Facultad de Ingeniería | Universidad de Buenos Aires

1er. Cuatrimestre | 2023

95.10 | Modelación numérica
75.12 | Análisis numérico I A
95.13 | Métodos matemáticos y numéricos

Trabajo Práctico #2

Elástica de una viga

Descripción del problema

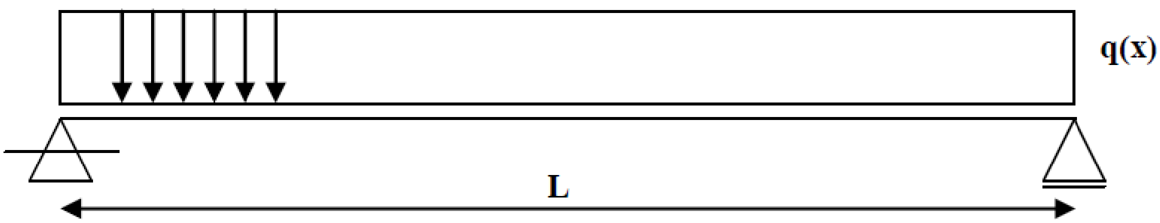
En general, en el marco del diseño estructural, resulta útil considerar la forma flexionada de una viga al cargarla, con el objetivo de corroborar dimensionados. El diagrama de deflexión en el eje longitudinal de una viga se denomina curva elástica. La determinación de la curva elástica de una viga cargada resulta un problema habitual de la ingeniería civil.

La formulación matemática de este problema (modelo matemático), es la ecuación de la curva elástica que es una ecuación diferencial que resuelve el campo de desplazamientos que sufre el eje de la viga desde su forma recta original a la forma deformada final. Para una viga de material elástico lineal sometido a pequeñas deformaciones la ecuación diferencial de la elástica viene dada por esta ecuación:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x)$$

siendo E el módulo de Young, I el momento de inercia y q(x) la carga aplicada sobre la viga.

La resolución numérica de esta ecuación diferencial (modelo numérico) puede realizarse mediante la aplicación de diferencias finitas discretizando el dominio, que en este caso consiste en la longitud total de la viga.



Para el caso de una viga simplemente apoyada, como se muestra en la figura, las condiciones de borde de la ecuación diferencial son:

$$v(o) = 0 \qquad\qquad \frac{d^2v}{dx^2}(x = o) = 0$$

$$v(L) = 0 \qquad\qquad \frac{d^2v}{dx^2}(x = L) = 0$$

La aplicación del método de diferencias finitas para la resolución de esta ecuación diferencial con las condiciones de borde indicadas, implica la resolución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con n+1 incógnitas. La construcción de ese sistema se detalla a continuación:

$$i = 0 \quad \mathrm{u}_0 = 0$$

$$i = 1 \quad -4\mathrm{u}_0 + 5\mathrm{u}_1 - 4\mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_3 = \mathrm{f}_1$$

$$1 < i < n - 1 \quad \mathrm{u}_{i-2} - 4\mathrm{u}_{i-1} + 6\mathrm{u}_i - 4\mathrm{u}_{i+1} + \mathrm{u}_{i+2} = \mathrm{f}_i$$

$$i = n - 1 \quad \mathrm{u}_{n-3} - 4\mathrm{u}_{n-2} + 5\mathrm{u}_{n-1} - 4\mathrm{u}_n = \mathrm{f}_{n-1}$$

$$i = 1 \quad \mathrm{u}_n = 0$$

donde $f_i = \frac{q(x_i)}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{L}{n}\right)^4$ y $x_i = i \cdot L/n$.

Descripción de tareas

a) Armar el sistema de ecuaciones lineales a resolver para n=10, n=50 y n=100. Utilizar como función de carga la siguiente expresión: $q(x_i) = 2 + 4 \cdot (x - x^2)$.

b) Resolver el sistema para las tres discretizaciones propuestas utilizando los siguientes métodos de resolución:

1) Eliminación Gaussiana.
2) Jacobi
3) Gauss-Seidel

Comparar resultados. Calcular el costo computacional de cada simulación. Utilizar L=1 y EI=1. Para los métodos indirectos, considerar una precisión relativa RTOL=0.01.

Nota: Hasta este punto, como mínimo, se debe avanzar para la pre entrega del TP.

c) Realizar ensayos de sensibilidad a cambios en las características de la viga EI (plantear dos alternativas al valor predeterminado).

d) Para el caso del método indirecto, calcular experimentalmente el orden de convergencia para cada discretización utilizando la expresión $\|\varepsilon^{k+1}\|/\|\varepsilon^k\|^p = \lambda$, siendo p el orden de convergencia y λ la constante asintótica del error.