# Formale Methoden: Projekt

## Machine Learning - Hidden Markov Model

Paul Pasler (Matr.Nr. 751325, huc)

# Machine Learning

- Künstliche Generierung von Wissen / Modellierung von Lernen
    - Klassifizierung anhand von Merkmalen
    - Erkennen durch Generalisierung
- Klassische Ausprägungen
    - Neuronale Netze
    - Support Vector Machine
    - k-Means
- **HMMs arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten**

# Zeit-diskreter Prozess

- Zustände eines System ändern sich immer im selben zeitlichen Abstand (Äquidistante Zeitabstände)
- Beispiel: Jede Sekunde wird ein Tick ausgelöst, welcher zu einer Zustandsänderung führt
- Gegenstück: Zeit-kontinuierlicher Prozess

# Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Drückt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A, unter Bedingung das vorher ein anderen Ereignisses B eingetreten ist

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

# Markov Kette: Beispiel „Wetter“

Vorhersage des Wetters

- Zustände S
- Übergangsmatrix A
- Anfangszustand Π

$$S = ['sunny', 'rainy']$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\Pi = x_0 = [1,0]$$


http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Markov_Chain_weather_model_matrix_as_a_graph.png

# Markov Kette: Beispiel „Wetter“

- Tag 1

$$X_1 = X_0 \cdot A = [1,0] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = [0.9, 0.1]$$

- Tag 2

$$X_2 = X_1 \cdot A = X_0 \cdot A^2 = [1,0] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^2 = [0.86, 0.14]$$

- Allgemein Tag k

$$X_k = X_{k-1} \cdot A = X_0 \cdot A^k = [1,0] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^k$$

# Markov-Kette

- Statistische Beschreibung von Zustands- / Symbolfolgen
- Kann als Zustandsgraph veranschaulicht werden
- Definiert durch:
  - Menge von Zuständen X
  - Übergangswahrscheinlichkeits-Matrix A
  - Anfangszustand Π

# Markov-Eigenschaft

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für den aktuellen Zustand, hängt **nicht** von allen Vorgängern ab

$$P(X_{t+1}=s_{t+1} \mid X_0=s_{0,} \ldots, X_{t-1}=s_{t-1}, X_t=s_t)$$

- Der Folgezustand hängt nur vom aktuellen Zustand ab (Gedächtnislos)

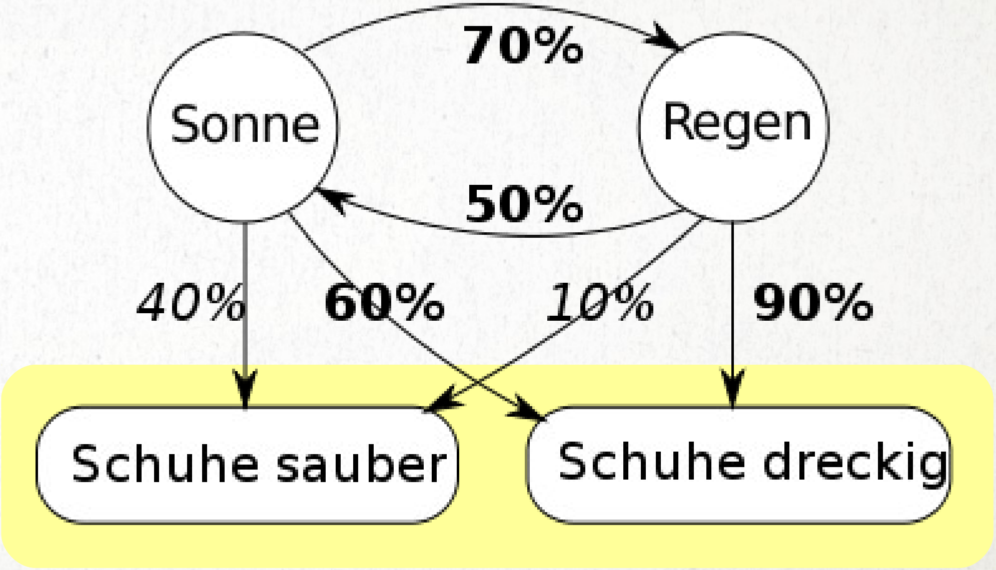
$$P(X_{t+1}=s_{t+1} \mid X_t=s_t)$$

# Hidden Markov Model: Beispiel „Gefangener im Verlies“

- Gefangener im Verlies möchte wissen, welches Wetter draußen ist
- Er kann den Himmel aber nicht sehen (x), jedoch sieht er die Schuhe der Wärter (y)
- Zudem weiß er,
  - wie wahrscheinlich Regen auf Sonne und
    Sonne auf Regen folgt (a)
  - wie wahrscheinlich das Wetter und
    die Schuhe der Wärter zusammenhängen (b)

# Hidden Markov Model: Beispiel „Gefangener im Verlies“

- Der Gefangene sieht nur die Schuhe der Wärter
- Der Gefangen kann Rückschlüsse auf das aktuelle Wetter ziehen, ohne den Himmel zu sehen.
- Zumindest welches Wetter am Wahrscheinlichsten ist




http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/d/dc/Hidden_markov_model.svg

# Hidden Markov Model: Beispiel „Spracherkennung“

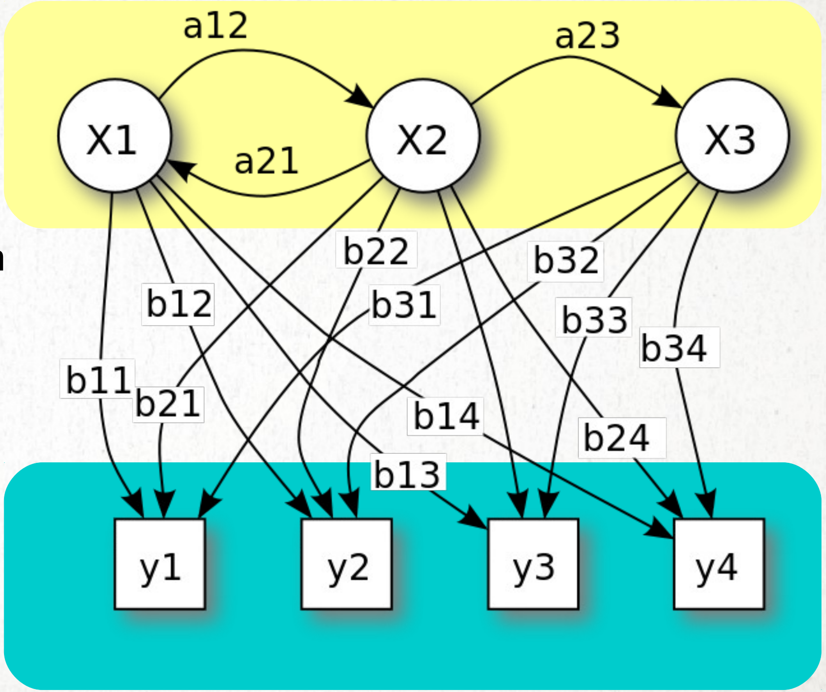
- Versteckte Zustände entsprechen gesprochenen Lauten (Phoneme)
- Silben oder Wörter sind die Beobachtungen
- Das HMM schließt aus einer Sequenz von Lauten auf eine Sequenz von Silben / Wörtern
- Das HMM passt sehr gut zur Vorstellung von Sprachsignalen als Abfolge einzelner Ereignisse

# Hidden Markov Model

- Ende der 60er Jahre von L.E. Baum entwickelt, Weiterentwicklung Lawrence R. Rabiner
- Ziel: Erkenntnisse über ein System gewinnen,
  ohne das genau Aussehen / Zuständen sehen zu könne
- Basiert auf der Markov-Kette [1] und beschreibt einen 2-stufigen stochastischen Prozess
- Einsatzgebiete
  - Sprach- / Gesten- und Schriferkennung
  - Computerlinguistik
  - Bioinformatik

# Hidden Markov Model

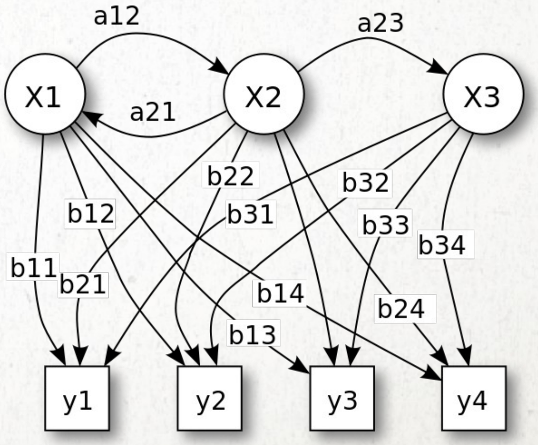
- Versteckter Teil (Gelb)
  - X: Versteckte Zustände
  - a: Übergangswahrscheinlichkeiten
- Sichtbarer Teil (Blau)
  - y: Beobachtungen (Emissionen)
  - b: Emissionswahrscheinlichkeiten



# Definition

- Erweiterung einer Markov-Kette um einen weiteren Zufallsprozess (2-Stufig)
- Zustände sind versteckt, nur Beobachtungen (= Observationen ) sind sichtbar
  - Das Ergebnis ist eine Observationsfolge

$$o \in Y \,;\, o = y_a, \ldots, y_z$$



# Definition

- Ein HMM ist vollständig definiert durch: $\lambda = (X; Y; A; B; \pi)$

- Endliche Menge an Zuständen $X = \{ x | 1 \leq x \leq N \}$

- Alphabet der Emissionen $Y = \{ y | 1 \leq y \leq M \}$

- Zustandsstartwahrscheinlichkeiten $\Pi = \{ \pi_i | \pi_i = P(X_1 = i) \}$

# Definition

- Ein HMM ist vollständig definiert durch: $\lambda = (X; Y; A; B; \pi)$
- Übergangswahrscheinlichkeiten $A = \{a_{ij} | a_{ij} = P(X_t = j | X_{t-1} = i)\}$
- Emissionsverteilung

  Diskreter Fall $B = \{b_{jk} | b_{jk} = P(Y_t = o_k | X_t = j)\}$

  Kontinuierlicher Fall $B = \{b_j(x) | b_j(x) = p(x | X_t = j)\}$

# Funktionsweise

Das Konzept des HMM lässt sich in drei größere Problemstellungen unterteilen

- Evaluierung
  Bestimme die Wahrscheinlichkeit für ein Model,
  mit der dieses eine gegebene Observationsfolge (o) erzeugt

- Dekodierung
  Finde interne Abläufe für eine gegebene Observationsfolge

- Training
  Finde Modellparameter für gegebene Beispieldaten

# Evaluierung

- Gegeben: HMM λ, Observationsfolge o
- Gesucht: Die (Produktions-) Wahrscheinlichkeit,
  mit der o in einer beliebigen Zustandsfolge generiert wird

$$p(o|\lambda) \Rightarrow \alpha_t(i) = P(o_{1,} o_{2,} \ldots, o_t, x_t = i|\lambda)$$

- Lösung: Der Forward-Algorithmus

# Forward-Algorithmus

Forward Variable

$$a_t(i) = P(o_{1,} \ldots, o_t; q_t = s_i | \lambda)$$

- Initialisierung

$$a_1(i) = \pi_i \cdot b_i(o_1)$$

- Rekursion

$$\alpha_{t+1}(j) = \sum_{i=1}^{|X|} \{\alpha_t(i) a_{ij}\} b_j(o_{t+1})$$

- Rekursionsabschluss

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{|X|} \alpha_t(i)$$

# Dekodierung

- Gegeben: HMM λ, Observationsfolge o
- Gesucht: Die wahrscheinlichste Zustandsfolge s*

$$\delta_t(i) = \max_{x_1,\ldots,x_t} \left( P\left(o_1,\ldots,o_t; x_1,\ldots,x_t = i \mid \lambda\right)\right)$$

- Lösung: Der Viterbi-Algorithmus

# Viterbi-Algorithmus

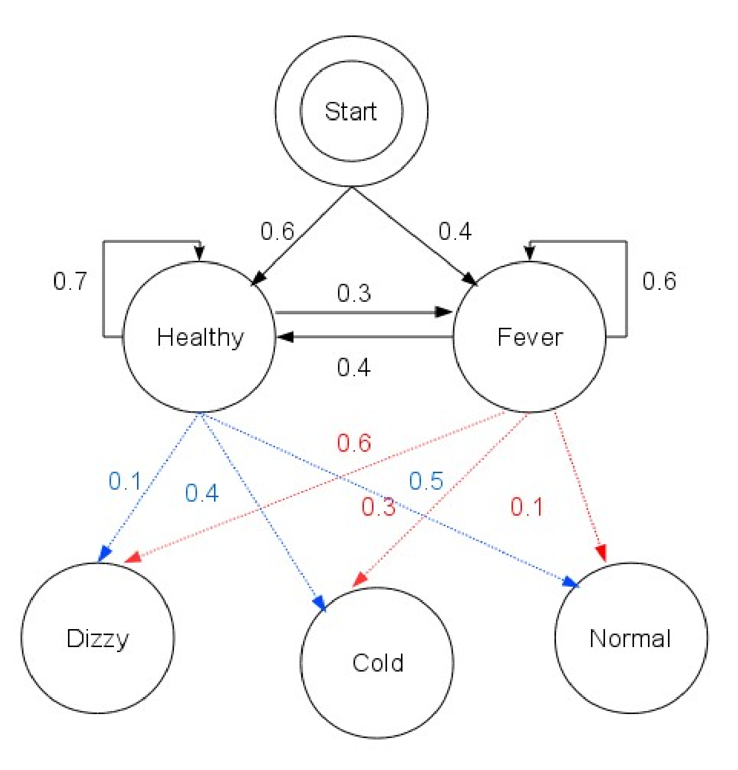
- Initialisierung
  - Max. Verbundwahrscheinlichkeit $\delta_1(i)=\pi_i \cdot b_i(o_1)$
  - Wegvaribale $\varphi_1(i)=0$
- Rekursion $\delta_{t+1}(j)=max(\delta_t(i)\,a_{ij})\cdot b_j(o_{t+1})$

  $\varphi_{t+1}(j)=argmax_i(\lambda_t(i)\,a_{ij})$
- Rekursionsabschluss $P^*(O|\lambda)=P(O,x^*|\lambda)=max_i \lambda_T(i)\,\alpha_T(i)$
- Rückverfolgung des Pfades $s_1^*=\varphi_{t+1}(s_{t+1}^*)$

# Viterbi-Algorithmus: Code Beispiel

- Dorfbewohner sind gesund oder haben Fieber
- Initialisierung

```
states = ('Healthy', 'Fever')

observations = ('normal', 'cold', 'dizzy')

start_probability = {'Healthy': 0.6, 'Fever': 0.4}

transition_probability = {
   'Healthy' : {'Healthy': 0.7, 'Fever': 0.3},
   'Fever' : {'Healthy': 0.4, 'Fever': 0.6}
   }

emission_probability = {
   'Healthy' : {'normal': 0.5, 'cold': 0.4, 'dizzy': 0.1},
   'Fever' : {'normal': 0.1, 'cold': 0.3, 'dizzy': 0.6}
   }
```




Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Viterbi_algorithm

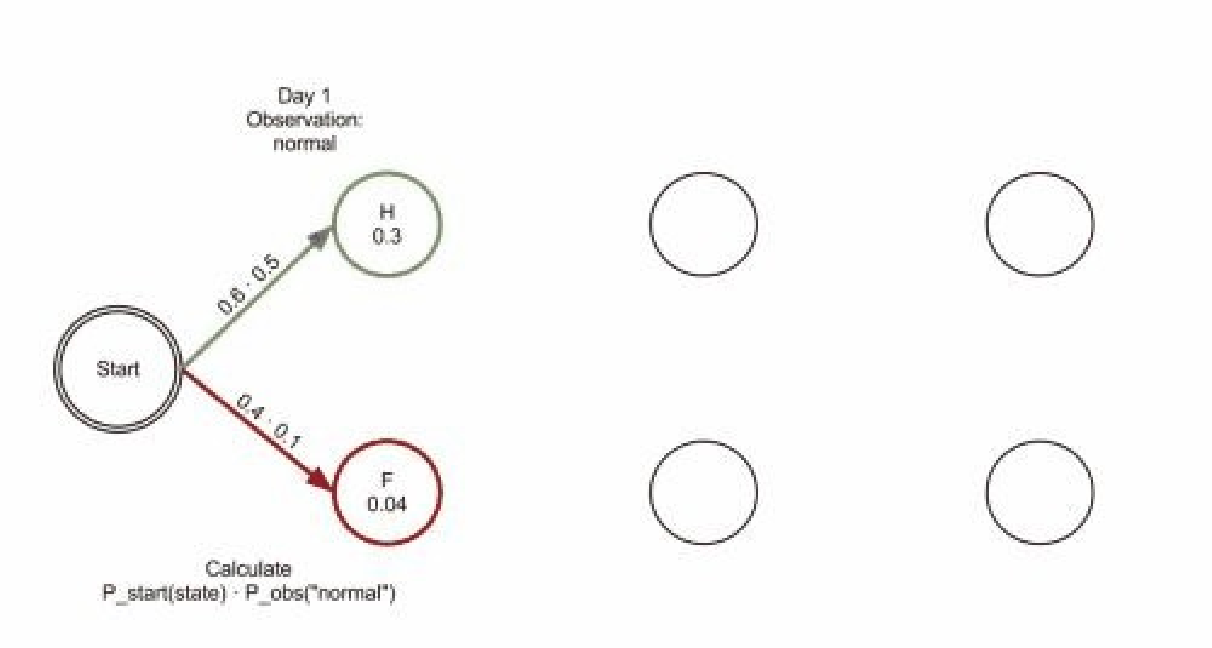
# Viterbi-Algorithmus: Code Beispiel

```
def viterbi(obs, states, start_p, trans_p, emit_p):
    V = [{}]
    path = {}

    # Initialize base cases (t == 0)
    for y in states:
        V[0][y] = start_p[y] * emit_p[y][obs[0]]
        path[y] = [y]

    # Run Viterbi for t > 0
    for t in range(1, len(obs)):
        V.append({})
        newpath = {}

        for y in states:
            (prob, state) = max((V[t-1][y0] * trans_p[y0][y] * emit_p[y][obs[t]], y0) for y0 in states)
            V[t][y] = prob
            newpath[y] = path[state] + [y]

        # Don't need to remember the old paths
        path = newpath
    n = 0           # if only one element is observed max is sought in the initialization values
    if len(obs) != 1:
        n = t
    print_dptable(V)
    (prob, state) = max((V[n][y], y) for y in states)
    return (prob, path[state])
```



Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Viterbi_algorithm

# Viterbi-Algorithmus: Animation



# Training

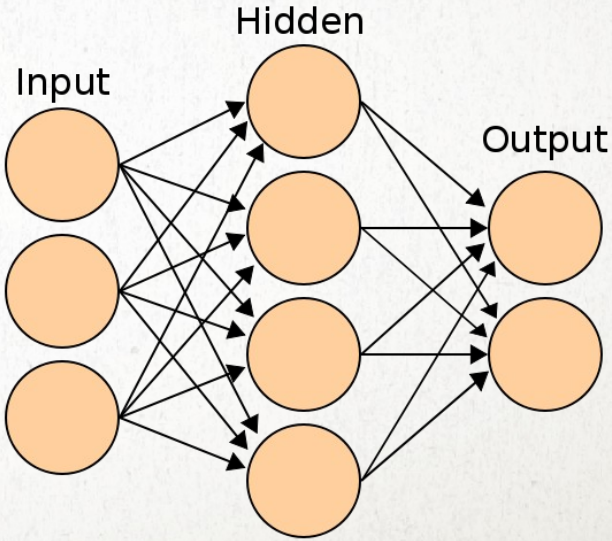
- Gegeben: Observationsfolgen(n) o
- Gesucht: Parameter eines HMM,
  die diese Ausgabe am wahrscheinlichsten erzeugen
- Lösung: Es existieren diverse Algorithmen
  - Der Baum-Welch-Algorithmus nutzt die
    Produktionswahrscheinlichkeit
  - Der Viterbi-Algorithmus / seqmental k-Means nutzen nur die
    Wahrscheinlichkeit der optimal Zustandsfolge

# Vergleich mit anderen Machine Learning Ansätzen

- Sehr viele Ansätze im Machine Learning Kontext
- Jedes Verfahren
  - wurde für einen speziellen Anwendungsfall entwickelt
  - hat unzählige Erweiterung, Algorithmen und Implementierungen
- Vergleiche sind daher schwierig und hängen von den Anforderungen ab

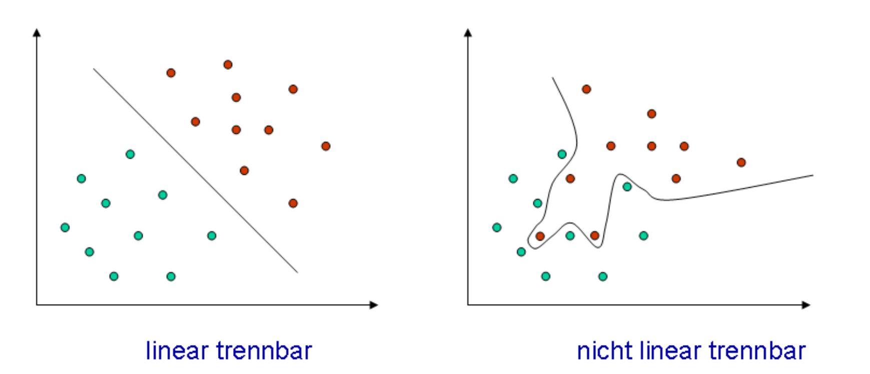
# Neuronale Netze

- Einfaches Modell des menschlichen Gehirns (Neuronen, Synapsen)
- Beim Training verändern sich Gewichte an den Synapsen
- Die Gewichte sind aber keine nachvollziehbaren Größen
- Benötigen sehr viele Trainingsdaten
- Nicht so gut für sequentielle Daten geeignet (HMM schon)
- Hybride mit dem HMM für die Spracherkennung
  (Jeder Zustand ist Eingang eines Neuron)



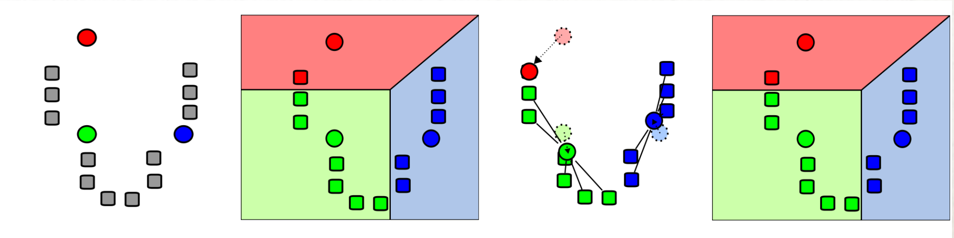
# Support Vector Machine

- SVM versuchen die Daten geometrisch zu trennen
- Gelingt keine lineare Trennung (häufig der Fall) wird der Kernel-Trick angewendet und die Daten in einen höher-dimensionalen Raum überführt
- Nicht für große Datenmengen geeignet (HMM ist schneller)
- Kann mit wenig Trainingsdaten arbeiten
- Auch hier Hybride mit dem HMM
  Variabilität mit HMM
  Akustische Komponente mit SVM



# k-Means

- k-Means versucht de Daten zu gruppieren / clustern (in „k“ Cluster)
- Die Clusterzentren werden zufällig in das Koordinatensystem eingefügt und bei jedem Schritt besser an die Daten angepasst
- Ansatz für unüberwachtes Lernen (Wie das HMM)
- Hybride für schreiberunabhängige Schrifterkennung



# Fazit

- Das HMM eignet sich besonders für die Verarbeitung von sequentiellen Daten
  - Durch das Verweilen in internen Zuständen kommt das HMM auch mit einem lang gezogen Laut klar
- Mathematisches Konzept gut erforscht und formal definiert
  - Parameter sind Wahrscheinlichkeiten und somit „verstehbar“
  - Vorwissen erforderlich, was den Einstieg u.U. erschwert
- Viele hybride Ansätze mit Stärken aus HMM und weiteren Algorithmen

# Quellen

[1] Andrei A. Markov, An Example of Statistical Investigation of the Text Eugene Onegin Concerning the Connection of Samples in Chains, trans. Classical Text in Translation. David Link, Science in Context 19.4 (2006): S. 591–600.

[2]Rabiner, L.R. (1989): „A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition“. In: Proc. IEEE. 77 (2), S. 257-286, DOI: 10.1109/5.18626.

[3] Blunsom, P. (2004): Hidden Markov Models.
http://digital.cs.usu.edu/~cyan/CS7960/hmm-tutorial.pdf

[4] Stephen Marsland. Machine Learning - An Algorithmic Perspective. Chapman I& Hall, 2009.

# Danke, noch Fragen?