СУГС „Раде Јовчевски – Корчагин“

СКОПЈЕ

Тејлорова и Меклоринова серија

-ПРОЕКТНА ЗАДАЧА ПО МАТЕМАТИКА-

Теза: Дадени функции можат да се претставаат како бескраен ред од членови, зависни од изводите на истата таа функција во дадена точка.

Ментор

Милена Божиновиќ - Петрушевска

Изработил

Павел Пауновски

Вовед

Тејлоровата серија, односно Тејлоровиот ред се користи за претставување на одредена функција $f(x)$ во вид на бескраен ред, односно во вид на степенски ред, каде што функцијата $f(x)$ се разгледува во определена точка (која мора да припаѓа во интервалот на конвергентност на редот). Постојат повеќе начини за претсавување на одредена функција $f(x)$ во вид на степенски ред, но општата формула за претставување на функција во вид на степенски ред ја дава англискиот математичар Брук Тејлор, а подоцна шкотскиот математичар Колин Меклорин ја упростува Тејлоровата формула со тоа што функцијата ја разгледува во нула.

Тејлоровата и Меклориновата формула има голема употреба во математичката анализа, но и во физиката како и во економијата и во сите останати математички сфери. Целта на оваа постапка е апроксимирање или целосен приказ на една функција во вид на степенски ред со што функцијата би се поедноставила за понатамошна анализа. Често користен метод е и Тејлоровиот полином, што во суштина е апроксимирање на дадена функција со конечен број на членови, чија цел е исто така нејзино поедноставување.

Можеби полиномските функции се едноставни за разбирање и анализирање, но сепак оние функции кои се покомплицирани како бескрајните полиноми и сложените функции не се очигледни. Затоа се користи претставување на функции како степенски ред, односно како општ начин на претставување се користи Тејлоровата формула. На овој начин Тејлоровата формула пронаоѓа голема примена во инженерските дисциплини, во применета математика, физика и многу други природно-математички области.

Општата формула на Тејлор е изразена како:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n}\right)$$

каде што $f^{(n)}$ е n-ти извод од функцијата $f(c)$, $n!$ е факториел од бројот n, c е точката во која функцијата се разгледува.

Меклорин нема посебна формула, впрочем неговиот бескраен ред се изразува преку Тејлоровата формула, но како што веќе споменав функцијата се разгледува во точката c=0.

Методи и техники

За да се разгледува, анализира и изучува Тејлоровата формула и Тејлоровиот ред потребни се предзнаења од основите на тригонометрија, алгебра, како и од основните техники на математичката анализа, но пред сѐ предзнаења за изводи.

Клучни и неопходни методи и техники за разбирање на Тејлоровата формула се:

1) Низи
2) Редови
3) Изводи

1) Низи

Како и во „обичниот“ јазик значењето на терминот низа е исто и во математичкиот јазик. Имено како што веќе знаеме, низа претставува подредување на елементи, членови по определено правило. Во овој случај ќе ги разгледуваме само низите од реални броеви, па според тоа може да ја дадеме дефиницијата за една математичка низа од реални броеви:

- *Секоја функција* $f: \mathrm{N} \to R$, *односно* $f(N)=R$, *од множеството на природните во множеството на реалните броеви се нарекува низа од реални броеви.*

$$f(1), f(2), f(3) \ldots, f(n)$$

$$a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$$

Броевите $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ се нарекуваат членови на низата, бројот a_n се нарекува општ член на низата, додека n го означува рангот на тој член во низата. Така во математиката за целосно да се определи една низа потребно е да се определи општиот член (a_n).

a) *Аритметичка прогресија*

- Аритметичка програсија се нарекува низата за која важи:

$$a_{n+1} - a_n = d, \forall\ n \epsilon N$$

- Општиот член се пресметува со формулата:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- Збирот на првите n членови на низата се пресметува со формулата:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

б) *Геометриска прогресија*

- Геометртиска програсија се нарекува низата за која важи:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \forall\ n \in N$$

- Општиот член се пресметува со формулата:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

- Збирот на првите n членови на низата се пресметува со формулата:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2) Редови

Редовите се многу блиски, сродни и сврзани со низите, имено за решавање на проблемите од доменот на редовите најчесто се користат низите:

Ако $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ -е низа од реални броеви, тогаш изразот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ –се нарекува броен ред претставен со општ член a_n.

Збировите $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; … ; $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ се нарекуваат парцијални суми на редот. Додека низата $\{S_n\}, n \in N$ се нарекува низа од парцијални суми на редот.

Ако низата од парцијални суми $\{S_n\}, n \in N$ на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, односно постои границата $\lim_{n \to \infty} S_n = S, \; -\infty < S < +\infty$, тогаш велиме дека и редот е конвергентен, бројот S се нарекува негов збир односно сума.

Постојат повеќе видови на редови:

- Геометриски ред
- Степенски ред
- Хармониски ред
- Алтернативен ред

но особено ќе се задржам на геометрискиот и степенскиот ред, поради тоа што е неопходно да се препознава и применува за разбирање на Тејлоровиот ред.

а) Геометриски ред

Геометриски ред е ред каде што количникот q е констатна функција зависна од индексот на редот. На пример:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n$$

Во зависност од вредноста на количникот q геометрискиот ред може да конвергира (0<q<1) или да дивергира (q≥1).

$$S_n = \frac{a}{1-q}$$

б) Степенски ред

Општата фрмула за степенски ред може да изгледа вака:

i. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = ¿ a_0 + a_1 (x-c) + a_2 ¿¿$

Секоја степенска серија може да се разгледува како функција

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

каде што доменот на функцијата f се сите вредности за x за кои редот е конвергентен.

Редот секогаш е конвергентен во точката c:

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c-c)^n = a_0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = a_0$$

И оттука следи дека c секогаш припаѓа во доменот на f односно $c \in D_f$.

За понатамошна примена и разбирање на степенскиот ред потребно е и да ја разгледуваме конвергентноста на редот центриран во точката c. Постојат три можни случаи на конвергентност на ваквиот ред:

i. Степенскиот ред да конвергира само во една точка, односно во точката c.

ii. Степенскиот ред апсолутно да конвергира за секој x.

iii. Степенскиот ред да конвергира во некој интервал центриран во точката c.

Каде што постои некое $R > 0$, редот конвергира во интервалот $|x-c| < R$и редот дивергира во интервалот $|x-c| > R$, може но и не мора да конвергира во крајните точки $x = c \pm R$.

R – радиус на конвергентност

Според ова, кога редот е конвергентен само во точката c радиусот $R = 0$, а кога редот е апсолутно конвергентен за секој x тогаш $R = \infty$.

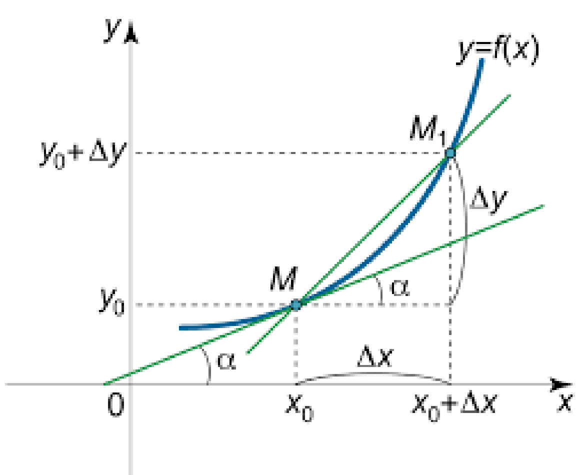
Интервал на конвергентност се нарекува множеството на сите вредности за x за кои редот конвергира.

Она што нас најмногу не интересира е поврзаноста на степенските редови и Тејлоровата формула. Всушност Тејлоровата формула е специјален вид на степенски ред, или уште поедноставно таа е општа формула за претставување на функции како степенски редови. Одредени аналитички функции можат да се претстават како степенски ред, но за тоа не е неопходна Тејлоровата формула особено за оние „очигледни“ пример задачи, но Тејлор создава нова формула, општа формула за претставување на оние аналитички функции во вид на степенски ред.

3) Изводи

- Што е извод?

  Во XVII век во математиката е додаден новиот поим – извод. Наједноставно објаснет изводот е „мерка“ за степенот на менување на едно нешто во однос на друго нешто. Изводот е најлесен за разбирање преку средната и моментна брзина и преку проблемот на тангентата, но поради проблематиката на темата на оваа проектна задача ќе се насочам повеќе кон проблемот на тангентата.
- Проблем на тангентата



Првично, треба да назначам дека - $\Delta y = y_1 - y_0$; $\Delta x = x_1 - x_0$, соодветно оттука следи дека - $\Delta y = \Delta f(x)$, што значи дека - $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, и одовде следува - $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Да разгледаме средната брзина на промена на функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[x_0, x_0 + \Delta x]$ како количник од растењето на функцијата во точката x_0[*] и соодветното растење Δx на променливата.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Објаснувањето на изводот преку овој „проблем на тангентата" следи од тоа што при објаснување на поимот извод на функција се користи график на функција како што е прикажан и на сликата. За да се побара извод во дадена точка $M(x_0, y_0)$ од функцијата треба да замислиме уште една точка $M_1(x_1, y_1)$ од функцијата, правата која ги поврзува овие две точки се нарекува секанта на кривата. Она што треба да се забележи е дека аголниот коефициент на секантата е еднаков на односот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Но секантата не е тангента на кривата во точката М. Затоа велиме кога точката M_1 тежнее кон точката M, односно уште поедноставно и посликовито кажано кога ќе замислиме дека точката M_1 беснокечно многу е близу до точката M тие речиси би се софпаднале односно би можело да се разгледуваат како една точка со што правата која минува низ нив две веќе би претставувала тангента на кривата во точката M. Сега малку постручно кажано:

Како што координатата x_1 на точката M_1 тежнее кон координатата x_0 на точката M и како што координатата y_1 на точката M_1 тежнее кон координатата y_0 на точката M, аголот ϑ кој го зафаќа секантата тежнее кон аголот α кој го зафаќа тангентата.

Оттука следува дека првиот извод на функцијата е еднаков на тангенсот од аголот кој го зафаќа тангентата во дадена точка M.

$$\lim_{M_1 \to M} tg\vartheta = ¿ \lim_{\Delta x \to 0} tg\vartheta = ¿ tg\alpha ¿¿$$

---

[*] На местото на $f(x_1)$ запишав $f(x_0+\Delta x)$ што произлегува од формулата погоре - $\Delta x = x_1 - x_0$ од која што произлегува - $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Аголен коефициент на права всушност е тангенс од остриот агол кој го зафаќа правата.

На скицата се земени точките M и M_1 како толку раздалечени сѐ со цел да се визуелизира полесно проблемот.

За подобар менаџмент на време и простор, односно поголема ефикасност Слика 2 ќе биде анализирана многу подетално од Слика 3, но истата појава се забележува и на Слика 3.

$$tg\vartheta=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- Извод по дефиниција

  Изводот по дефиниција се разгледува како гранична вредност на количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$кога$\Delta x\to 0$.Овој вид на гранични вредости се нарекуваат изводи на финкциите.

  Дефиниција:

Функцијата fе дефинирана во интервалот (a,b)и точката x_0е фиксна точка која припаѓа во интервалот на функцијата. Со Δxго бележиме растењето на аргументот на функцијата така што важи $x_0+\Delta x\in(a,b)$. Ако постои границата $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ тогаш таа се нарекува прв извод на функцијата, односно под извод на функцихата се смета граничната вредност на изразот:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Ознаки за извод може да бидат:

$$f^{'}(x),\frac{dy}{dx},\frac{df(x)}{dx},y^{'}$$

- Основни правила за изведување на функции
  1. Константи($2,-5,\pi,e,\sqrt{2}\ldots¿$

$$f(x)=c$$

$$f'(x)=0$$

2. Степени

$$f(x)=x^n, n\in R$$

$$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

3. Собирок/Разлика

$$f(x)=x^n-x^k+x^m, n,k,m\in R$$

$$f'(x)=n\cdot x^{n-1}-k\cdot x^{k-1}+m\cdot x^{m-1}$$

4. Тригонометриски функции

$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$	$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	$\frac{d}{dx}tg\, x=sec^2 x$
$\frac{d}{dx}csc\, x=-csc\, x\, ctg\, x$	$\frac{d}{dx}sec\, x=¿sec\, x\, tg\, x¿$	$\frac{d}{dx}ctg\, x=-csc^2 x$

5. Експоненцијални функции

$$\frac{d}{dx}k^x=k^x\cdot\ln k$$

6. Логаритамски функции

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

7. Множење

$$f(x)=p\cdot k$$

$$f'(x)=p'\cdot k+p\cdot k'$$

8. Делење

$$f(x)=\frac{p}{k}$$

$$f'(x)=\frac{p'\cdot k-p\cdot k'}{k^2}$$

9. Извод од сложена функција

$$y=f(g(x))$$

$$y' = f'(g(x) \cdot g'(x))$$

Резултати

Сега, откако се разјаснети општите поими потребни за разбирање на Тејлоровиот ред, може да се почне со изведување на Тејлоровата формула и објаснување на Тејлоровиот ред. Имено како што споменав и во објаснувањето на степенските редови Тејлоровата формула е општа формула за претставување на аналитички функции како бескрајни полиноми односно како бескраен степенски ред, но сепак треба да се нагласи дека има и други начини за постигнување на истата цел.

Пример 1: Претставување на функција преку спетенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$$

Сега со помош на овој израз ќе се дојде до решение на друг вид задачи:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x^{2n})$$

Со увидување на корисноста на претставувањето на функциите во вид на степенски ред, неизбежна била потребата за пронаоѓање на „општа“ формула за нивно претсавување. Тука голема улога има англискиот математичар Тејлор кој ја изведува општата формула за претставување на функции во вид на степенски ред, подоцна во негова чест таа го добива неговото име - Тејлорова формула.

Изведување на Тејлоровата формула:

Да започнеме од еден од основните видови на степенски ред:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + a_5(x-c)^5 \ldots$$

Она што Тејлор го забележува е фактот дека може да се изведе општа формула за изразување на општиот член a_n преку изводи. Како што спомнав во делот од методи и техники во подточката изводи, извод од константа е секогаш еднаков на нула, оттука следува дека со помош на првиот извод од функцијата $f(x)$ првиот член од бесконечниот полином a_0 ќе се изгуби, па со вториот извод истото ќе се случи со вториот член итн. сега со следниот пример ќе се забележи една интересна шема која се повторува.

$$f'(x)=0+a_1+2\cdot a_2(x-c)+3\cdot a_3(x-c)^2+4\cdot a_4(x-c)^3+5\cdot a_5(x-c)^4\ldots$$

$$f''(x)=0+0+2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-c)^1+4\cdot 3\cdot a_4(x-c)^2+5\cdot 4\cdot a_5(x-c)^3\ldots$$

$$f'''(x)=0+0+0+3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4(x-c)^1+5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5(x-c)^2\ldots$$

Оваа шема ќе продолжи да се повторува и понатаму, но она што Тејлор го увидел било вметнувањето на вредоста на точката cво која се разгледува функцијата $f(x)$, на тој начин ќе се добие вредноста на општиот член.

$$f'''(c)=0+0+0+3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+4\cdot 3\cdot 2\cdot a_4(c-c)^1+5\cdot 4\cdot 3\cdot a_5(c-c)^2\ldots$$

$$f'''(c)=0+0+0+3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+0+0+\ldots$$

$$f'''(c)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3$$

$$a_3=\frac{f'''(c)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{f'''(c)}{3!}$$

И сега за да се добие општата формула за наоѓање на општиот член a_n со продолжување на постапката се доаѓа до формулата за општиот член:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Одовде со замена на општиот член следи Тејлоровата формула:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n=¿\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n¿$$

Како што нагласив и во воведот, Меклориновиот ред ја користи истата формула само што функцијата се разгледува во точката $c=0$.

Пример задачи

Пример 1: Најди го Тејлоровиот ред за $f(x)=\ln x$ центриран во точката $c=1$.

$$f(x)=\ln x;f'(x)=\frac{1}{x};f''(x)=\frac{-1}{x^2};f'''(x)=\frac{2}{x^3};f^{(4)}(x)=\frac{-6}{x^4};\ldots$$

$$f(1)=0;f'(1)=1;f''(1)=-1;f'''(1)=2;f^{(4)}(1)=-6;\ldots$$

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(c)(x-c)^4}{4!}+\ldots$$

$$\ln x=0+(x-1)+\frac{(-1)(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{(-6)(x-1)^4}{4!}+\ldots$$

$$\ln x=\frac{(x-1)^1}{1}+\frac{(-1)(x-1)^2}{2\cdot 1}+\frac{2(x-1)^3}{3\cdot 2\cdot 1}+\frac{(-6)(x-1)^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\ldots$$

$$\ln x=\frac{(x-1)^1}{1}+\frac{(-1)(x-1)^2}{2\cdot 1}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 1}+\frac{(-1)(x-1)^4}{4\cdot 1}+\ldots$$

$$\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot(-1)^n$$

Пример 2: Најди го Тејлоровиот ред за $f(x)=e^x$ центриран во точката $c=3$.

$$f(x)=e^x;f'(x)=e^x;f''(x)=e^x;f'''(x)=e^x;f^{(4)}(x)=e^x;\ldots$$

$$f(3)=e^3;\ f'(x)=e^3;f''(x)=e^3;f'''(x)=e^3;f^{(4)}(x)=e^3;\ldots$$

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(c)(x-c)^4}{4!}+\ldots$$

Слика 1: Графички приказ на Тејлоровиот полином за f(x)=e^x центриран во c=3

Пример 3: Определи го Меклориновиот ред за функцијата $\sin x$.

$$f(x)=\sin x; f'(x)=\cos x; f''(x)=-\sin x; f'''(x)=-\cos x; f^{(4)}(x)=\sin x; \ldots$$

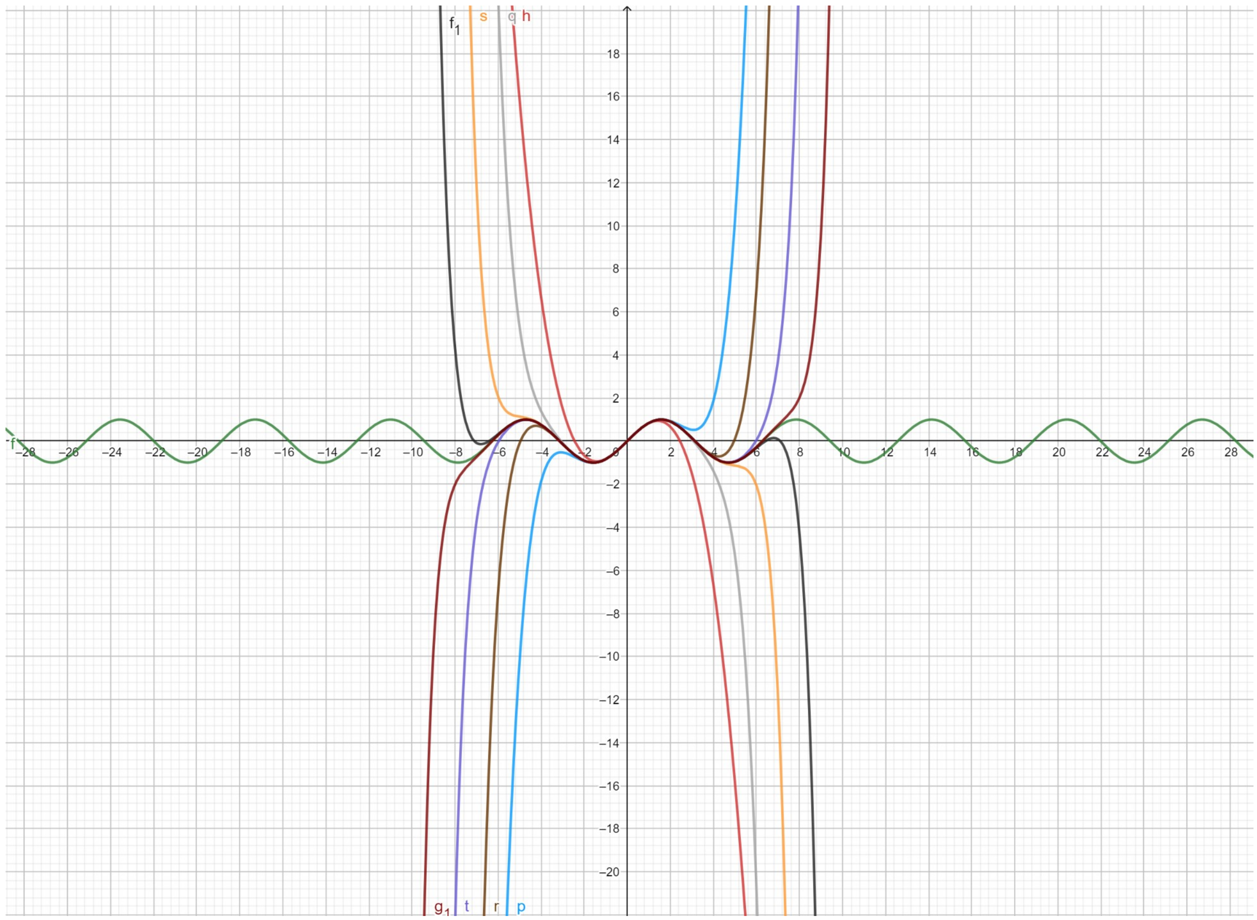
$$f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=0; f'''(0)=-1; f^{(4)}(0)=0; \ldots$$

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(c)(x-c)^4}{4!}+\ldots$$

$$f(x)=\sin x=0+1\cdot(x-0)+\frac{0\cdot(x-0)^2}{2!}+\frac{(-1)\cdot(x-0)^3}{3!}+\frac{0\cdot(x-0)^4}{4!}+\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot(-1)^n$$



Слика 2: Графички приказ на Тејлоровиот полином за sin(x)

Пример 4: Определи го Меклориновиот ред за функцијата $\cos x$.

$$f(x)=\cos x\,; f'(x)=-\sin x\,; f''(x)=-\cos x\,; f'''(x)=\sin x\,; f^{(4)}(x)=\cos x\,;\ldots$$

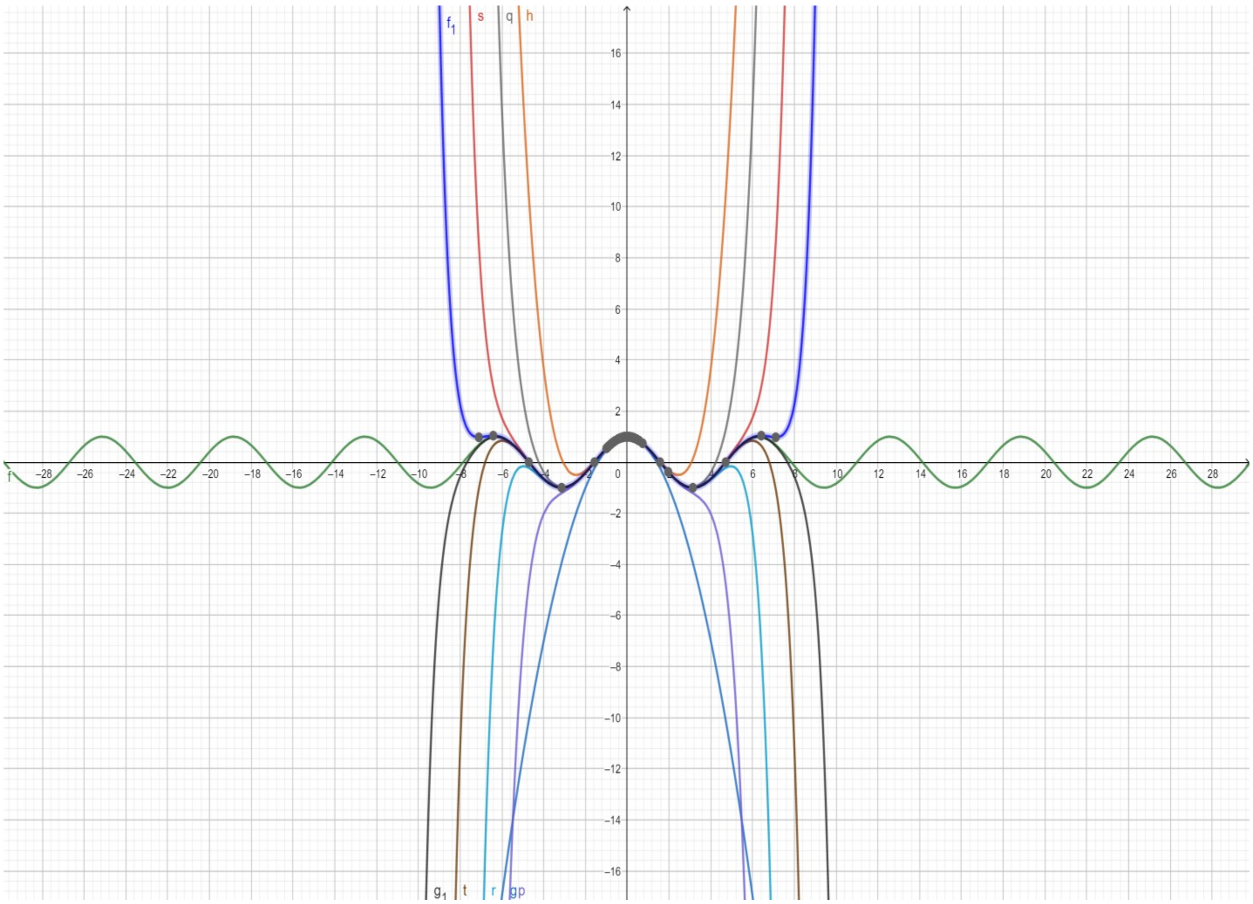
$$f(0)=1; f'(0)=0; f''(0)=-1; f'''(0)=0; f^{(4)}(0)=1;\ldots$$

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)(x-c)^2}{2!}+\frac{f'''(c)(x-c)^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(c)(x-c)^4}{4!}+\ldots$$

$$f(x)=\sin x=1+0\cdot(x-0)+\frac{(-1)\cdot(x-0)^2}{2!}+\frac{0\cdot(x-0)^3}{3!}+\frac{1\cdot(x-0)^4}{4!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$$

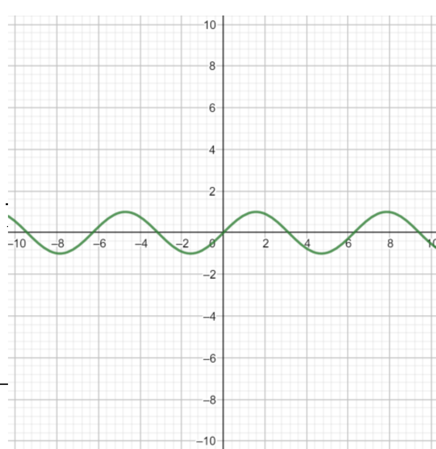
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}\cdot(-1)^n$$



Слика 3: Графички приказ на Тејлоровиот полином за cos(x)

Дискусија

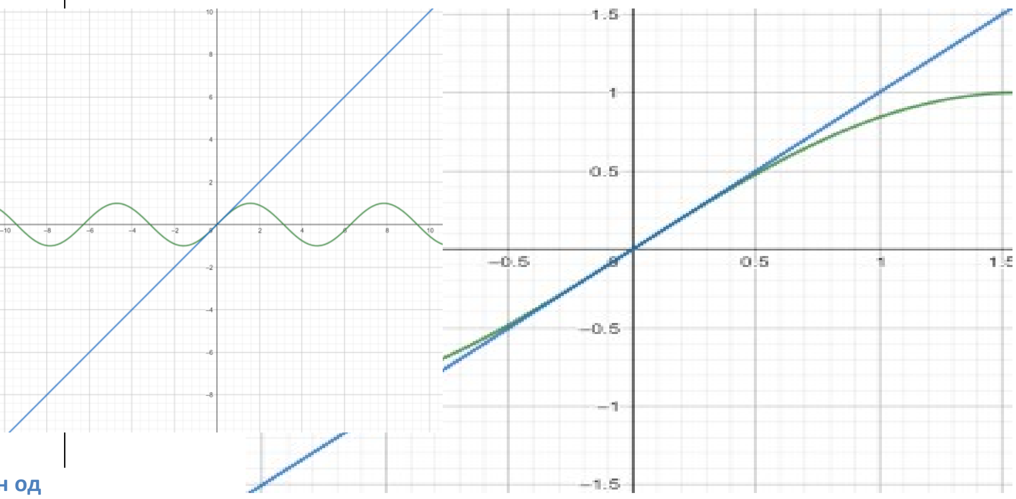
Во горенаведените слики се прикажани графици на кои се претставени функциите $\sin x$ и $\cos x$ и токму овие примери се одлични за визуелизација на целта на Тејлоровиот полином односно ред. Имено, како што споменав погоре, целта на Тејлоровиот ред е приказ на дадена функција во вид на бесконечен полином, или во скратен запис како бескраен степенски ред. Оваа способност на Тејлоровиот ред може одлично да се забележи на Слика 1 и Слика 2. Во овој дел ќе ја анализирам и ќе дискутирам за Слика 2.[†]



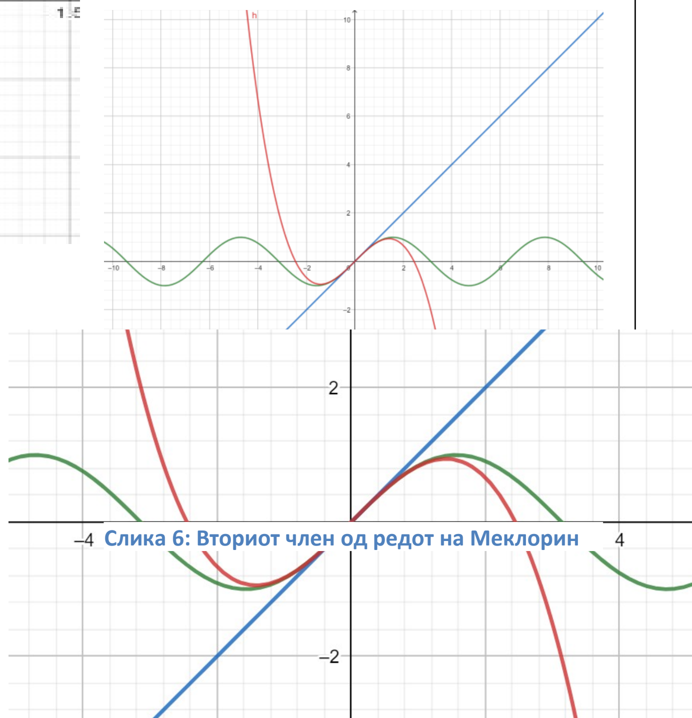
Слика 2: На оваа слика е прикажан графикот на синусната функција која е обележана со зелена боја.

x_0 е зададено како: $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

Потоа се додава функцијата $f(x)=x$, и при зумирање на графикот може да се забележи дека графикот на $\sin x$ и графикот на $f(x)=x$, за многу мали вредности на x ќе бидат приближно исти.



Потоа ако го скицираме графикот на функцијата



Слика 6: Вториот член од редот на Меклорин

$f(x)=x-\frac{x^3}{3!}$ Тогаш ќе ја забележиме истата појава на „слепување“ на новата функција со синусната функција. Сега кога ќе зумираме поблиску во сликата од графикот ќе забележиме дека оваа функција $f(x)=x-\frac{x^3}{3!}$ се поклопува, односно е приближно иста со првичната функција за вредности малку поголеми од претходниот пример.

Она што треба да се забележи е дека функцијата од Тејлоровиот полином за функцијата $\sin x$, за секој нареден член на редот функцијата сѐ повеќе и повеќе се прилепува за оригиналната функција, односно таа за сè поголеми вредности дава исти резултат. На сликите се прикажани овие прилепувања на функцијата по Тејлоровиот полином до вториот член, но доколку се продолжи со истата постапка евентуално ќе се добие функција која целосно ќе се совпадне со функцијата $\sin x$.

Резиме

Да резимирам. Тејлоровиот ред претставува степенски ред за создавање на бескраен полином кој пак скратено може да се запише во форма на бескраен степенски ред и неговата примарна функција е апроксимирање на сложени функции сè со цел полесно анализирање или користење на истите функции. Општата формула за ваквото претставување на функциите се нарекува Тејлорова формула, а истат формула се користи и за добивање на Меклориновиот ред кој се разликува од Тејлоровиот ред само по тоа што функцијата во Меклориновиот ред е разгледувана во нула. Тејлоровиот и Меклориновиот ред имаат огромна примена во математичките сфери како во физиката така и во економската математика па дури и во хемијата. На пример, во физиката Тејлоровиот ред меѓудругото се користи при проверка и тестирање на издржливоста на автомобилите при судар, инженерите пробуваат приближно да претпостават како автомобилот би се издеформирал од сударот со цел да ја максимизираат неговата безбедност за корисниците. Друг пример исто така од инженерската сфера е апроксимацијата на аеродинамичноста на автомобилите, авионите и другите превозни средства итн.

Она што мене ме натера да истражувам за оваа тема беше љубопитноста за метеријалите кои ги изучував во училиште, па така пребарувајќи и истражувајќи за тие теми наидов и на Тејлоровиот ред кој пак ми го привлече вниманието поради практичната примената и вклопувањето на работите кои дотогаш ги изучував на училиште. Ова самостојно истражување за Тејлоровиот и Меклориновиот ред ми претставуваше еден предизвик кој ме принуди да размислувам аналитички и логички со што би можел да ги применам моите дотогашни знаења за разбирање на сосема нов математички поим. Ова мое истражување е себе воведување во интересниот и комплексен свет на калкулусот и се надевам дека во иднина ќе имам можност за унапредување на моите знаења и истражување на нови и уште покомплицирани теми од математиката.

Користена литература

1. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis. Calculus, *Early Transcendentals.* 10th ed. USA: Anton Textbooks, Inc., 2012.

2. Feras A. Mahmoud. Calculus II : For Science and Engineering, *Lecture Notes for Calculus 102*. Amman: Department of Basic Sciences Philadelphia University, 2014.

3. Ристо Малчески. Математичка анализа I. Скопје: Армаганка, 2019.

4. https://www.youtube.com/watch?v=eX1hvWxmJVE&t=611s&ab_channel=ZachStar

5. https://www.youtube.com/watch?v=3d6DsjIBzJ4&ab_channel=3Blue1Brown

6. https://www.youtube.com/watch?v=0WHThuWxwx0&ab_channel=blackpenredpen

7. https://www.youtube.com/watch?v=LDBnS4c7YbA&ab_channel=TheOrganicChemistryTutor

8. Тренчевски, Костадин и други. Матматичка Анализа, за IV година нареформинано гимназиско образование (изборен предмет). Скопје: Просветно Дело, 2018.

9. Митевска, Јорданка и други. Математика, за IV година на реформирано гимназиско образование, II издание. Скопје: Просветно дело, 2009.

10. https://www.math24.net/tangent-normal-lines/