1:

Sea el lenguaje L*, aritmética de los $\mathbb{N}$ con alfabeto

$$A_1^2, f_1^1, f_1^2, f_2^2, c_1$$

Interpretación N:

D^N es $\mathbb{N}_0$

$\underline{A}_1^2$ es =

$\underline{f}_1^1$ es S

$\underline{f}_1^2$ es +

$\underline{f}_2^2$ es *

c_1 es 0

Luego α: $(\forall x_1)((\forall x_2)(\exists x_3)\, A_1^2 (f_1^2 (x_1\ x_3), c_1\ )$

Ejemplo 1:

Luego α : $(\forall x_1)((\forall x_2)(\exists x_3) A_1^2 (f_1^2 (x_1\ x_3), x_2))$

se interpreta en N como:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}, \exists x_3 \in \mathbb{N} / x_1 + x_3 = x_2$

Tiene valor de verdad? Si, pues α es cerrada

$v^N(\alpha) = F$ (si $x_1 = 7$ y $x_2 = 5$ $\nexists x_3 \in \mathbb{N} / 7 + x_3 = 5$)

Ejemplo 2:

Otra interpretación del lenguaje L*

Interpretación I:

D^I **es** Q^+

$\underline{A}_1^2$ **es** $=$

$\underline{f}_1^1$ **es** $^{-1}$

$\underline{f}_1^2$ **es** $*$

$\underline{f}_2^2$ **es** $/$

c_1 **es 1**

Ejemplo 2:

Luego α : $(\forall x_1)((\forall x_2)(\exists x_3) A_1^2 (f_1^2 (x_1 x_3), x_2)$

se interpreta en I como:

$\forall x_1, x_2 \in Q^+ \exists x_3 \in Q^+ / x_1 * x_3 = x_2$

Tiene valor de verdad? Si, pues α es cerrada

$v^I(\alpha) = V$ (pues si $x_1, x_2 \in Q^+ \exists x_3 \in Q^+$ $x_3 = x_2 / x_1$)

$v^N(\alpha) = F$ y $v^I(\alpha) = V$

✓**El valor de verdad de α depende de la Interpretación**

Ejemplo 3:

Sea un lenguaje con alfabeto:

- $A_1^1\ A_1^2\ f_1^1\ f_1^2\ c_1,\ c_2$

  Podemos interpretar a los términos y fórmulas de este lenguaje en la interpretación **M tal:**

D^M **es Z**

$\underline{A}_1^1$ **es ¨ser primo¨,** $\underline{A}_1^2$ **es =**

$\underline{f}_1^1$ **es** $-$ $\quad$ $(\ \underline{f}_1^1(t) = -t\ )$

$\underline{f}_1^2$ **es +** $\quad$ $(\ \underline{f}_1^2(t_1,t_2) = \underline{t}_1 + \underline{t}_2\ )$

$\underline{c}_1$ **es 0,** $\underline{c}_2$ **es 1**

$$\alpha : (\exists x_1)\ A_1^2\ (f_1^1(x_1),\ x_1\ )$$

Se interpreta en M como: $\exists x_1 \in Z\ /\ \_ - x_1 = x_1$

$v^I(\alpha) = V$ **(pues** $\exists\ 0 \in Z\ /\ -0 = 0$ **)**

Semántica: Lógica de predicados

Def Interpretación

Formalizaremos la interpretación de términos cerrados:

- **Términos cerrados**
- **Fórmulas atómicas cerradas**
- **Fórmulas cerradas**

Primero lo vemos en el ejemplo de M:

1. **Interpretamos los <u>términos *cerrados*</u> de L(M): $\underline{t}^M \in Z$**

   – $\underline{c}_1 = 0$, $\underline{c}_2 = 1$

   – $\underline{f}_1{}^2(t_1,t_2) = \underline{t}_1 + \underline{t}_2$

   – $\underline{f}_1{}^1(t) = -(\underline{t})$

2. Interpretamos en M las <u>fórmulas atómicas</u> *cerradas* de L $(VL(\alpha)=\phi)$ $v^M(\alpha)\in\{V,F\}$

$$- \quad v^M(\underline{A}_1^2(t_1, t_2)) = \begin{cases} V \text{ si } \underline{t}_1^M = \underline{t}_2^M \\ F \text{ si } \underline{t}_1^M \neq \underline{t}_2^M \end{cases}$$

$$v^M(\underline{A}_1^2(t)) = \begin{cases} V \text{ si } t^M \text{ es primo} \\ F \text{ si } t^M \text{ no es primo} \end{cases}$$

3. Interpretamos el resto de las fórmulas cerradas

- $v^M(\alpha_1 \quad \alpha_2)$ --- *como en* PROP ---
- - $v^M(\neg\, \alpha_1)$ --- *como en* PROP ---

- $v^M((\forall x_i)\alpha) = V$

  si $v^M(\alpha[m/x_i]) = V$ para toda $m \in Z$
- $v^M((\exists x_i)\alpha) = V$

  si $v^M(\alpha[m/x_i]) = V$ para algún $m \in Z$

En general...

Sea un lenguaje con alfabeto:

$\mathbf{A}_{1}^{1} \ldots \mathbf{A}_{m}^{n}\ \mathbf{f}_{1}^{1} \ldots \mathbf{f}_{l}^{k}\ c_1,.,\ c_k$

Sea M una interpretación del tipo adecuado.

<u>Def</u> [interpretación de términos cerrados de Len M]

La interpretación de los términos cerrados de L en **M** es una función $\_^{\mathbf{M}}$: $\mathrm{TERM}_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{|M|}$ que satisface:

– $(c_i)^{\mathbf{M}} = \underline{c}_i$ para todo $i \in I$

– $(a)^{\mathbf{M}} = a$ para todo $a \in \mathbf{|M|}$

– $\mathbf{f}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{k}}(t_1,..,t_k)^{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{f}}_{\underline{\mathbf{l}}}^{\underline{\mathbf{k}}}(\underline{t}_1^{\mathbf{M}},..,\underline{t}_{\underline{k}}^{\mathbf{M}})$ para i = 1,..m

<u>Def</u> **[interpretación de sentencias de L en M]**

La interpretación de las fórmulas cerradas de L en **M** es una función $\mathbf{v^M}$**:** $FORM_{\mathbf{c}} \rightarrow \{V,F\}$ que satisface:

- $v^M(\mathbf{A_m^n}(t_1,..,t_n)) = \begin{cases} V \text{ si } <\underline{t}_1^{\mathbf{M}},..,\underline{t}_n^{\mathbf{M}}> \in \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} \\ F \text{ si } <t_1^{\mathbf{M}},..,t_n^{\mathbf{M}}> \notin \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} \end{cases}$

- $\mathbf{v^M(\alpha_1 \quad \alpha_2)}$ **,** $\mathbf{v^M(\neg \alpha_1)}$ **--- *como en* PROP ---**
- $\mathbf{v^M}((\forall \mathbf{x})\alpha)$ **= V si** $\mathbf{v^M(\alpha[m/x_i])}$**= V para toda** $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}$
- $\mathbf{v^M}((\exists \mathbf{x_i})\alpha)$ **= V si** $\mathbf{v^M(\alpha[m/x_i])}$**= V para algún** $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}$

<u>Notación</u>: M |= α **significa** $\mathbf{v^M(\alpha) = V}$

Semántica: Lógica de predicados

Hasta aqui tratamos las fórmulas cerradas

Dada una interpretación M para L

$\_^{\mathbf{M}}$**:** $\mathrm{TERM_C} \rightarrow |M|$

$\mathbf{v^M}$**:** $\mathrm{FORM_C} \rightarrow \{V,F\}$

$\mathbf{v^M(\alpha) = V}$

$\alpha \in \mathrm{FORM_C}$, **interpretación** M de L

$\mathbf{v^M(\alpha) = F}$

✔ **Respectivamente α es falsa en M sii $v^M(\alpha) = F$**

Semántica: Lógica de predicados

Hasta aqui tratamos las fórmulas cerradas

Sólo cuando se ha dado una Interpretación a los símbolos del alfabeto de L tiene sentido hablar del « *significado de las fórmulas* »

Que pasa con los otros elementos de FORM ?

Semántica: Lógica de predicados

Consideramos:

$\alpha \in$ FORM - FORM$_C$, **VL(α) ={x_1 x_2,.., x_K } y**
sea M **interpretación** de L

M $\models \alpha$???

Para poder dar la semántica de todos los elementos de FORM planteamos las siguientes definiciones

Def [clausura universal de una fórmula]

Sea $\alpha \in$ FORM, y sea $FV(\alpha) = \{z_1,..,z_k\}$.

Entonces $cl(\alpha)$ es la fórmula $(\forall z_1)..,(\forall z_k)\alpha$.

Def

Sea $\alpha \in$ FORM no cerrada.

Entonces **M** $\models \alpha$ (α **es verdadera en M)**

sii **M** $\models cl(\alpha)$ ($\mathbf{v^M}$ **(** $\mathbf{cl(}\alpha\mathbf{))}$ **= V)**

✔ **Respectivamente α es falsa en M sii $\mathbf{v^M}$ $\mathbf{(cl(}\alpha\mathbf{))}$ = F**

Semántica: Lógica de predicados

Consideramos:

$\alpha \in$ FORM, **sea** M **interpretación** de L

Cerrada $\rightarrow$ **sii $v^M(\alpha) = V$**

VL(α) = ϕ

M $\models \alpha$

No cerrada $\rightarrow$ sii **v^M (cl(α)) = V**

VL(α) $\neq \phi$

⇨ M es un modelo para α

Mas definiciones:

- ✓ Si $FV(\alpha) = \{x_1,..,x_k\}$ con $k>0$, decimos que v es una valoración de α si $\mathbf{v: \{x_1,..,x_k\} \rightarrow |M|^k}$

- ✓ α es satisfecha por una valoración v si

  $\mathbf{M} \models \alpha[v(x_1)..,v(x_k)/ x_1,..,x_k]$.

- ✓ En este caso, decimos que α es satisfactible en **M.**

- ✓ α es satisfactible si existe alguna interpretación **M** tal que α es satisfactible en **M**

Semántica: Lógica de predicados

Sólo cuando se ha dado una Interpretación a los símbolos de L tiene sentido hablar del

« *significado de las fórmulas* »

✓ Luego, sólo podremos considerar su valor de verdad (V, F) en el contexto de una interpretación.

Log. Proposicional	Log de Predicados
$\alpha \in$ **PROP**	$\alpha \in$ **FORM**
dada v,v(α) $\in$ {V,F}	**dada M, v^M (α) $\in$ {V,F}**
depende de v(pi)	**depende de M**
TAUTOLOGIAS	**???**

Mas definiciones:

- ✓ Sea $\alpha \in$ FORM, entonces **$\models \alpha$ (lógicamente válida - verdadera)** sii para toda interpretación **M**, **M** $\models \alpha$.

- ✓ Sea $\alpha \in$ FORM, entonces α **es contradictoria** si α es falsa en toda interpretación **M**

- ✓ Sea $\alpha \in FORM_C$, $\Gamma \subseteq FORM_C$.
  Entonces $\Gamma \models \alpha$ sii para toda interpretación **M**, si **M** $\models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$, entonces **M** $\models \alpha$

Nomenclatura

- si **M** $|= \alpha$ decimos que **M es modelo de** α

- si **M** $|= \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$ decimos que **M es modelo de** Γ

- si $\Gamma \models \alpha$ decimos que α **es consecuencia semántica de** Γ

⇨ **RAZONAMIENTOS**

Relación: Tautologías – Lógicamente válidas

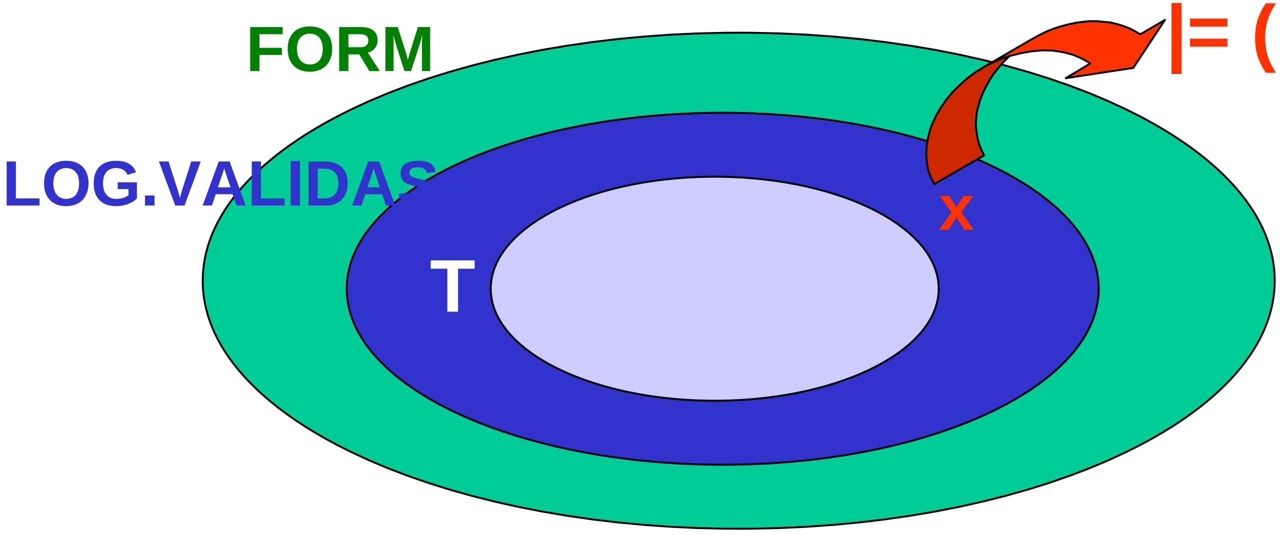
Formas tautológicas de PROP $\longrightarrow$ **Tautologías$_{FORM}$**

$(\ \alpha \vee \neg\alpha \quad \longrightarrow \quad A_m^n(t_1,..,t_n) \vee \neg A_m^n(t_1,..,t_n))$

Tautologías$_{FORM}$ $\subset$ **Log. Válidas**

$\neq$ **??** **Si**

$\models ((\forall x)\,\alpha \rightarrow (\exists x)\,\alpha)$



Ejemplo:

Sea el lenguaje L*, aritmética de los $\mathbb{N}$ con alfabeto

$A_1^2, f_1^1, f_1^2, f_2^2, c_1$

Interpretación N: D^N es $\mathbb{N}_0$ < =, S, +, *, 0 >

Dada α : $(\forall x_1)\, A_1^2 (f_1^2 (x_1\, x_2), c_1)$

$\mathbb{N} \models \alpha$?

$cl(\alpha) = (\forall x_2)(\forall x_1)\, A_1^2 (f_1^2 (x_1\, x_2), c_1)$

$\mathbb{N} \models cl(\alpha)$?

En $\mathbb{N}$: $\forall x_2, x_1 \in \mathbb{N},\ x_1 + x_2 = 0$ $\quad v^N(cl(\alpha)) = F$

Luego $\mathbb{N} \not\models \alpha$ **y por lo tanto** $\not\models \alpha$,

será contradicción ? Será satisfactible ?