INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

Einführung in die Programmierung

AVL Bäume

Wiederholung: Bäume

Ein grundlegendes Problem

- Speicherung von Datensätzen
- Listen oft nicht ausreichend, da O(n) zu langsam ist

Beispiel

- Stammbaum
- Dateisysteme
- Entscheidungsbäume
- Suchbäume, z.B. für Lexika Daten
- Rekursionsbäume

Anforderungen

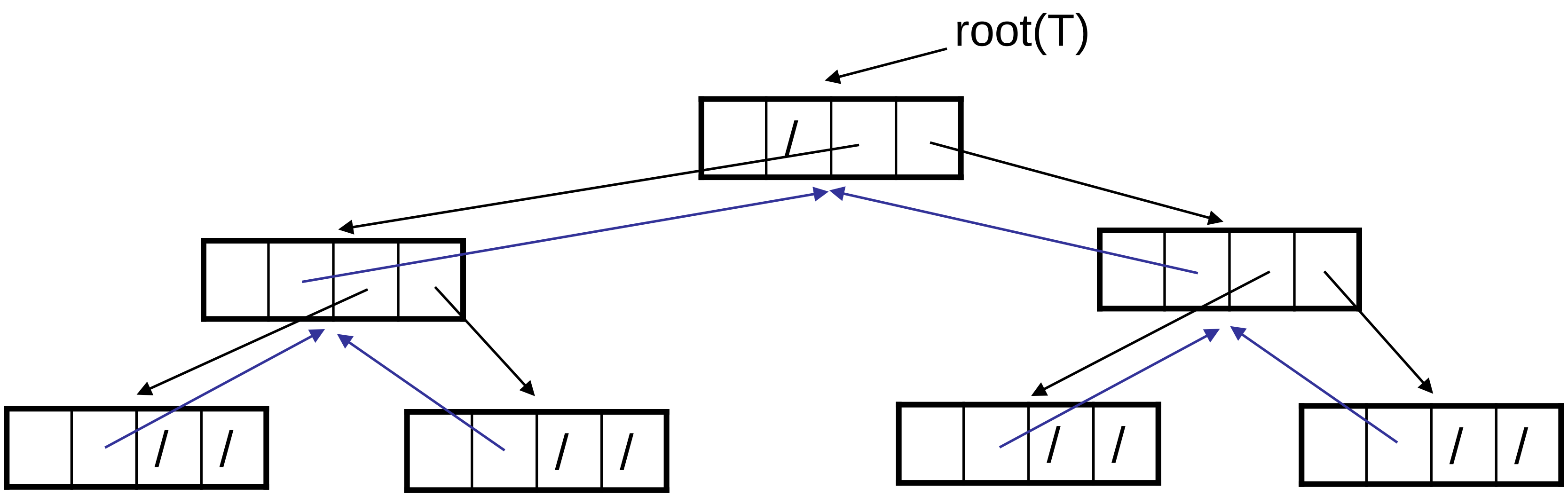
- Schneller Zugriff, d.h. schneller als O(n)
- Einfügen neuer Datensätze
- Löschen bestehender Datensätze

Wiederholung: Binärbaum

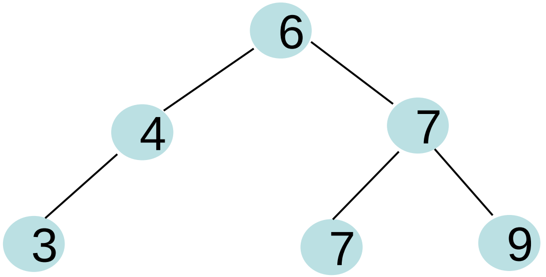
Binärbäume (Darstellung im Rechner)

- Schlüssel key und ggf. weitere Daten
- Zeiger lc(v) (rc(v)) auf linkes (rechtes) Kind von v
- Vaterzeiger p(v) auf Vater von v (blau)
- Wurzelzeiger root(T) auf die Wurzel des Baums T

key	p(v)	lc(v)	rc(v)



Wiederholung: Binäre Suchbäume



Binäre Suchbäume

- Verwende Binärbaum
- Speichere Schlüssel „geordnet“

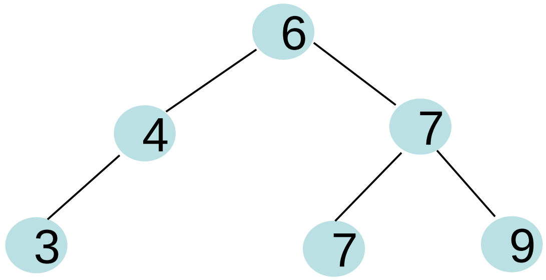
Binäre Suchbaumeigenschaft:

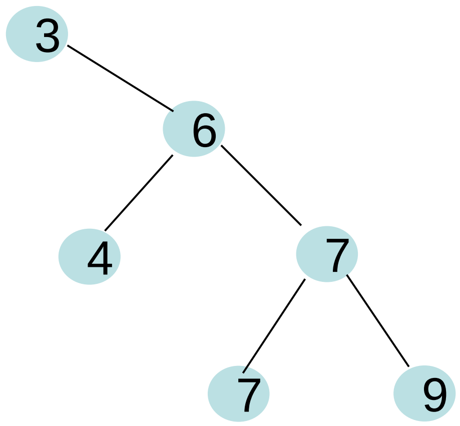
- Sei x Knoten im binären Suchbaum
- Ist y Knoten im linken Unterbaum von x, dann gilt **key(y) ≤ key(x)**
- Ist y Knoten im rechten Unterbaum von x, dann gilt **key(y) > key(x)**

Wiederholung: Binäre Suchbäume

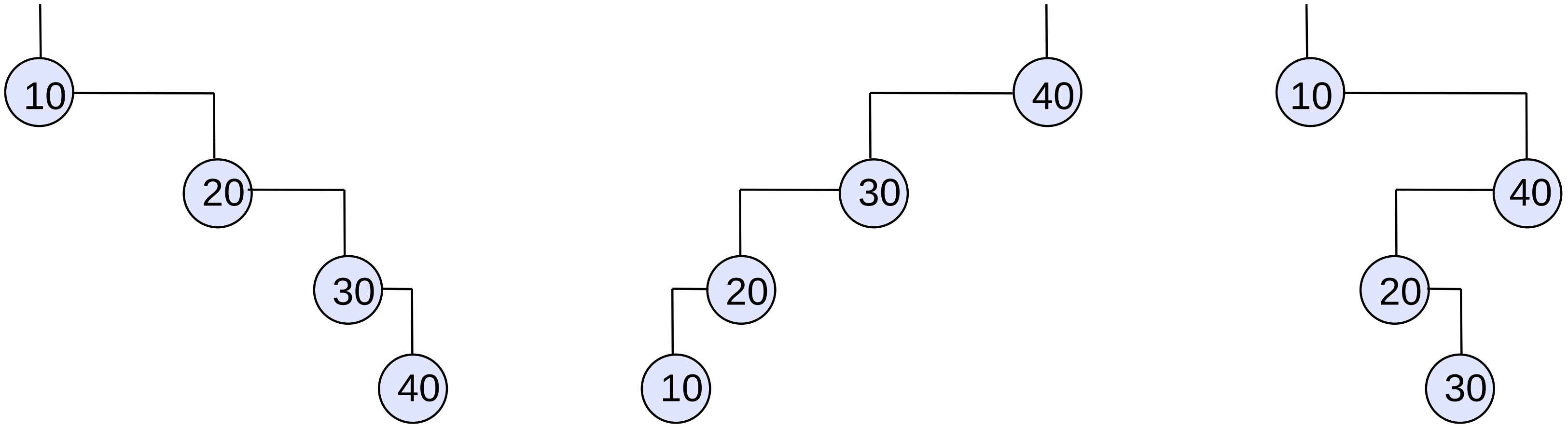
Unterschiedliche Suchbäume

- Schlüsselmenge 3,4,6,7,7,9
- Wir erlauben mehrfache Vorkommen desselben Schlüssels





Problem – Degenerierte Suchbäume



- Komplexität der Operationen hängt von der Höhe der Bäume ab
- Problem: Degenerierte Bäume haben eine Höhe h = O(n)

Lösung – Balancierte Suchbäume

- Ziel: Sicherstellen dass die Höhe der Teilbäume ungefähr gleich ist
- Resultat: Höhe des Baumes: O(log n)

- Wie: Rotation

Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation

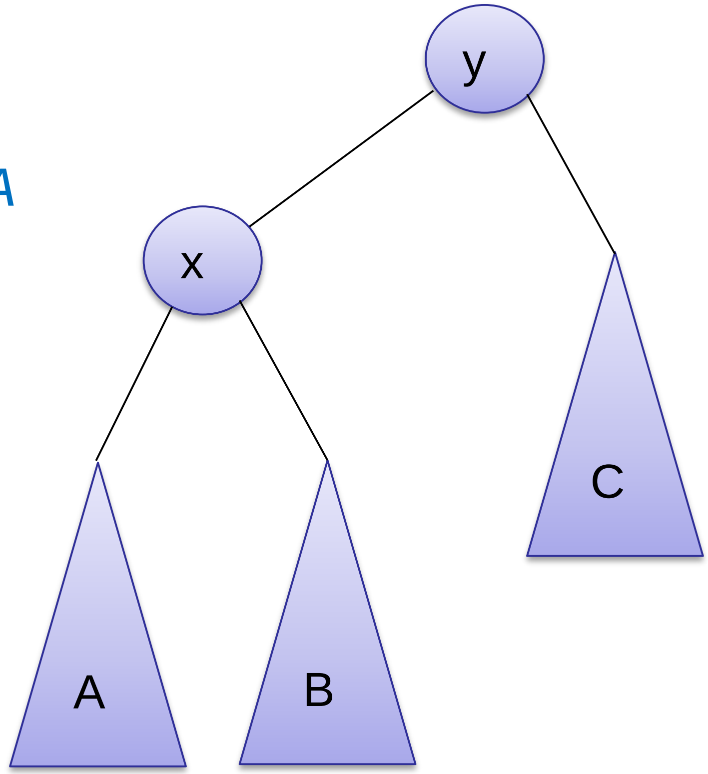
Gegeben folgender Baum

Aufgabe:

Einfügen von a in Teilbaum A

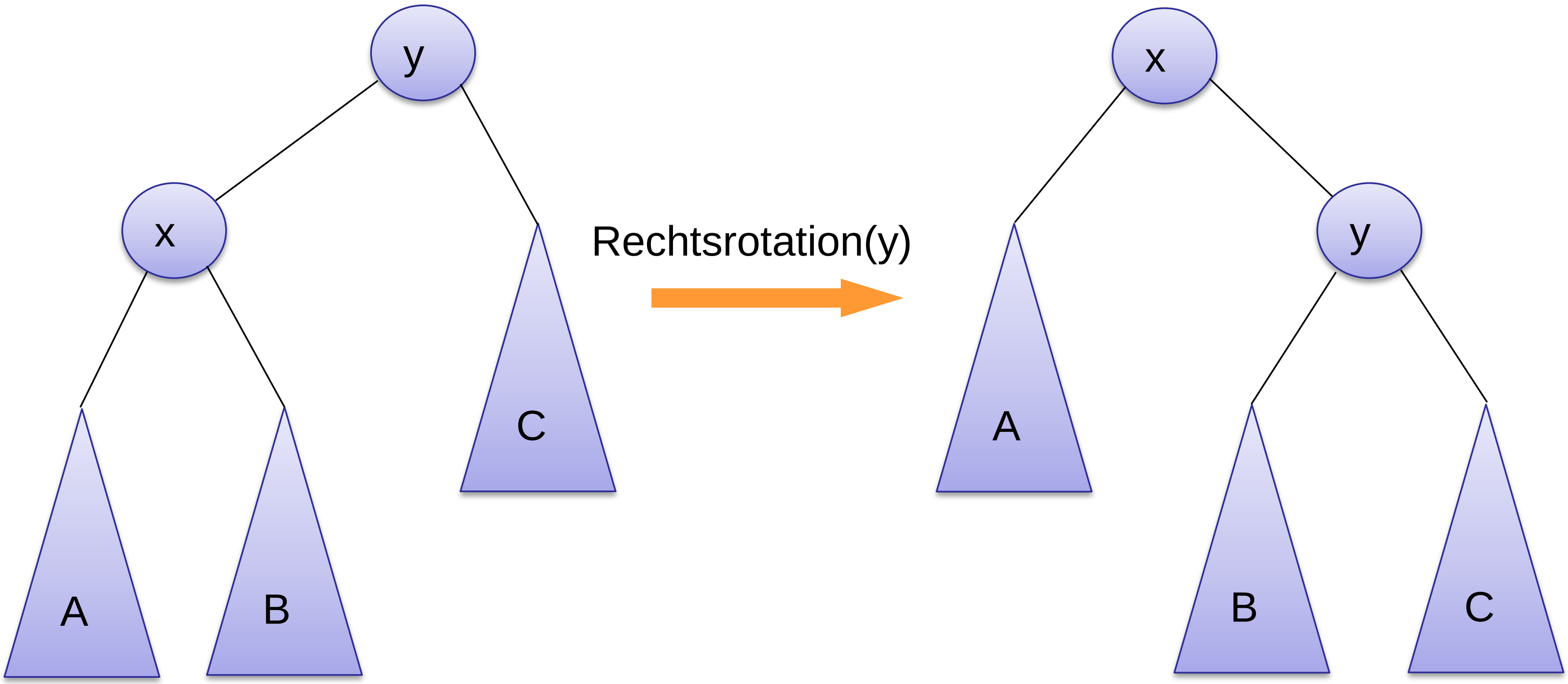
Problem:

Teilbaum von x wird zu groß



Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation

Rotationen



Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation

Rotationen

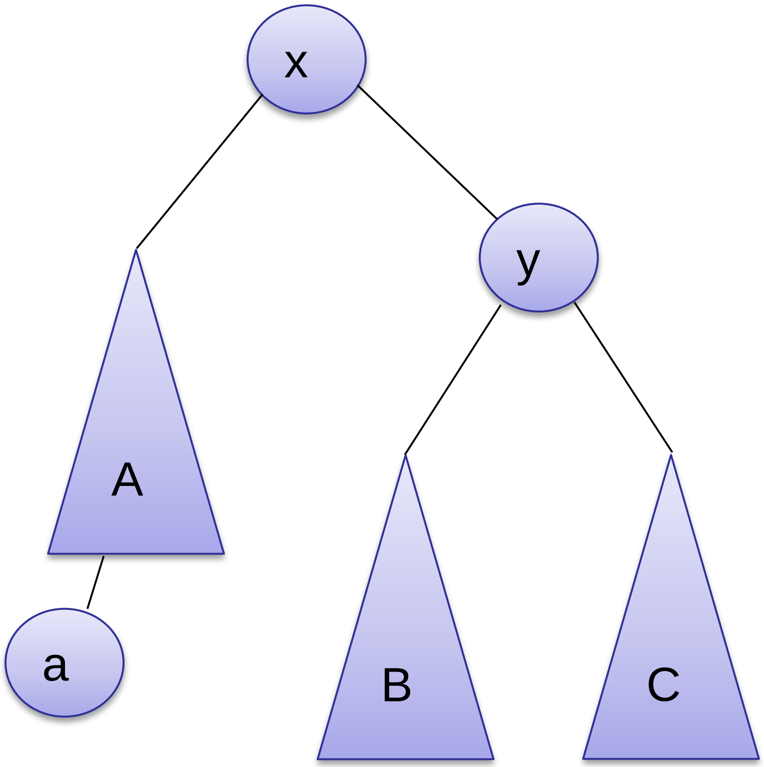
Aufgabe:

Einfügen von a in Teilbaum A

Lösung:

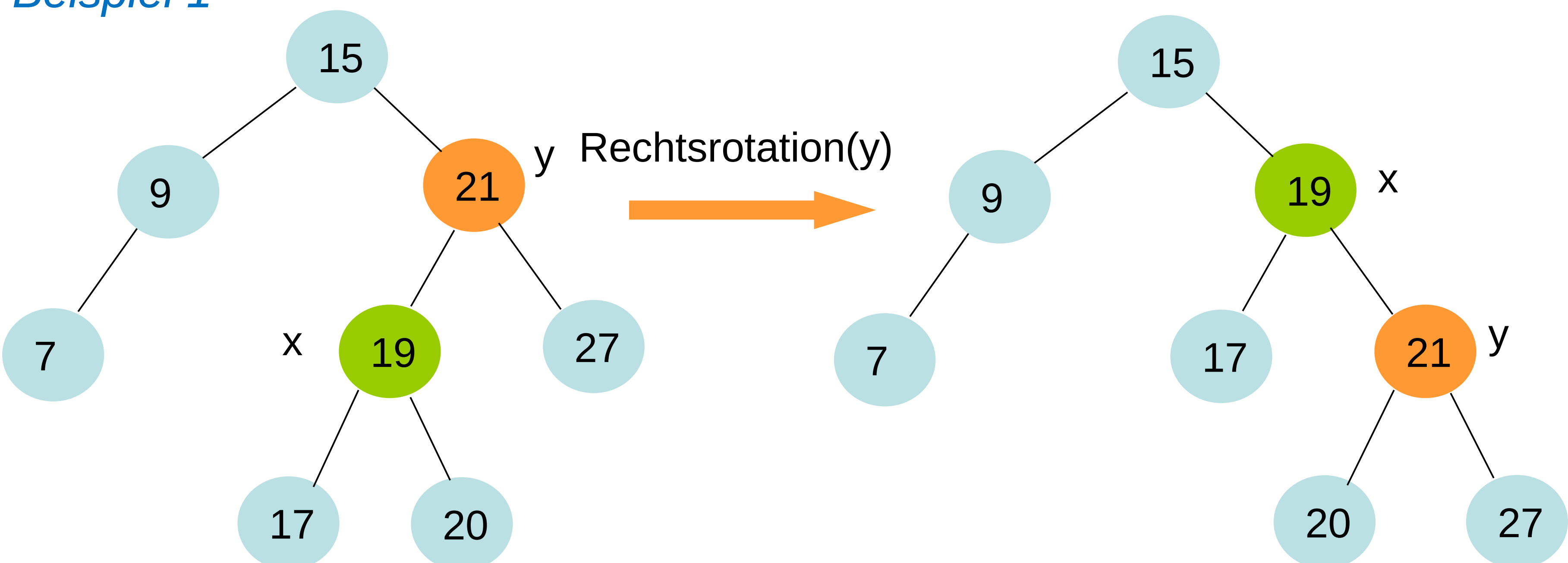
Rotation

Danach Einfügen von a in Teilbaum A



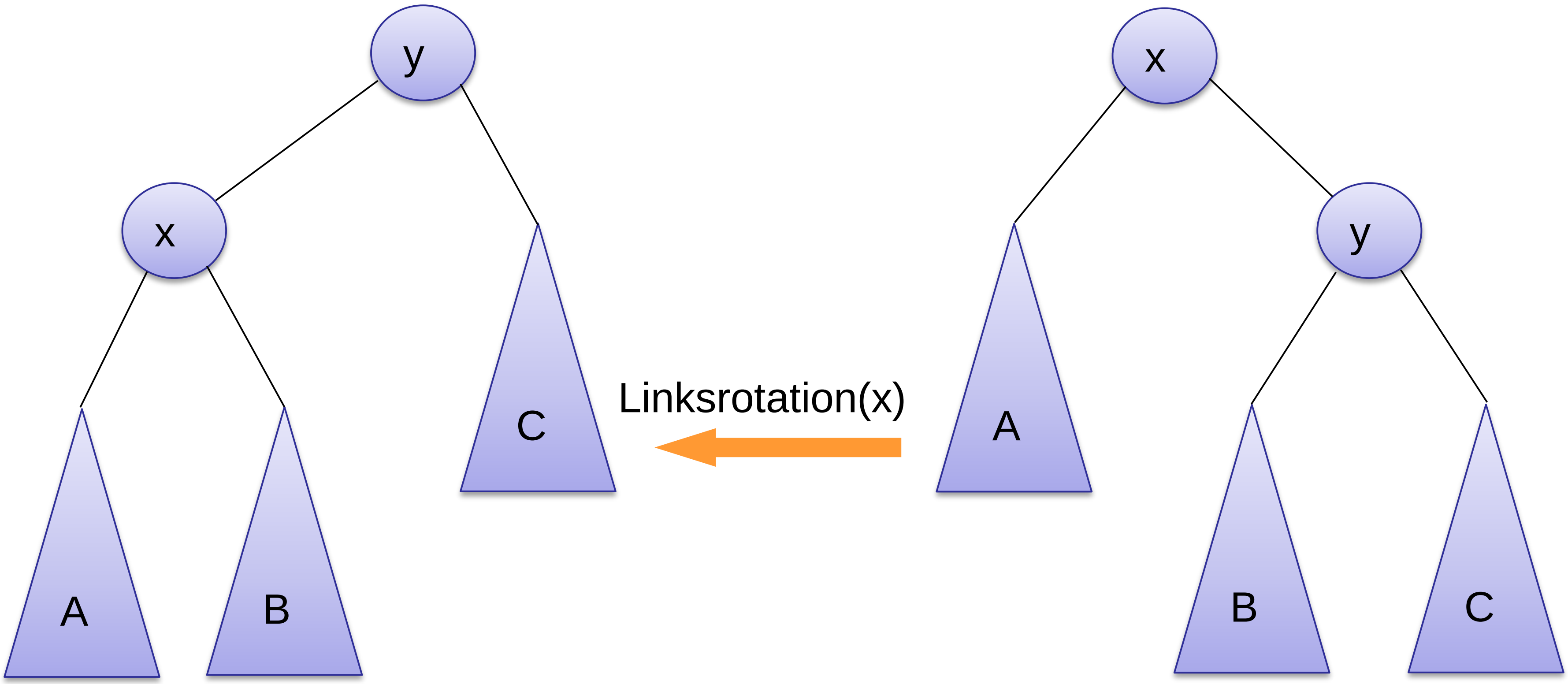
Rechtsrotation

Beispiel 1



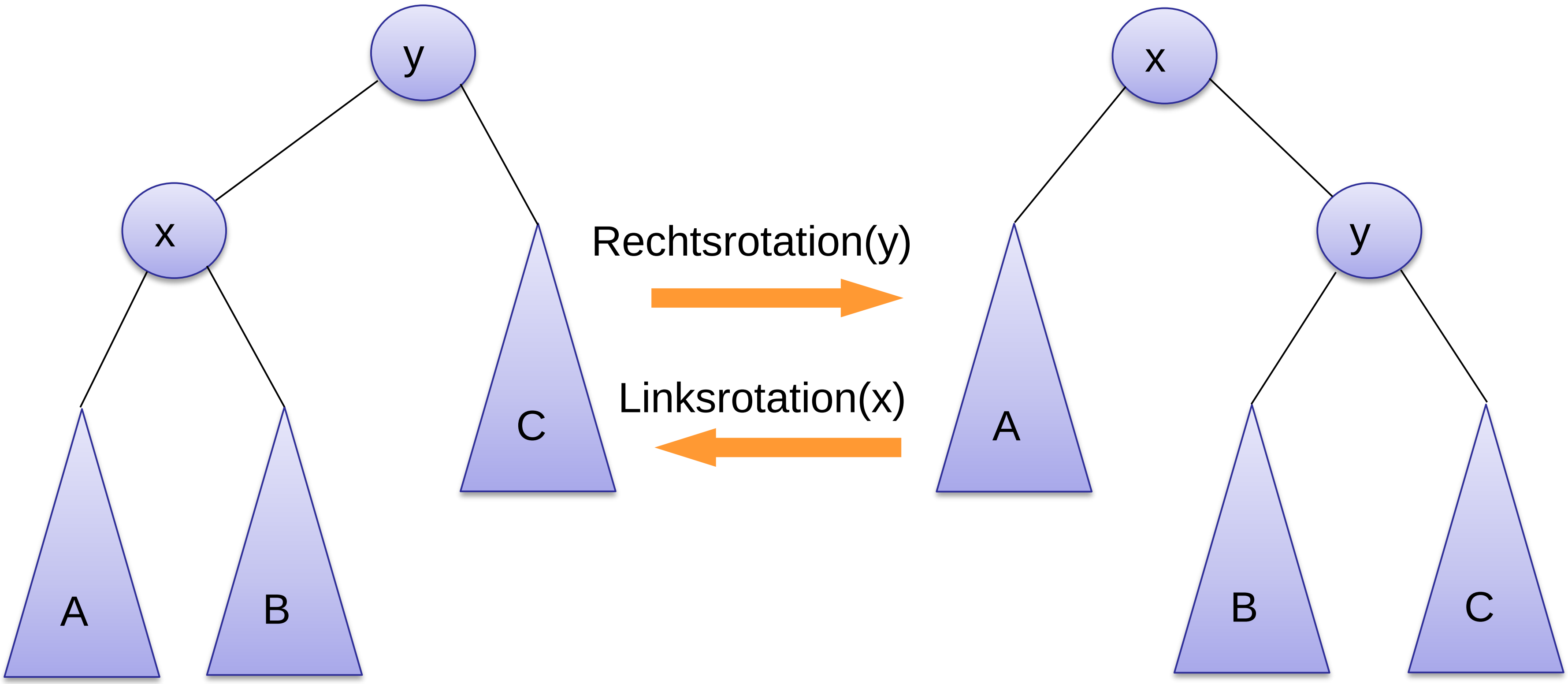
Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation
Rotationen sind symmetrisch

Rotationen



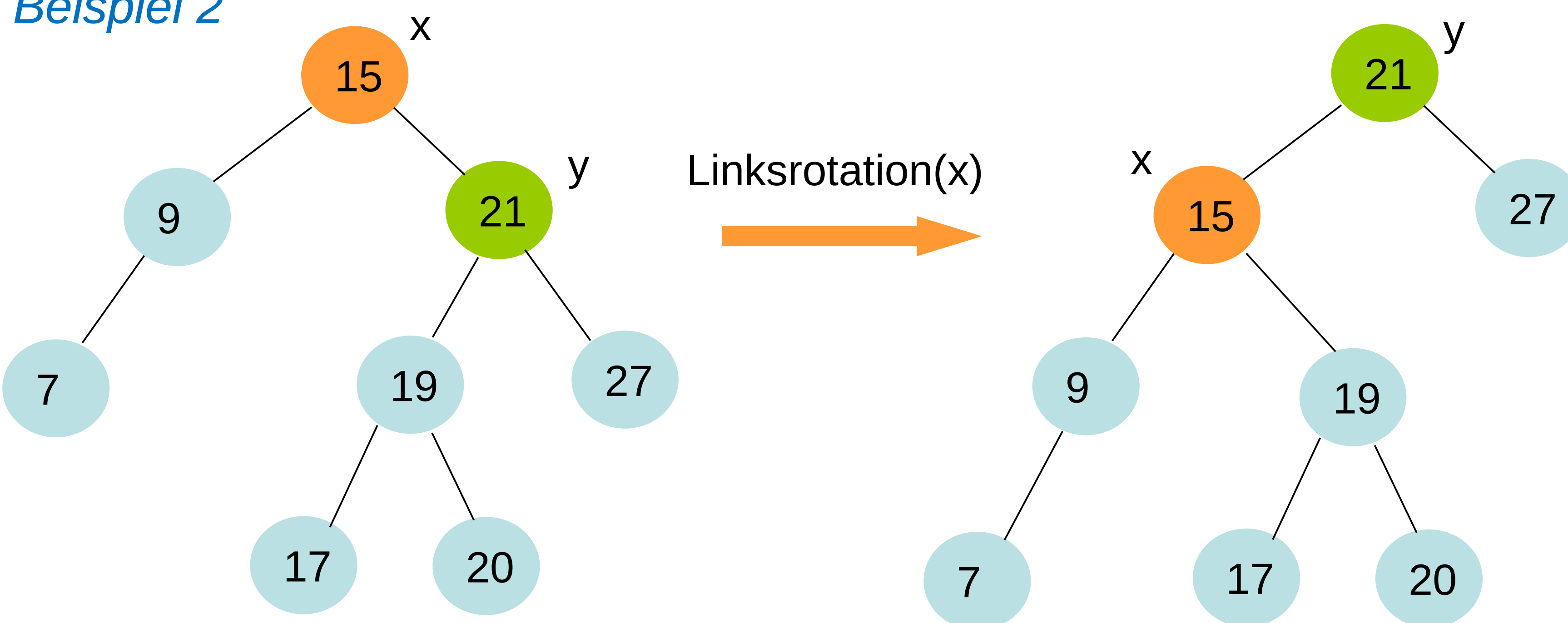
Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation
Rotationen sind symmetrisch

Rotationen



Linksrotation

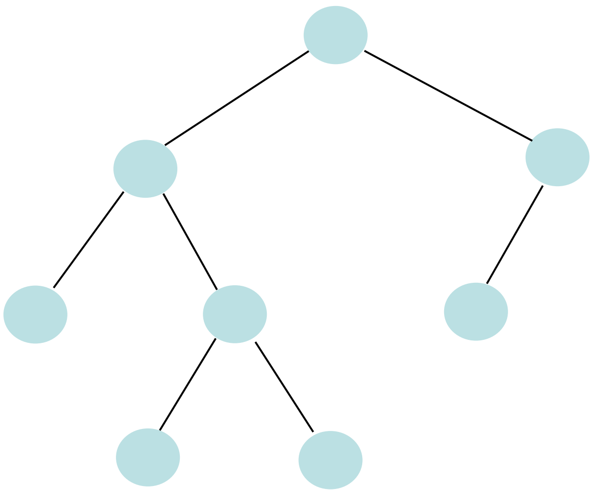
Beispiel 2



AVL-Bäume

AVL-Bäume [Adelson-Velsky und Landis]

- Ein Binärbaum heißt AVL-Baum, wenn für jeden Knoten gilt: Die Höhe seines linken und rechten Teilbaums unterscheidet sich höchstens um 1.



AVL-Bäume: Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

AVL-Bäume: Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Korollar

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat Höhe $\Theta(\log n)$.

AVL-Bäume: Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Korollar

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat Höhe $\Theta(\log n)$.

Beweis

- (1) Zeige $h=O(\log n)$: Es gilt $n \geq (3/2)^h$ nach Satz

$$n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^h \Rightarrow \log n \geq \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^h\right) \Rightarrow \log n \geq h \cdot \log(3/2) \Rightarrow h = O(\log n)$$

AVL-Bäume: Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Korollar

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat Höhe $\Theta(\log n)$.

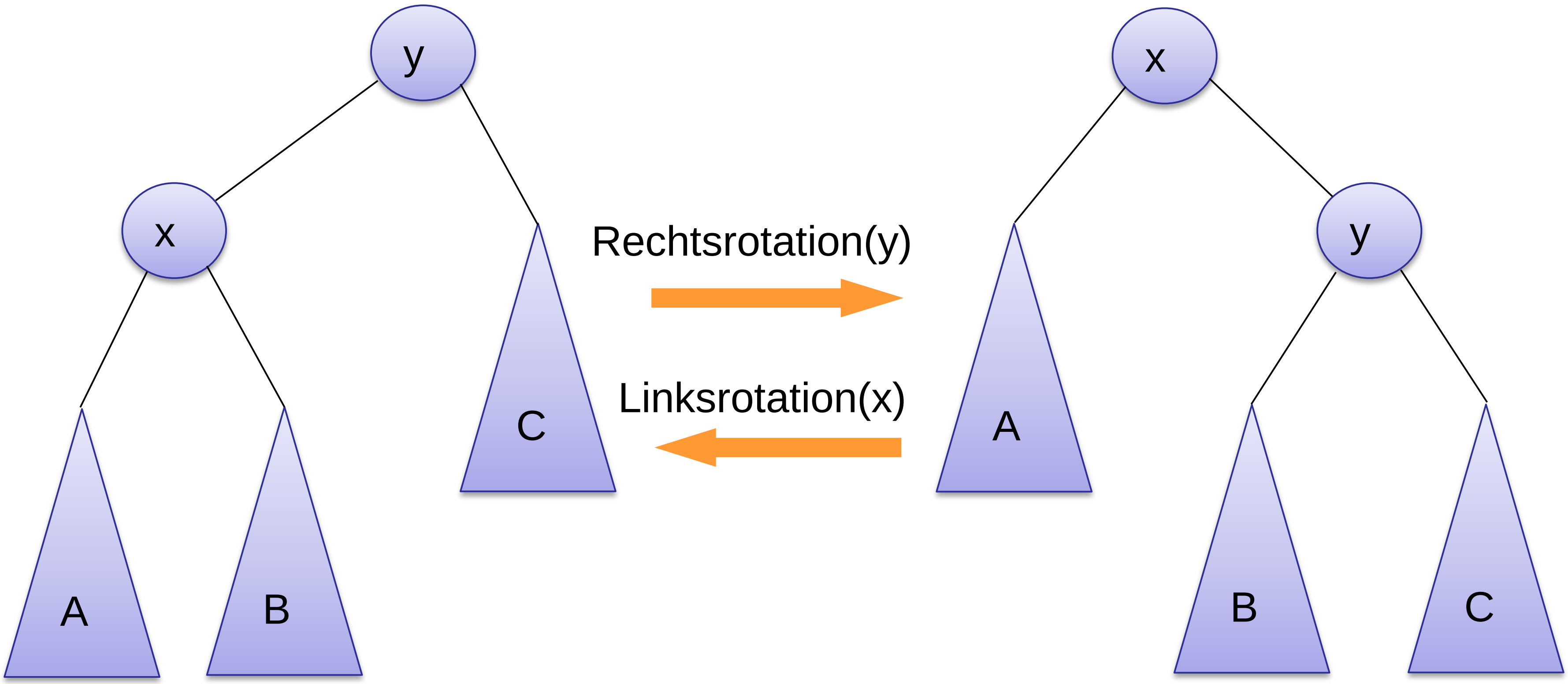
Beweis

- (2) Zeige $h=\Omega(\log n)$: Es gilt $n \leq 2^{h+1}-1 \leq 2^{h+1}$ nach Satz

$$n \leq 2^{h+1} \Rightarrow \log n \leq h+1 \Rightarrow \log n \leq 2h \Rightarrow h = \Omega(\log n)$$

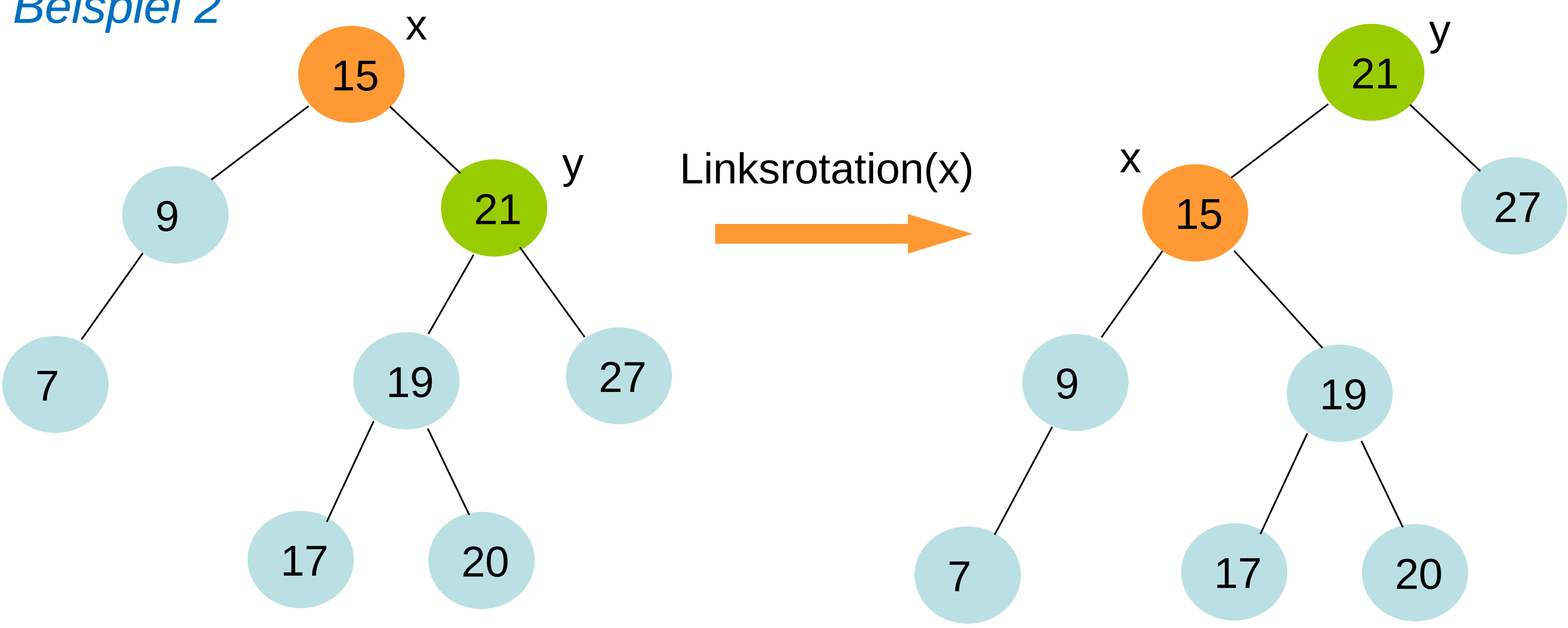
Der Weg zu balancierten Bäumen: Rotation
Links- und Rechtsrotation sind symmetrisch

Rotationen



Hier: Linksrotation (Rechtsrotation symmetrisch)

Beispiel 2



Linksrotation (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7.   **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y

Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Annahme: x hat rechtes Kind.

Linksrotation(x)

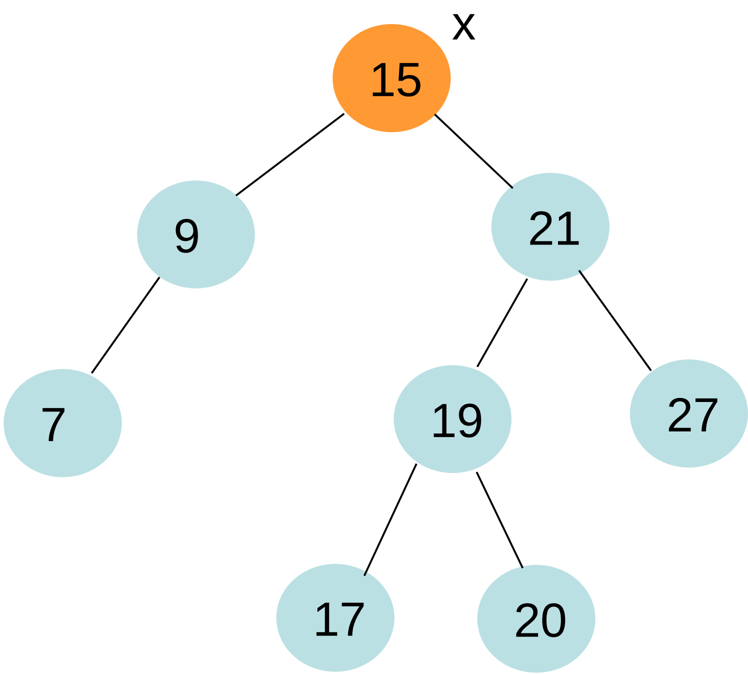
1. $y \leftarrow rc[x]$
2. $rc[x] \leftarrow lc[y]$
3. **if** $lc[y] \neq$ **nil then** $p[lc[y]] \leftarrow x$
4. $p[y] \leftarrow p[x]$
5. **if** $p[x]=$**nil then** $root[T] \leftarrow y$
6. **else if** $x=lc[p[x]]$ **then** $lc[p[x]] \leftarrow y$
7. **else** $rc[p[x]] \leftarrow y$
8. $lc[y] \leftarrow x$
9. $p[x] \leftarrow y$

Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Annahme: x hat rechtes Kind.

Linksrotation(x)

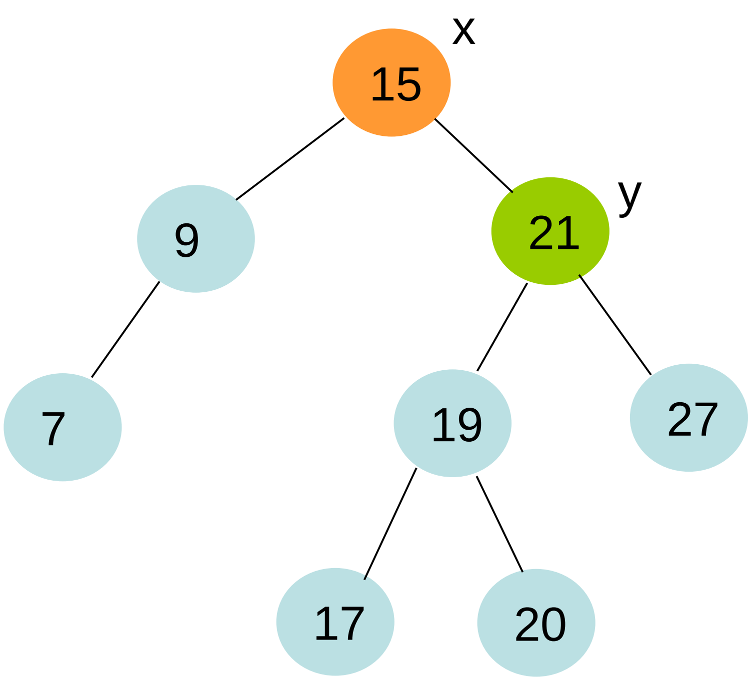
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

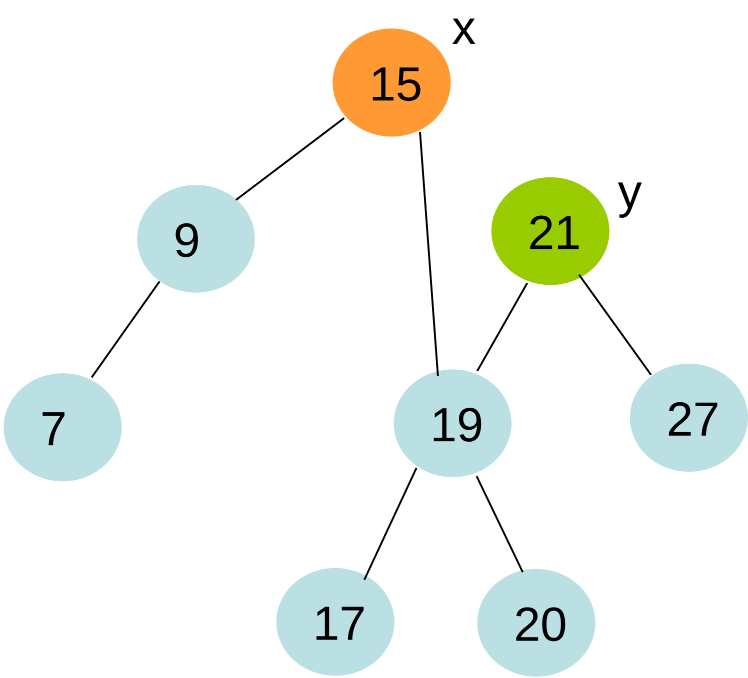
1. $y \leftarrow rc[x]$
2. $rc[x] \leftarrow lc[y]$
3. **if** $lc[y] \neq$ **nil then** $p[lc[y]] \leftarrow x$
4. $p[y] \leftarrow p[x]$
5. **if** $p[x]=$**nil then** $root[T] \leftarrow y$
6. **else if** $x=lc[p[x]]$ **then** $lc[p[x]] \leftarrow y$
7. **else** $rc[p[x]] \leftarrow y$
8. $lc[y] \leftarrow x$
9. $p[x] \leftarrow y$



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

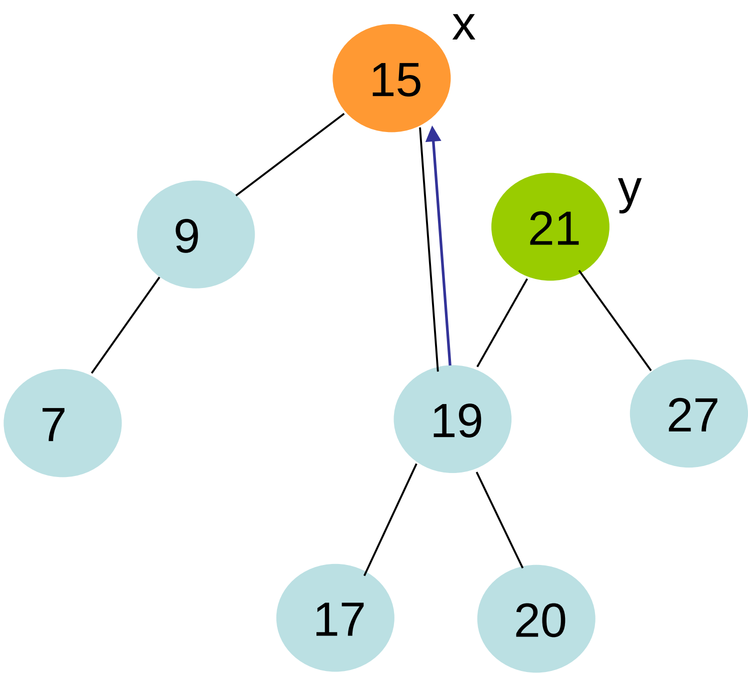
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7.   **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

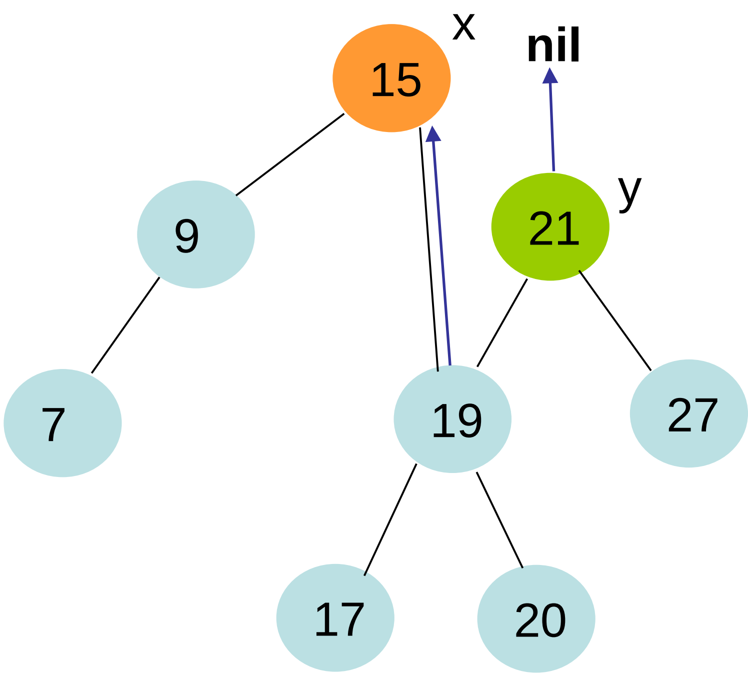
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7.   **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

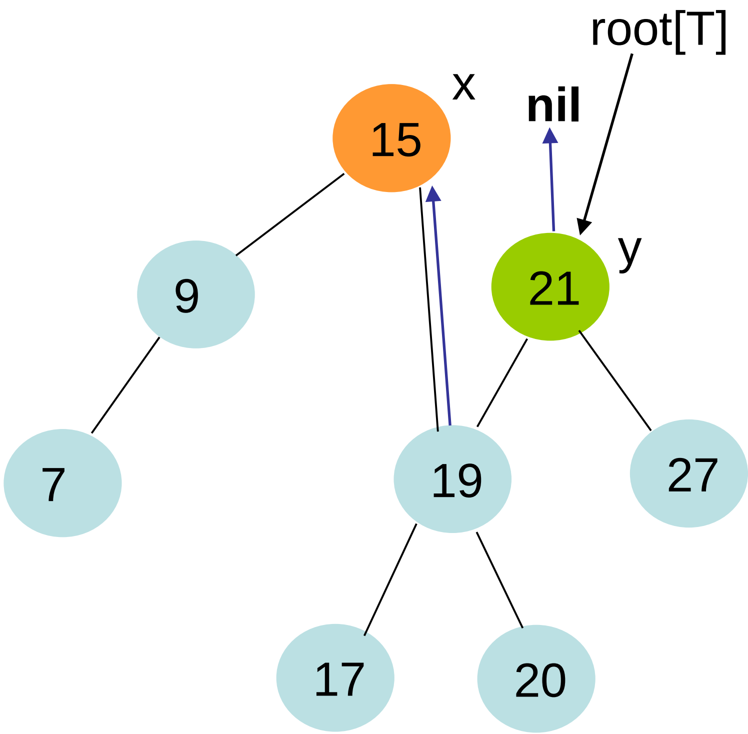
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. $\boxed{\text{p[y] ← p[x]}}$
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



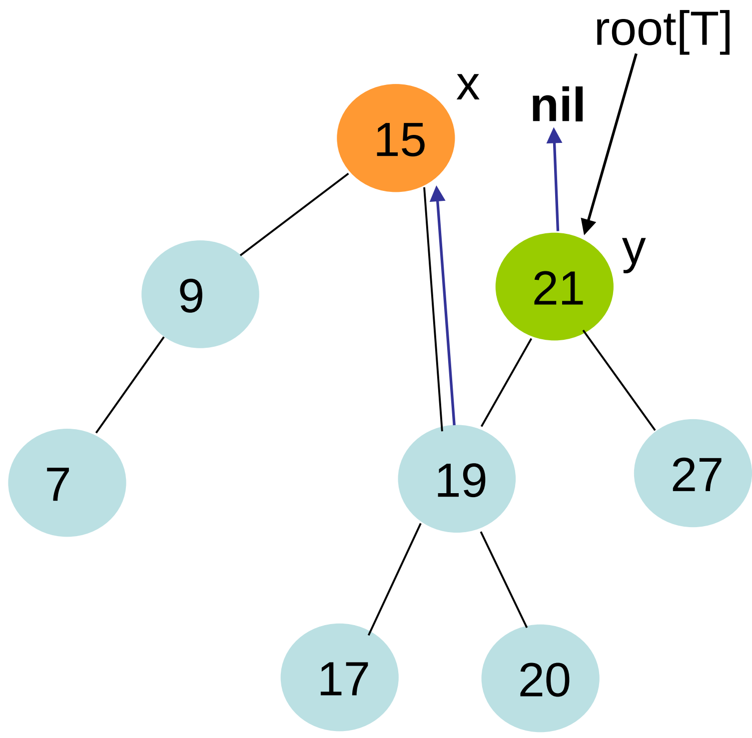
Wichtiger Hinweis

- In diesem Fall muss die Wurzel des Baums (root[T]) angepasst werden

Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

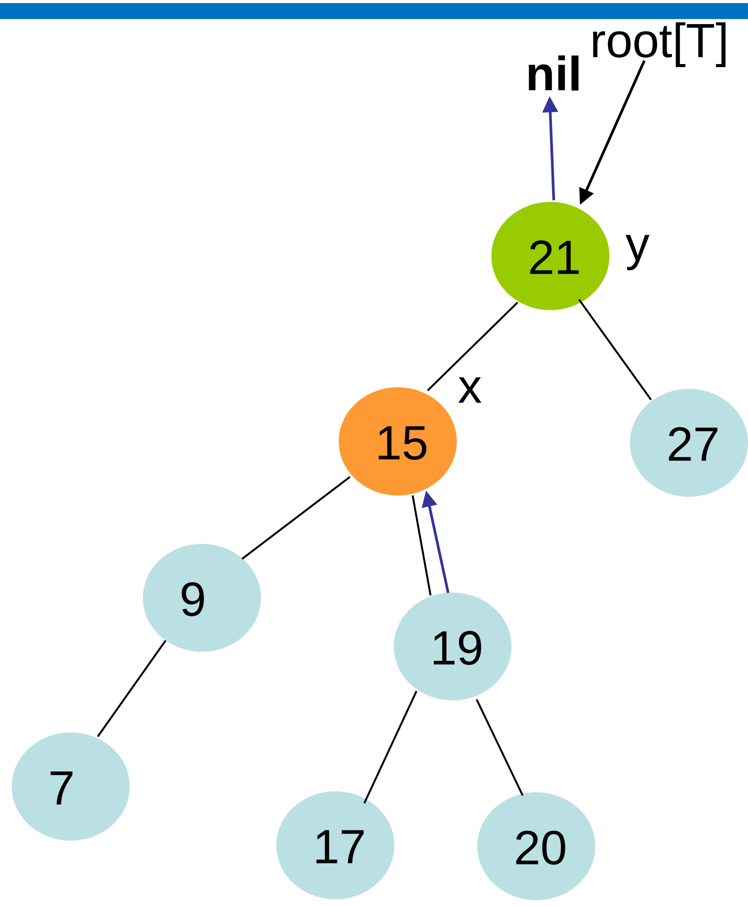
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

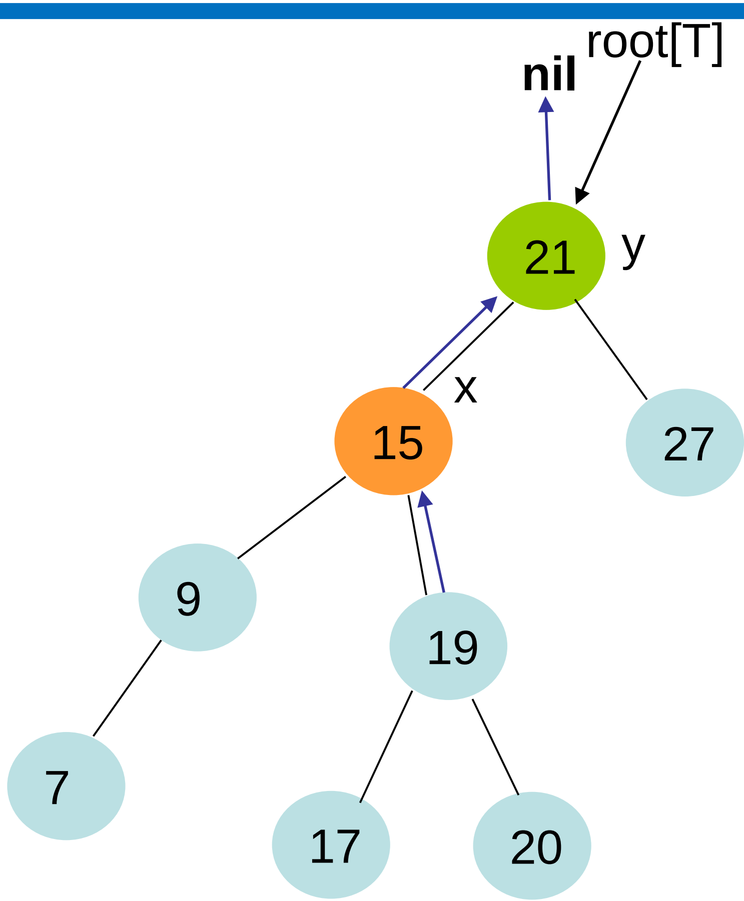
y ← rc[x]
rc[x] ← lc[y]
if lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
p[y] ← p[x]
if p[x]=**nil then** root[T] ← y
else if x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
    else rc[p[x]] ← y
lc[y] ← x
p[x] ← y



Linksrotation (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

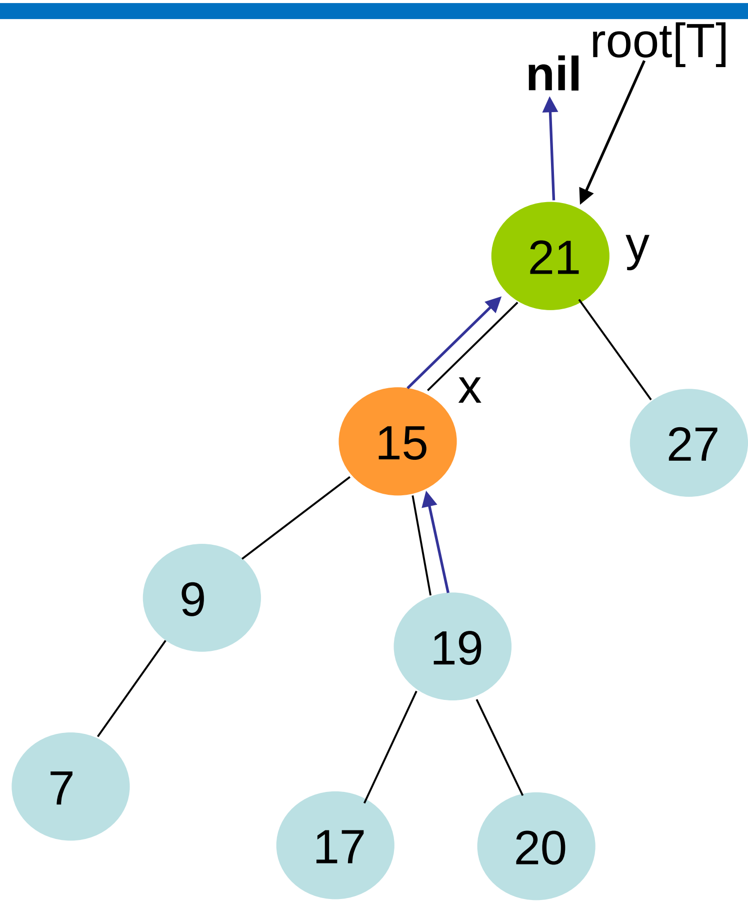
1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. $\boxed{\text{p[x]} \leftarrow \text{y}}$



Linksrotation auf dem Baum T (Rechtsrotation symmetrisch)

Linksrotation(x)

1. y ← rc[x]
2. rc[x] ← lc[y]
3. **if** lc[y]≠**nil then** p[lc[y]] ← x
4. p[y] ← p[x]
5. **if** p[x]=**nil then** root[T] ← y
6. **else if** x=lc[p[x]] **then** lc[p[x]] ← y
7. **else** rc[p[x]] ← y
8. lc[y] ← x
9. p[x] ← y



Der Weg zu dynamischen AVL-Bäumen

Wiederholung: Binäre Bäume

- Operationen: Suche, Einfügen, Löschen, Min/Max, Vorgänger/Nachfolger,…
- Laufzeit O(h)
- Beobachtung: Nur Einfügen/Löschen verändern Struktur des Baums

Dynamische AVL-Bäume: Idee

- Wir müssen die AVL-Eigenschaft nach jedem Einfügen/Löschen wiederherstellen.
- Dann unterscheiden sich die Höhen aller Teilbäume um maximal 1
- Somit gilt die AVL Eigenschaft und wir haben h = O(log n)
- Entsprechend sind die Laufzeiten für die Operationen O(log n)

Beinahe-AVL-Baum

Definition

- Ein Baum heißt beinahe-AVL-Baum, wenn die AVL-Eigenschaft in jedem Knoten außer der Wurzel erfüllt ist und sich die Höhe der Unterbäume der Wurzel um höchstens 2 unterscheidet.

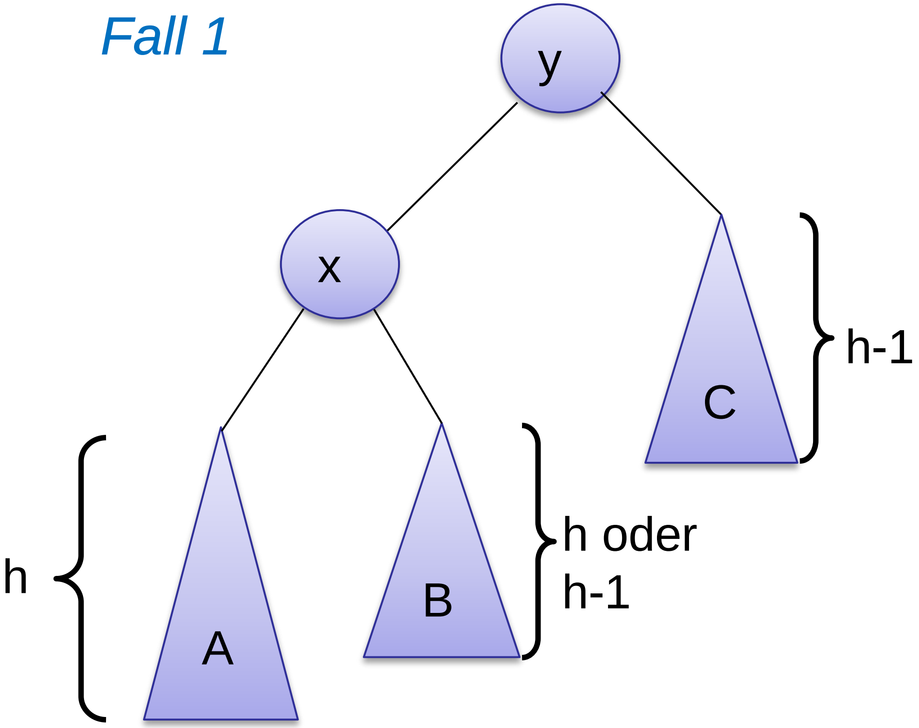
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum

Unterproblem

- Umformen eines beinahe-AVL-Baums in einen AVL-Baum mit Hilfe von Rotationen
- O.b.d.A.: Linker Teilbaum der Wurzel höher als der rechte

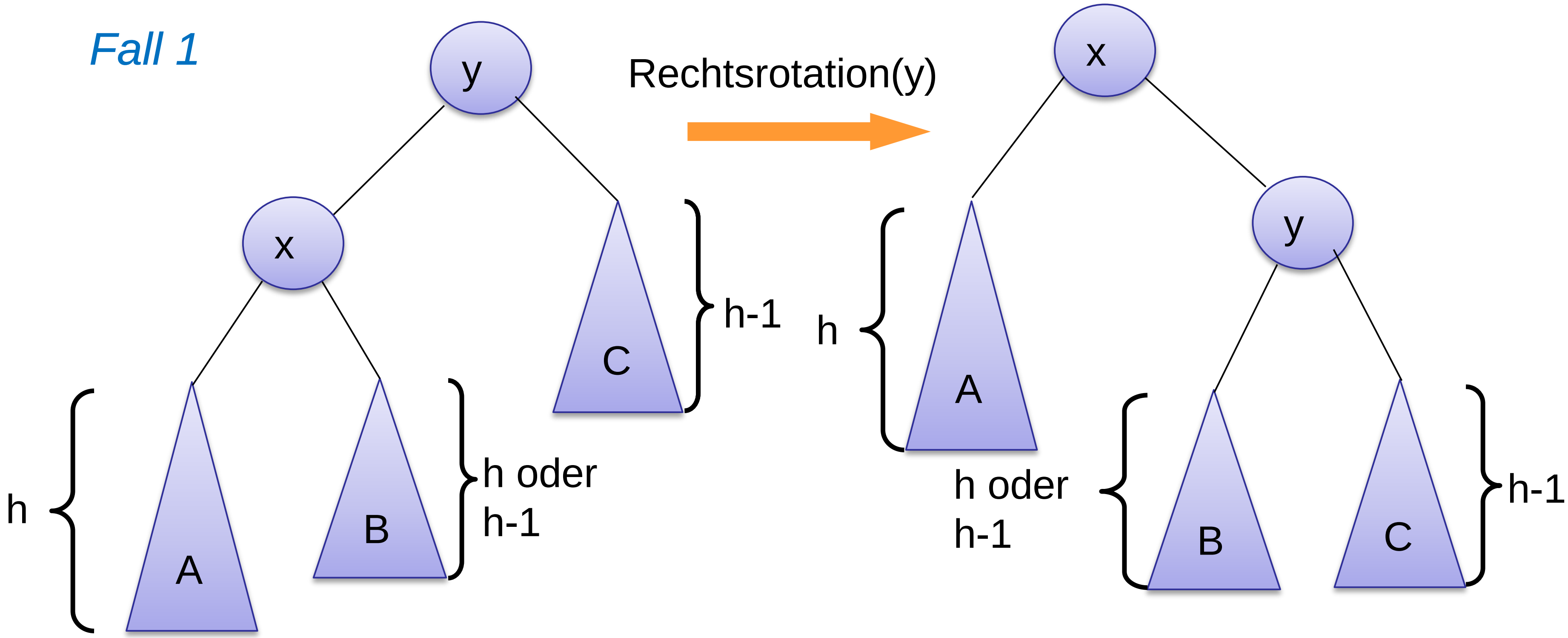
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 1: Einfache Rechtsrotation

Fall 1



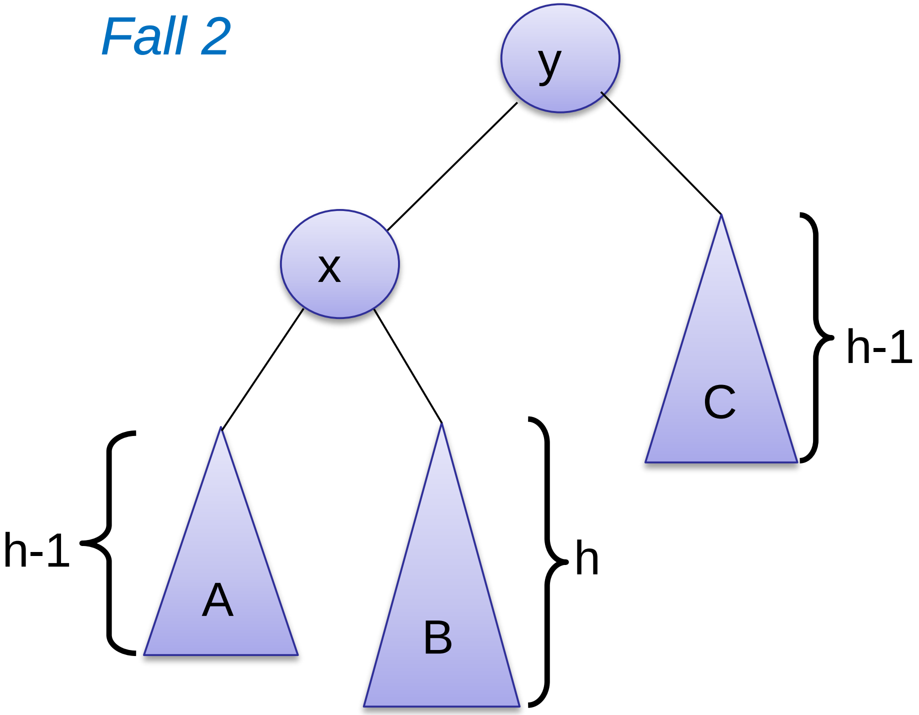
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 1: Einfache Rechtsrotation

Fall 1



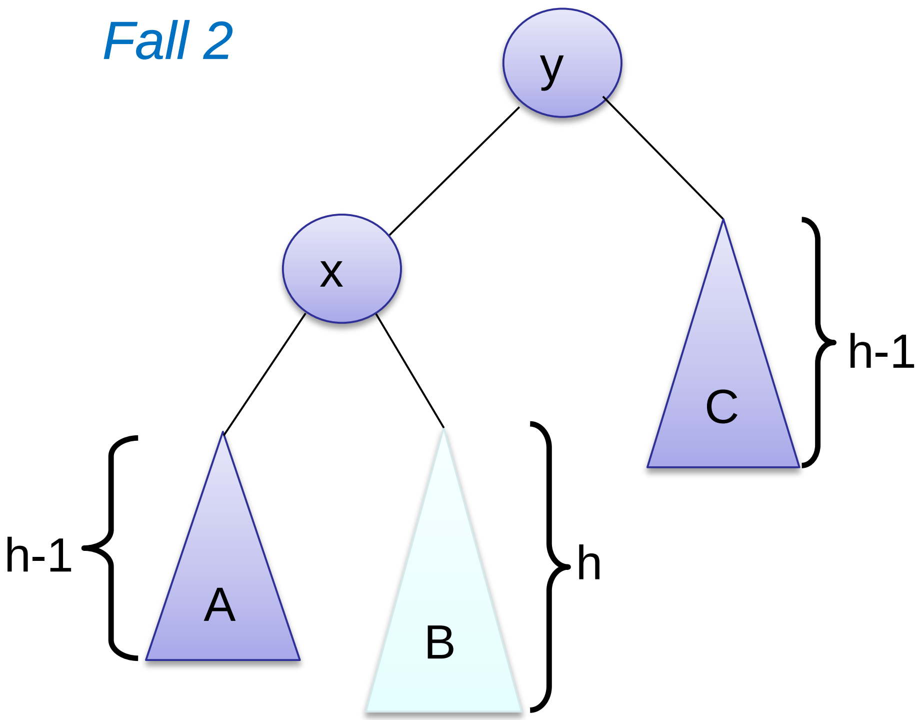
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 2: Doppelrotation

Fall 2



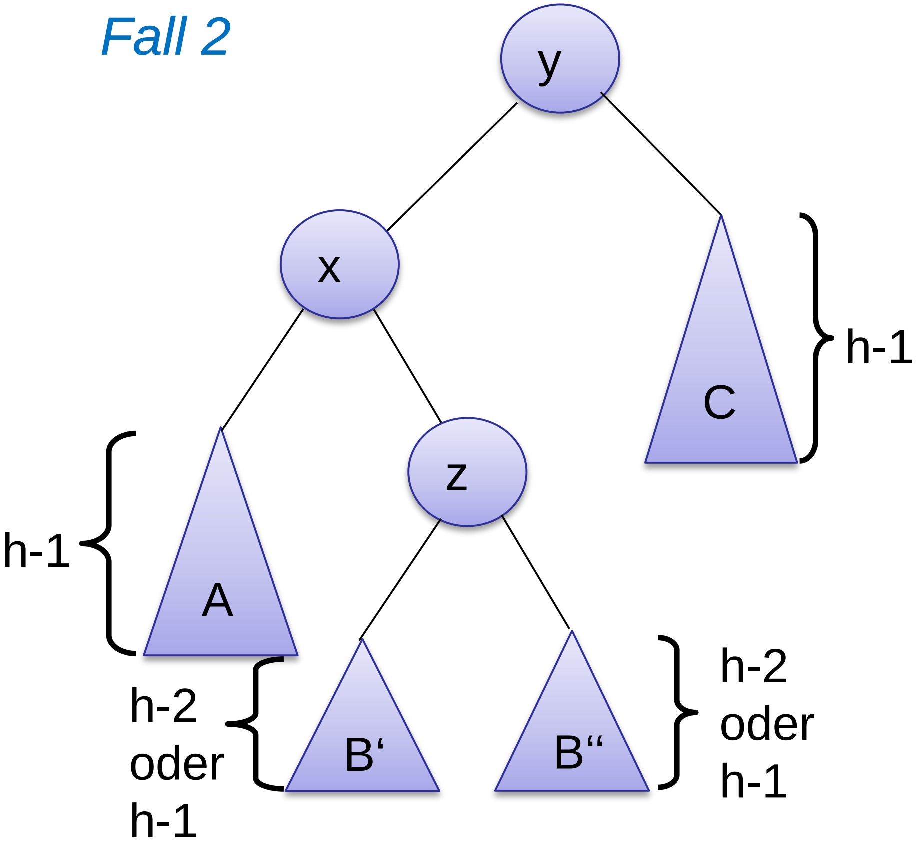
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 2: Doppelrotation

Fall 2



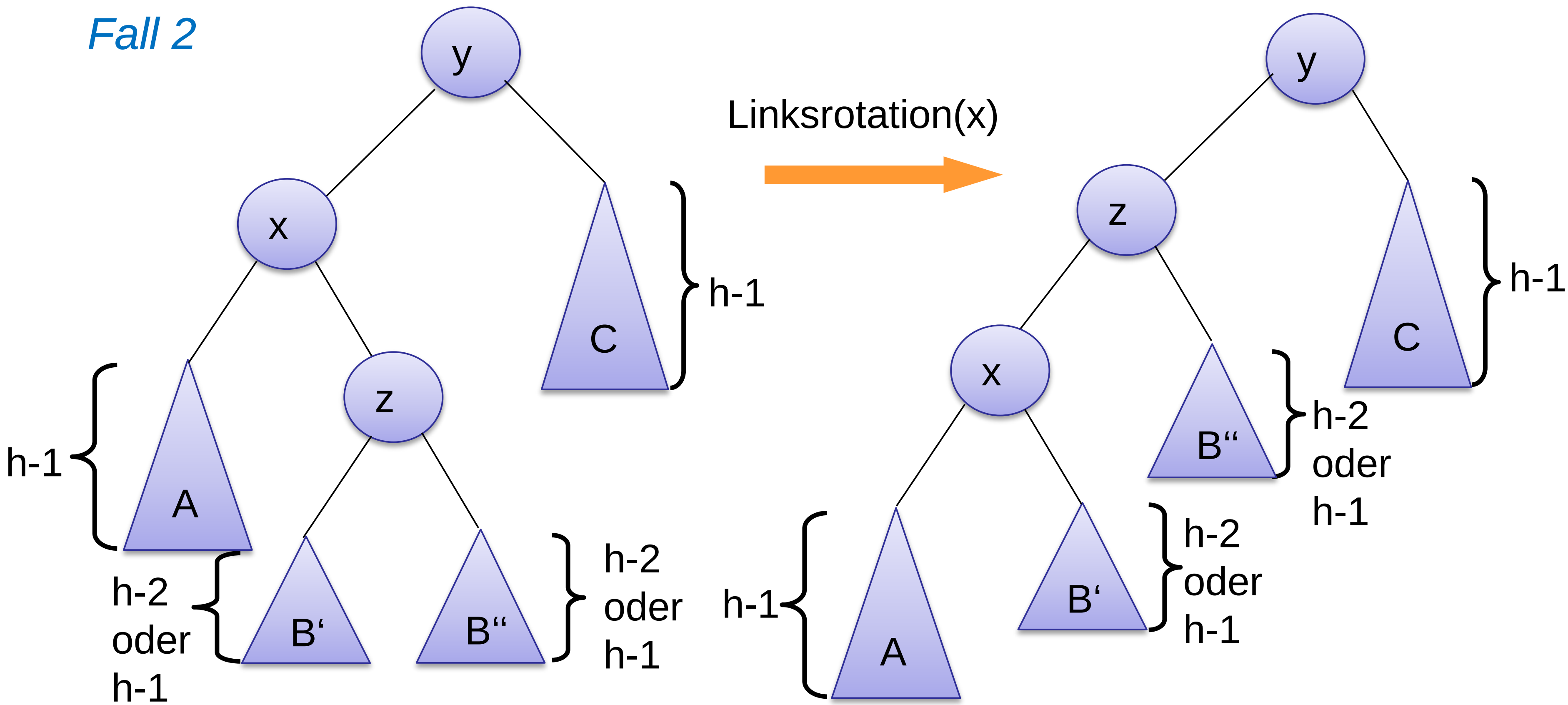
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum Fall 2: Doppelrotation

Fall 2



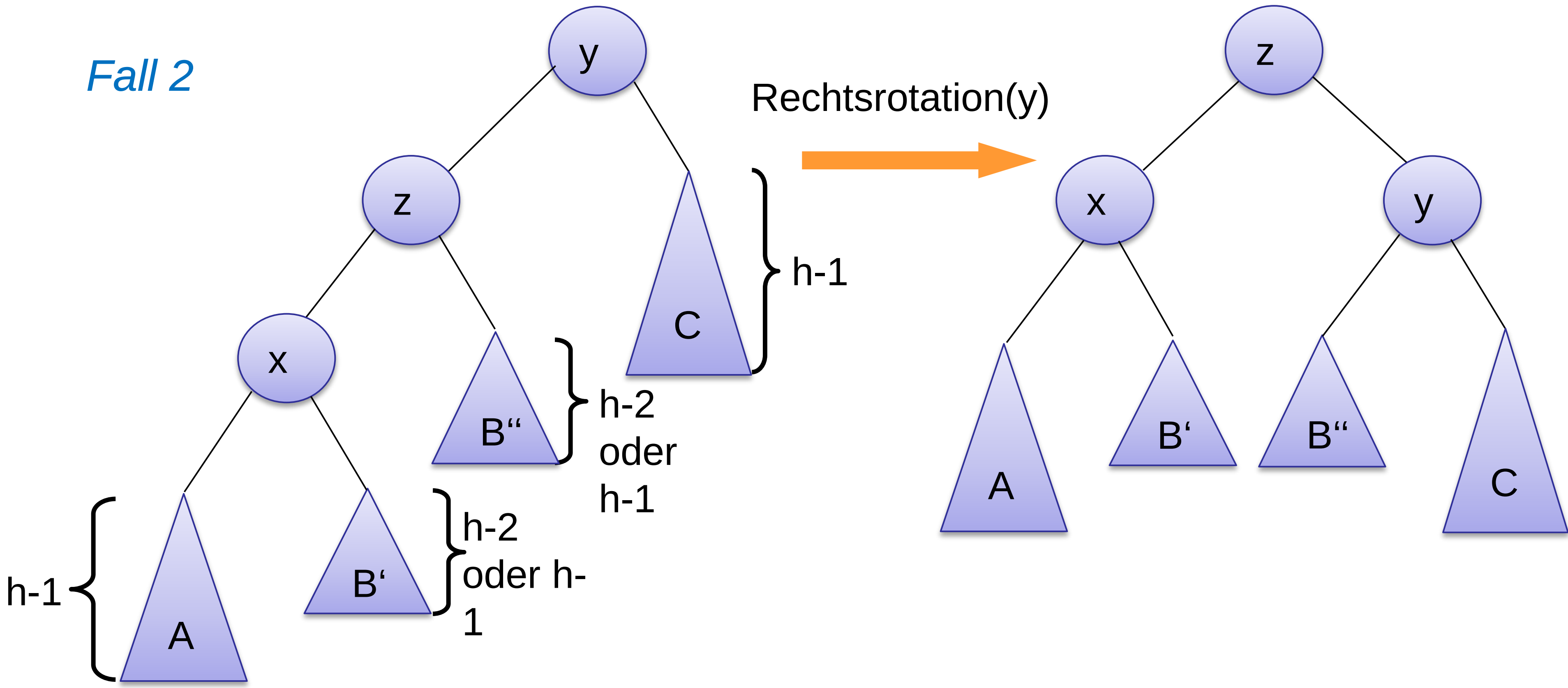
Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 2: Doppelrotation

Fall 2



Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Fall 2: Doppelrotation

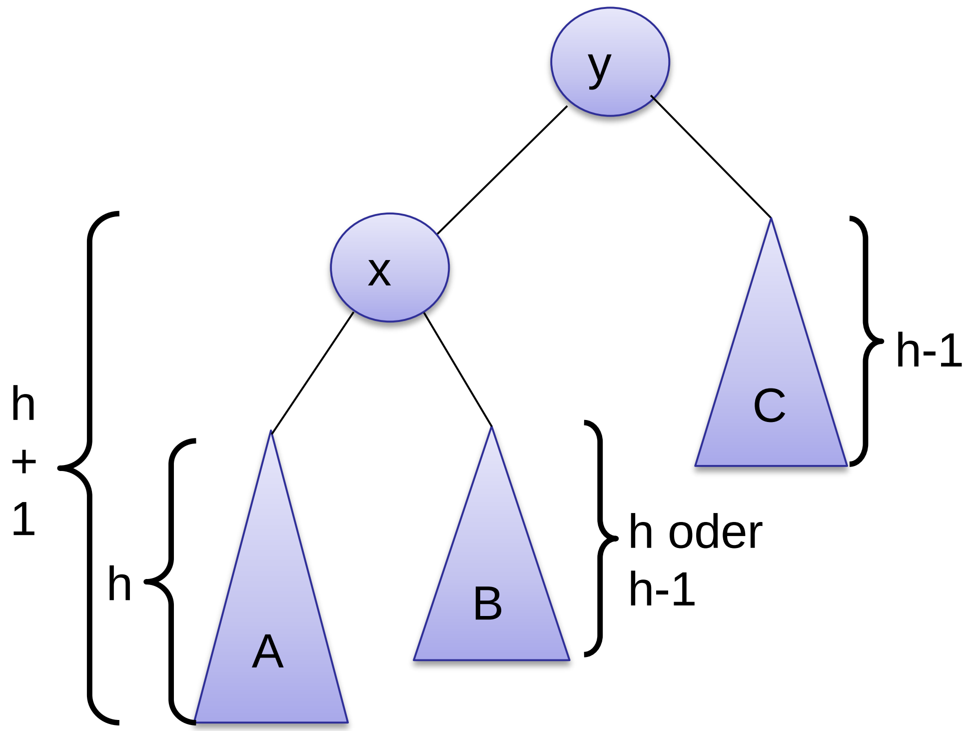
Fall 2



Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Operation: Balance

Balance(y)

1. **if** h[lc[y]] > h[rc[y]]+1 **then**
2.   **if** h[lc[lc[y]]]< h[rc[lc[y]]] **then**
3.   Linksrotation(lc[y])
4.   Rechtsrotation(y)
5. **else if** h[rc[y]]> h[lc[y]]+1 **then**
6.   **if** h[rc[rc[y]]]< h[lc[rc[y]] **then**
7.   Rechtsrotation(rc[y])
8.   Linksrotation(y)

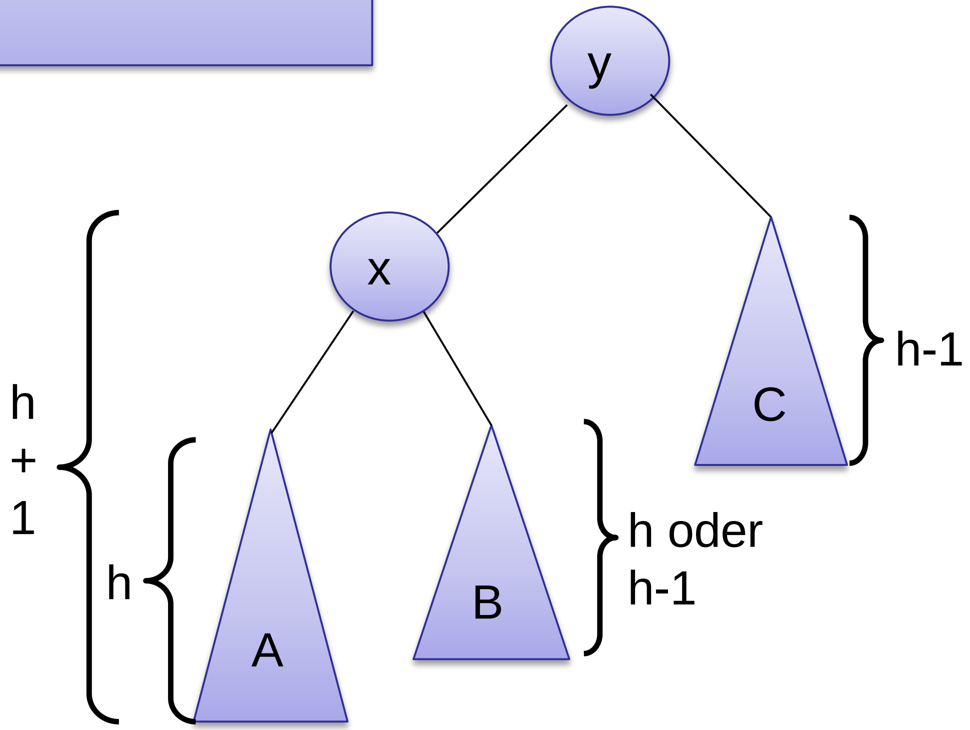


Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum
Operation: Balance

h gibt Höhe des Teilbaums an. Dies müssen wir zusätzlich in unserer Datenstruktur aufrecht erhalten.

Balance(y)

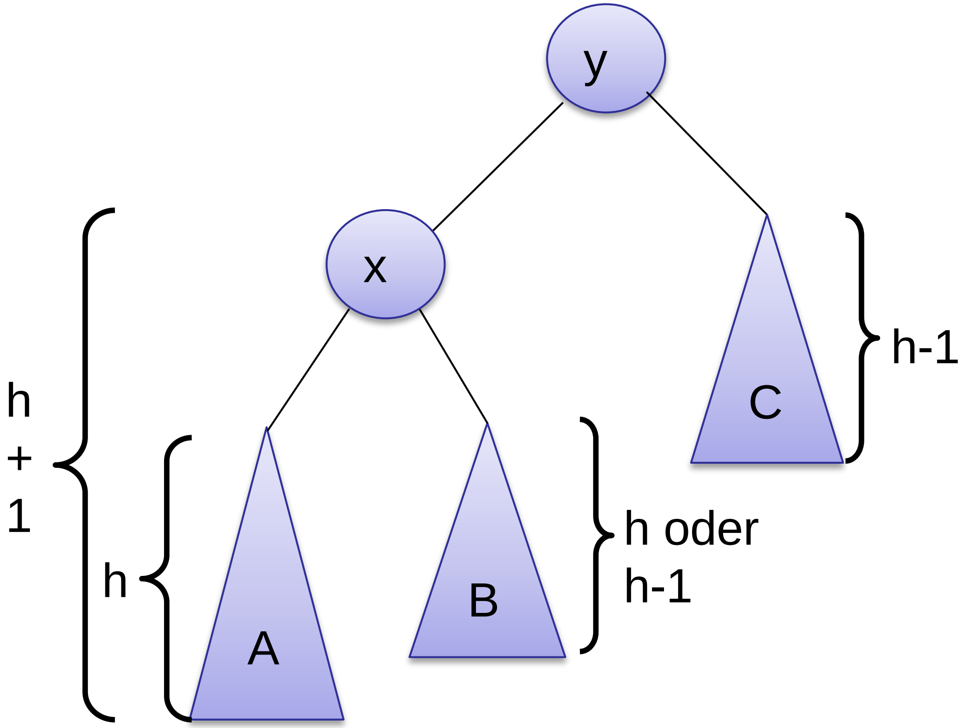
1. **if** h[lc[y]] > h[rc[y]]+1 **then**
2. **if** h[lc[lc[y]]]< h[rc[lc[y]]] **then**
3. Linksrotation(lc[y])
4. Rechtsrotation(y)
5. **else if** h[rc[y]]> h[lc[y]]+1 **then**
6. **if** h[rc[rc[y]]]< h[lc[rc[y]] **then**
7. Rechtsrotation(rc[y])
8. Linksrotation(y)



Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum Operation: Balance

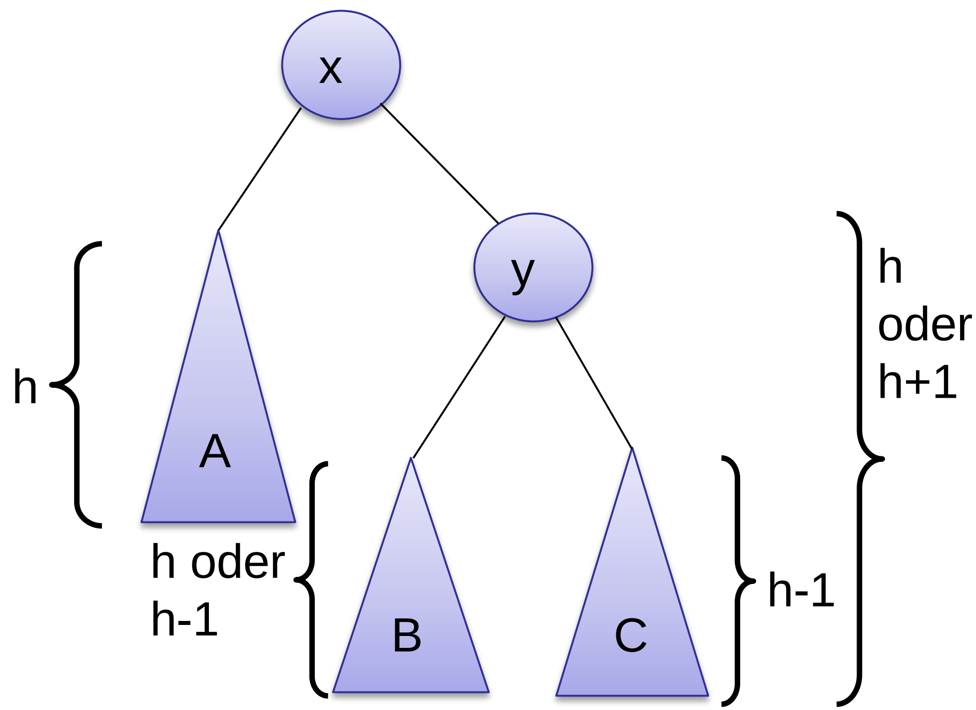
Balance(y)

1. **if** h[lc[y]] > h[rc[y]]+1 **then**
2. $\boxed{\textbf{if } h[lc[lc[y]]] < h[rc[lc[y]]] \textbf{ then}}$
3. Linksrotation(lc[y])
4. Rechtsrotation(y)
5. **else if** h[rc[y]]> h[lc[y]]+1 **then**
6. **if** h[rc[rc[y]]]< h[lc[rc[y]] **then**
7. Rechtsrotation(rc[y])
8. Linksrotation(y)



Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum Operation: Balance

Balance(y)
1. **if** h[lc[y]] > h[rc[y]]+1 **then**
2. **if** h[lc[lc[y]]]< h[rc[lc[y]]] **then**
3. Linksrotation(lc[y])
4. Rechtsrotation(y)
5. **else if** h[rc[y]]> h[lc[y]]+1 **then**
6. **if** h[rc[rc[y]]]< h[lc[rc[y]] **then**
7. Rechtsrotation(rc[y])
8. Linksrotation(y)

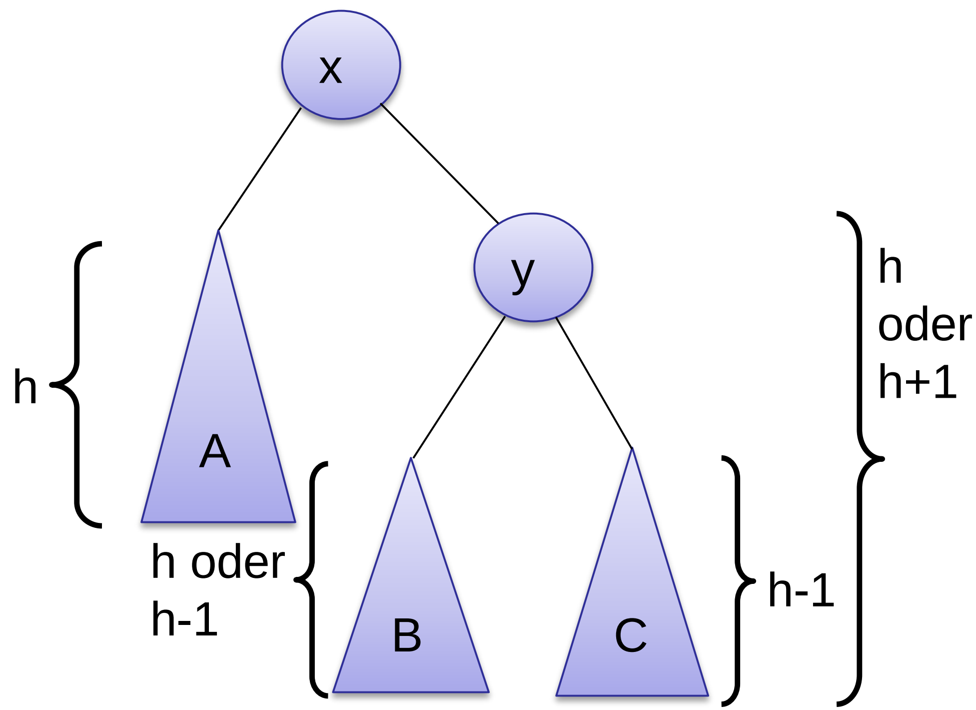


- Laufzeit: O(1)

Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum Operation: Balance

Balance(y)

1. **if** h[lc[y]] > h[rc[y]]+1 **then**
2.   **if** h[lc[lc[y]]]< h[rc[lc[y]]] **then**
3.   Linksrotation(lc[y])
4.   Rechtsrotation(y)
5. **else if** h[rc[y]]> h[lc[y]]+1 **then**
6.   **if** h[rc[rc[y]]]< h[lc[rc[y]] **then**
7.   Rechtsrotation(rc[y])
8.   Linksrotation(y)



Wichtiger Hinweis

- Nach allen Rotationen müssen die
Höhen der Knoten x und y angepasst werden!!!

Umformung von Beinahe-AVL-Baum zu AVL-Baum

Kurze Zusammenfassung

- Wir können aus einem beinahe-AVL-Baum mit Hilfe von maximal 2 Rotationen einen AVL-Baum machen
- Dabei erhöht sich die Höhe des Baums nicht

Einfügen

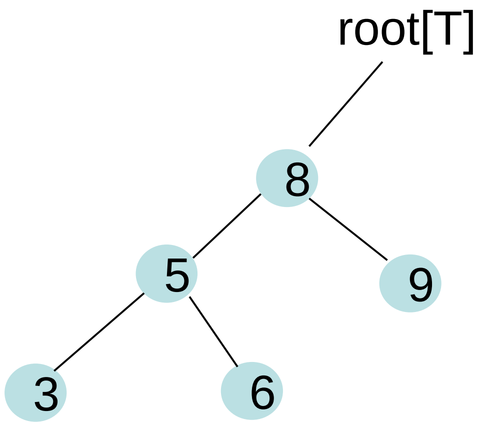
- Wir fügen ein wie früher
- Dann laufen wir den Pfad zur Wurzel zurück (z.B. als Teil der Rekursion)
- An jedem Knoten balancieren wir, falls der Unterbaum ein beinahe-AVL-Baum ist

AVL-Bäume: Einfügen

Wird aufgerufen mit AVL-Einfügen(root[T], 2)

AVL-Einfügen(t,x)

if t=**nil then**
    t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
else if key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)



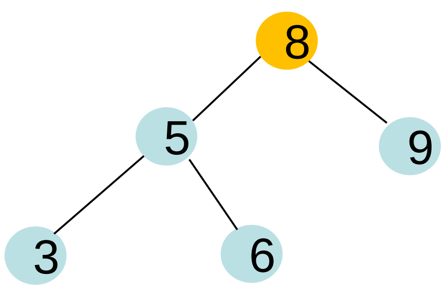
Einfügen 2

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

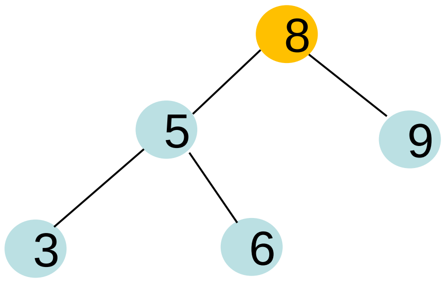
if t=**nil then**
    t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
else if key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)



Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➤ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

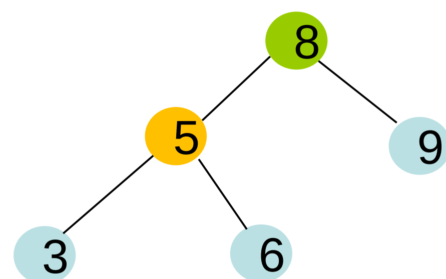


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

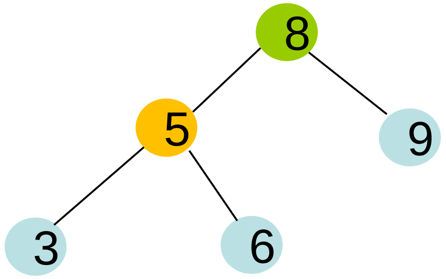


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➤ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)



Einfügen 2

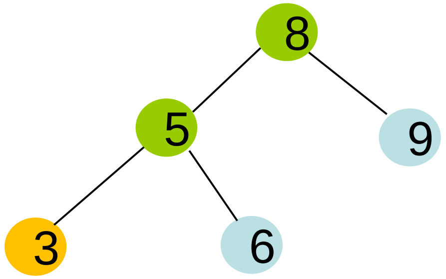
AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➤ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Hinweis

- Eventuell muss die Wurzel des Baums (root[T]) angepasst werden

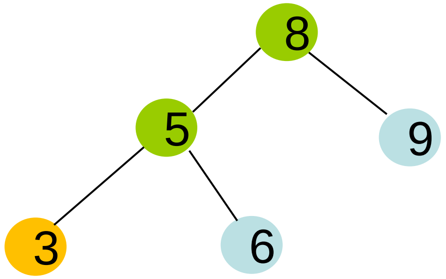


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2.   t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

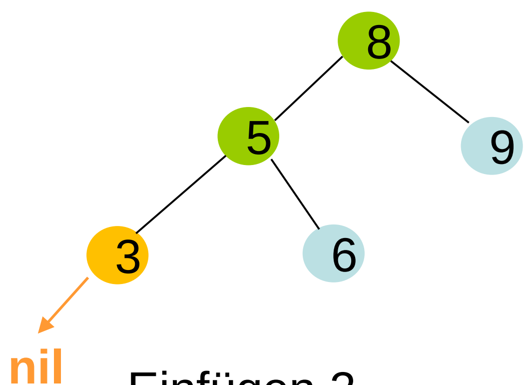


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)



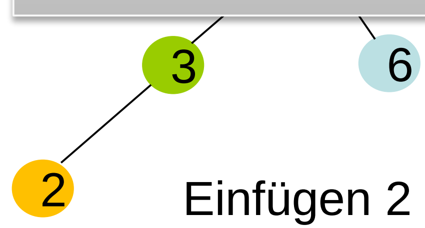
Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. $\boxed{t \leftarrow \text{new node}(x);\ h[t] \leftarrow 0\ ;\ \textbf{return}}$
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorha
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Neuen Knoten erzeugen. Zusätzlich noch Zeiger lc[t] und rc[t] auf **nil** setzen, sowie p[t] und den Zeiger von p[t] setzen.

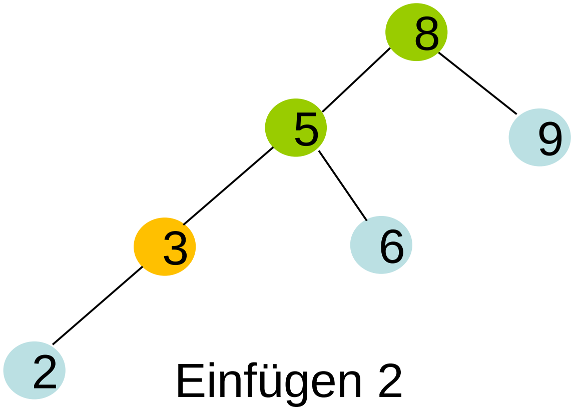


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. $\boxed{\text{h[t]} \leftarrow 1 + \max\{\text{h[lc[t]]}, \text{h[rc[t]]}\}}$
7. Balance(t)

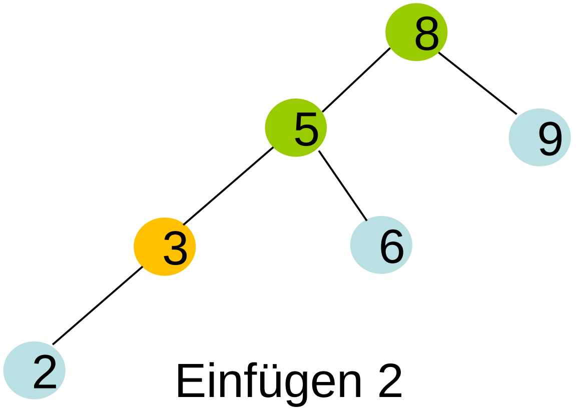


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

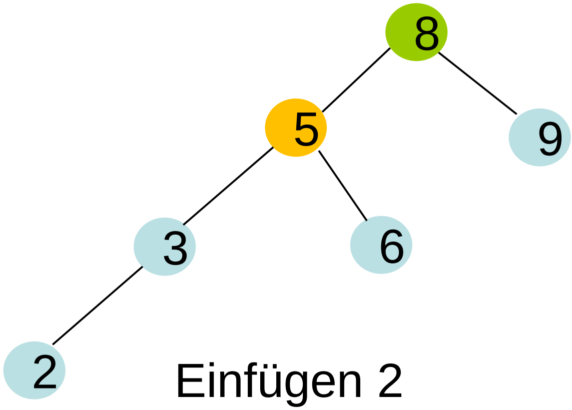
1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. $\boxed{\text{Balance(t)}}$



Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

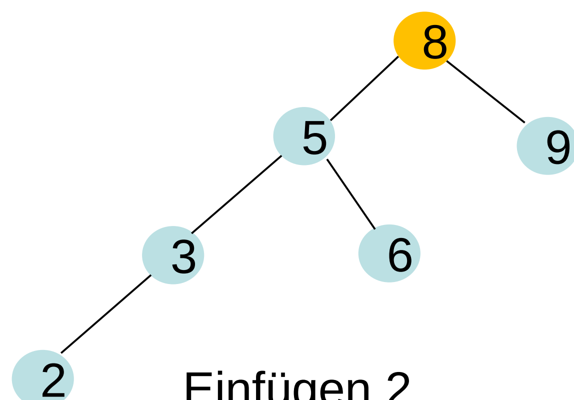


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

```
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➤ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

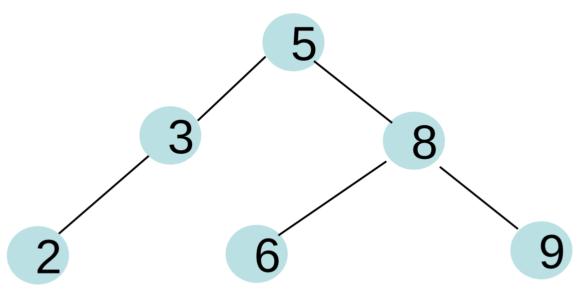


Einfügen 2

AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)



Einfügen 2

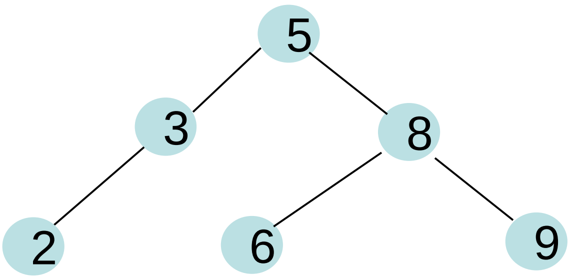
AVL-Bäume: Einfügen

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Laufzeit

- O(h) = O(log n)

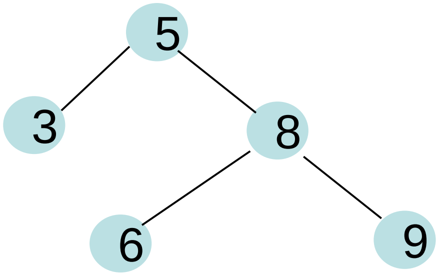


Einfügen 2

AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

1. **if** key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
2. **else** if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
3. **else if** t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
4. **else if** lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
5. **else if** rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
6. **else** u=MaximumSuche(lc[t])
7. Kopiere Informationen von u nach t
8. AVL-Löschen(key[u],lc[t])
9. **if** t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
10. Balance(t)



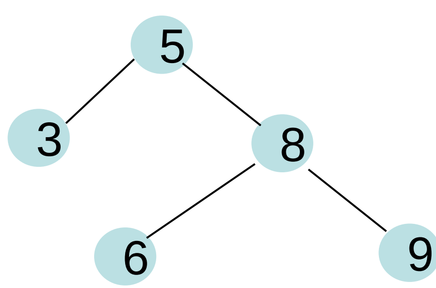
AVL-Bäume: Löschen

x bezeichnet Schlüssel des zu löschenden Elements und t ist der Teilbaum.
Wird aufgerufen mit AVL-Löschen(root[T], 3)

AVL-Löschen(t,x)

1. **if** key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
2. **else** if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
3. **else if** t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
4. **else if** lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
5. **else if** rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
6. **else** u=MaximumSuche(lc[t])
7. Kopiere Informationen von u nach t
8. AVL-Löschen(key[u],lc[t])
9. **if** t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
10. Balance(t)

Löschen(3)

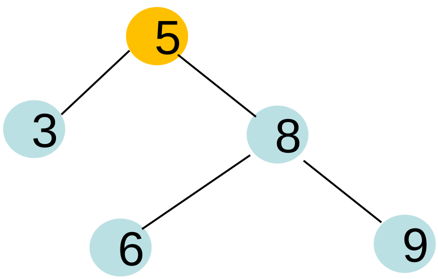


AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

if key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
else if t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
else if lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
else if rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
else u=MaximumSuche(lc[t])
    Kopiere Informationen von u nach t
    AVL-Löschen(key[u],lc[t])
if t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)

Löschen(3)

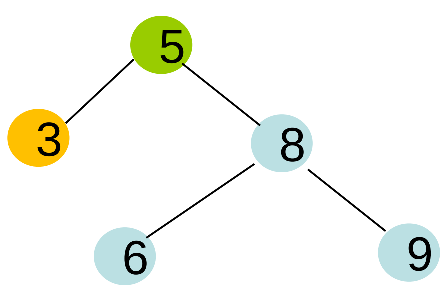


AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

```
if key[x]<key[t] then AVL-Löschen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Löschen(rc[t],x)
else if t=nil then return ➢ x nicht im Baum
else if lc[t]=nil then ersetze t durch rc[t]
else if rc[t]=nil then ersetze t durch lc[t]
else u=MaximumSuche(lc[t])
        Kopiere Informationen von u nach t
        AVL-Löschen(key[u],lc[t])
if t≠nil then h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Löschen(3)



INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

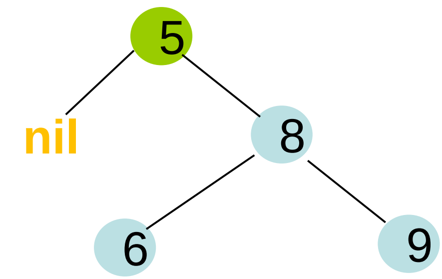
AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

if key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(r
else if t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
else if lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
else if rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
else u=MaximumSuche(lc[t])
        Kopiere Informationen von u nach t
        AVL-Löschen(key[u],lc[t])
if t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)

Und die anderen Zeiger aktualisieren

Löschen(3)



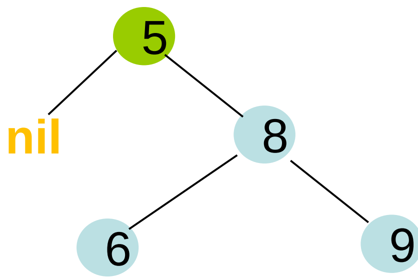
AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

1. **if** key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
2. **else** if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
3. **else if** t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
4. **else if** lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
5. **else if** rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
6. **else** u=MaximumSuche(lc[t])
7. Kopiere Informationen von u nach t
8. AVL-Löschen(key[u],lc[t])
9. **if** t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
10. Balance(t)

Anpassen der Höhe.

Löschen(3)



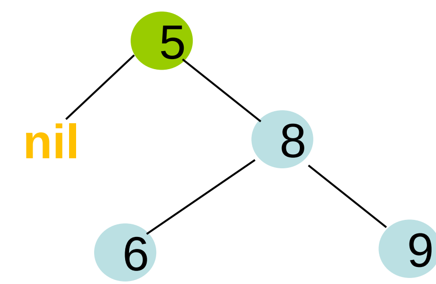
AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

1. **if** key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
2. **else** if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
3. **else if** t=nil **then return** ➢ x nicht im Baum
4. **else if** lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
5. **else if** rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
6. **else** u=MaximumSuche(lc[t])
7. Kopier… von u nach t
8. AVL-L…])
9. **if** t≠nil **then** … [lc[t]], h[rc[t]]}
10. Balance(t)

Nichts zu tun,
da Baum leer.

Löschen(3)

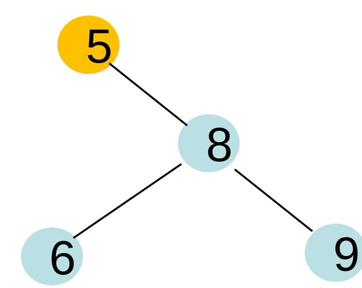


AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

if key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
else if t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
else if lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
else if rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
else u=MaximumSuche(lc[t])
    Kopiere Informationen von u nach t
    AVL-Löschen(key[u],lc[t])
if t$\neq$nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)

Löschen(3)

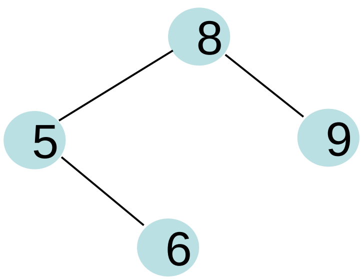


AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

if key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
else if t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
else if lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
else if rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
else u=MaximumSuche(lc[t])
        Kopiere Informationen von u nach t
        AVL-Löschen(key[u],lc[t])
if t $\neq$ nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)

Löschen(3)

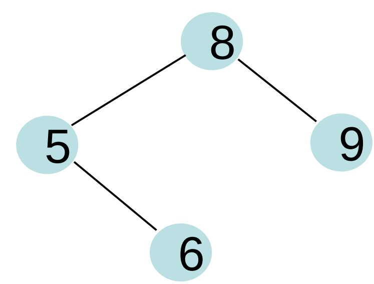


AVL-Bäume: Löschen

AVL-Löschen(t,x)

1. **if** key[x]<key[t] **then** AVL-Löschen(lc[t],x)
2. **else** if key[x]>key[t] **then** AVL-Löschen(rc[t],x)
3. **else if** t=**nil then return** ➢ x nicht im Baum
4. **else if** lc[t]=**nil then** ersetze t durch rc[t]
5. **else if** rc[t]=**nil then** ersetze t durch lc[t]
6. **else** u=MaximumSuche(lc[t])
7. Kopiere Informationen von u nach t
8. AVL-Löschen(key[u],lc[t])
9. **if** t≠nil **then** h[t] = 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
10. Balance(t)

Löschen(3)



Hinweis

- Eventuell muss die Wurzel des Baums (root[T]) angepasst werden

AVL-Bäume: Beweis für Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

AVL-Bäume: Höhe – Obere Schranke

Satz

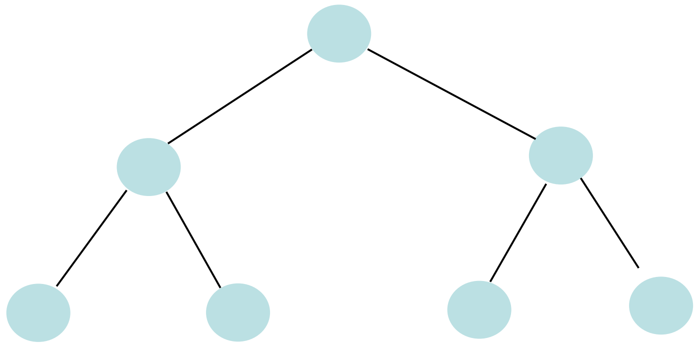
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

a) $n \leq 2^{h+1} -1$:

- AVL-Baum ist Binärbaum



AVL-Bäume: Höhe – Obere Schranke

Satz

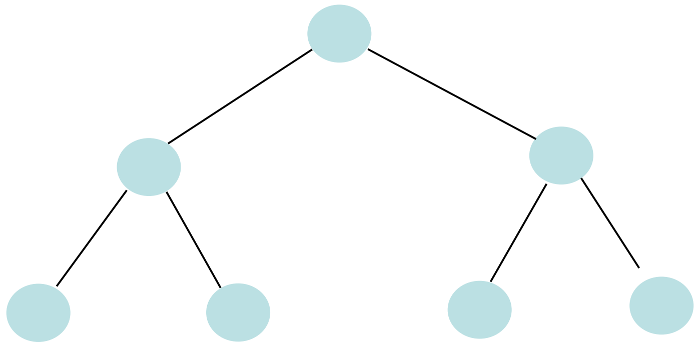
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

a) $n \leq 2^{h+1} -1$:

- AVL-Baum ist Binärbaum
- Ein vollständiger Binärbaum hat eine maximale Anzahl Knoten unter allen Binärbäumen der Höhe h



AVL-Bäume: Höhe – Obere Schranke

Satz

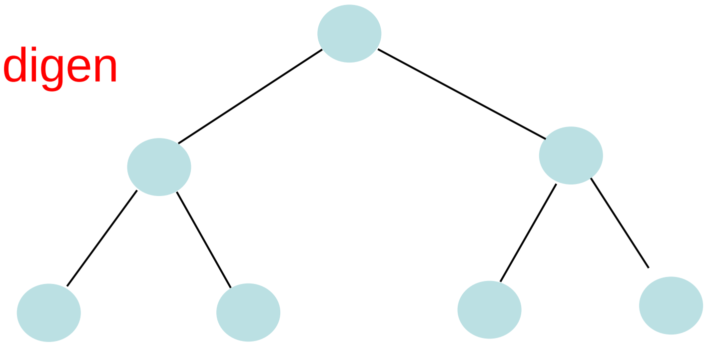
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

a) $n \leq 2^{h+1} -1$:

- AVL-Baum ist Binärbaum
- Ein vollständiger Binärbaum hat eine maximale Anzahl Knoten unter allen Binärbäumen der Höhe h
- N(h) = Anzahl Knoten eines vollständigen Binärbaums der Höhe h



AVL-Bäume: Höhe – Obere Schranke

Satz

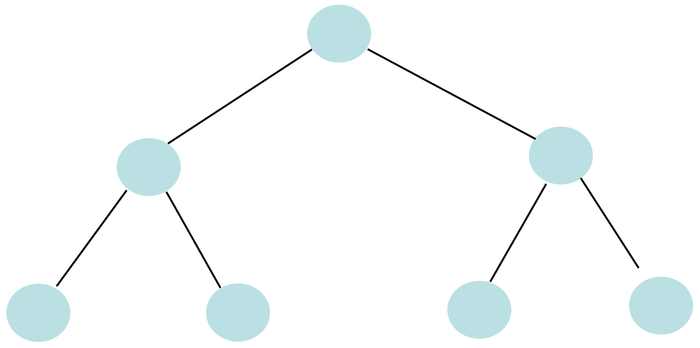
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

a) $n \leq 2^{h+1} -1$:

- N(h) = Anzahl Knoten eines vollständigen Binärbaums der Höhe h



AVL-Bäume: Höhe – Obere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

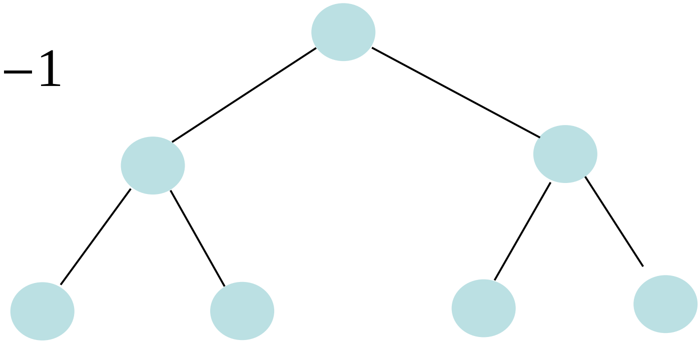
$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

a) $n \leq 2^{h+1} -1$:

- N(h) = Anzahl Knoten eines vollständigen Binärbaums der Höhe h

- $N(h) = 1 + 2 + 4 ... + 2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Beweis per Induktion über die Struktur von AVL-Bäumen

AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Beweis per Induktion über die Struktur von AVL-Bäumen
- (I.A.) Wir betrachten alle AVL-Bäume der Höhe 0 und 1.

AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Beweis per Induktion über die Struktur von AVL-Bäumen
- (I.A.) Wir betrachten alle AVL-Bäume der Höhe 0 und 1.
- h=0: Der Baum hat einen Knoten. Es gilt $(3/2)^h = 1 \leq 1$.

AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

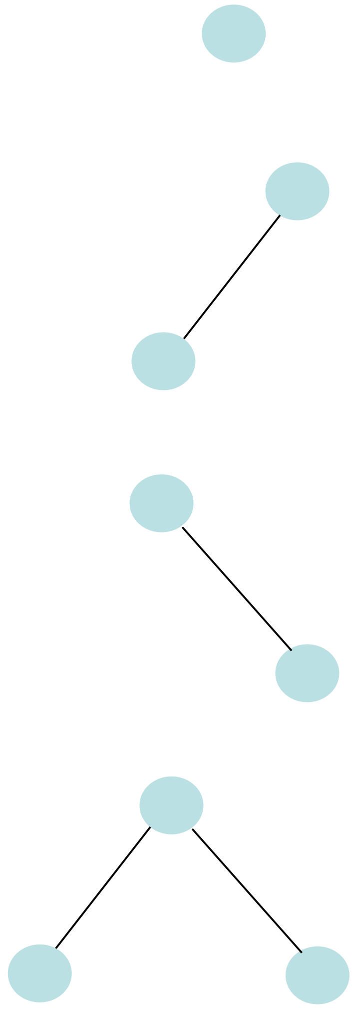
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Beweis per Induktion über die Struktur von AVL-Bäumen.
- (I.A.) Wir betrachten alle AVL-Bäume der Höhe 0 und 1.
- h=0: Der Baum hat einen Knoten. Es gilt $(3/2)^h = 1 \leq 1$.
- h=1: Der Baum hat 2 oder 3 Knoten. Es gilt $(3/2)^h = 3/2 \leq 2 \leq 3$.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

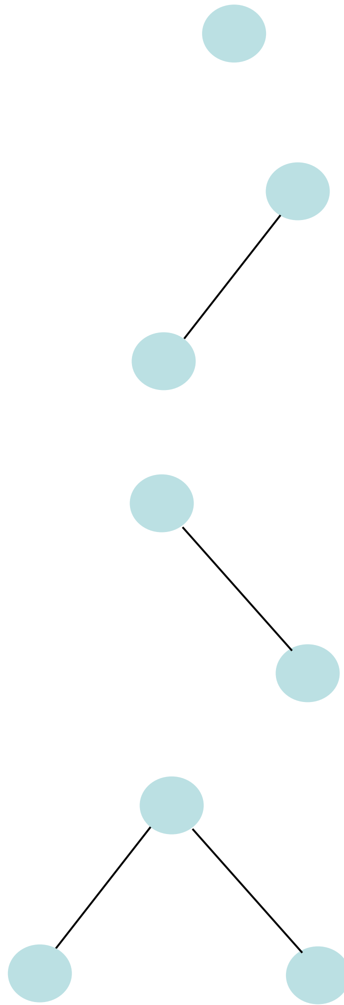
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Beweis per Induktion über die Struktur von AVL-Bäumen.
- (I.A.) Wir betrachten alle AVL-Bäume der Höhe 0 und 1.
- h=0: Der Baum hat einen Knoten. Es gilt $(3/2)^h = 1 \leq 1$.
- h=1: Der Baum hat 2 oder 3 Knoten. Es gilt
  $(3/2)^h = 3/2 \leq 2 \leq 3$.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

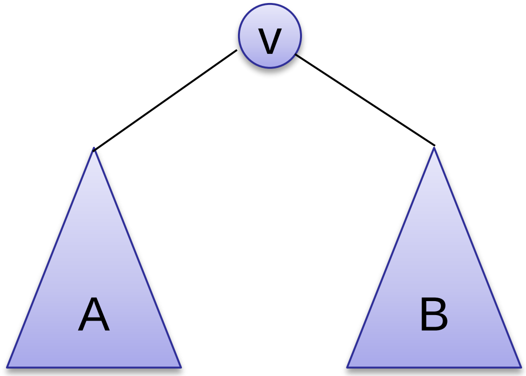
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- (I.V.) Für jeden AVL-Baum der Höhe j, $0 \leq j \leq h$, gilt der Satz.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

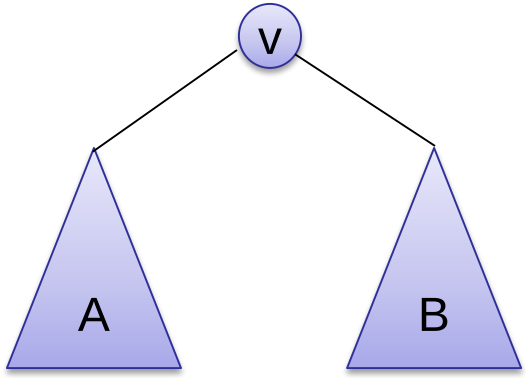
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- (I.V.) Für jeden AVL-Baum der Höhe j, $0 \leq j \leq h$, gilt der Satz.
- (I.S.) Sei h≥1. Betrachte AVL-Baum T der Höhe h+1 mit Wurzel v.
- Seien A,B linker bzw. rechter Teilbaum von v.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

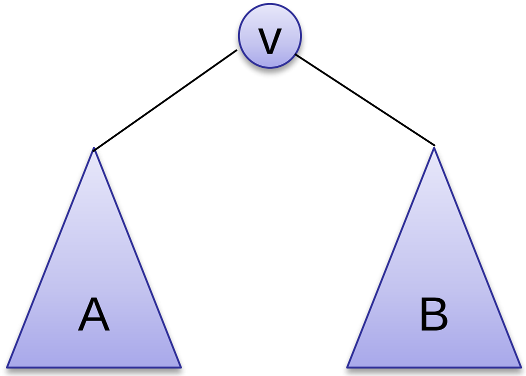
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- (I.V.) Für jeden AVL-Baum der Höhe j, $0 \leq j \leq h$, gilt der Satz.
- (I.S.) Sei $h \geq 1$. Betrachte AVL-Baum T der Höhe h+1 mit Wurzel v.
- Seien A,B linker bzw. rechter Teilbaum von v.
- A oder B (oder beide) hat Tiefe h.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

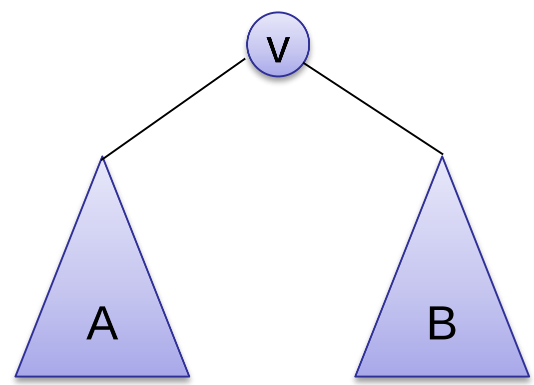
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- (I.V.) Für jeden AVL-Baum der Höhe j, $0 \leq j \leq h$, gilt der Satz.
- (I.S.) Sei h≥1. Betrachte AVL-Baum T der Höhe h+1 mit Wurzel v.
- Seien A,B linker bzw. rechter Teilbaum von v.
- A oder B (oder beide) hat Tiefe h.
- Wegen AVL-Eigenschaft haben A und B Tiefe mindestens h-1≥0.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

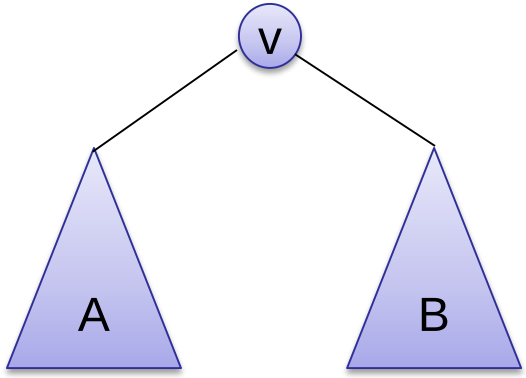
Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- (I.V.) Für jeden AVL-Baum der Höhe j, $0 \leq j \leq h$, gilt der Satz.
- (I.S.) Sei $h \geq 1$. Betrachte AVL-Baum T der Höhe h+1 mit Wurzel v.
- Seien A,B linker bzw. rechter Teilbaum von v.
- A oder B (oder beide) hat Tiefe h.
- Wegen AVL-Eigenschaft haben A und B Tiefe mindestens $h-1 \geq 0$.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

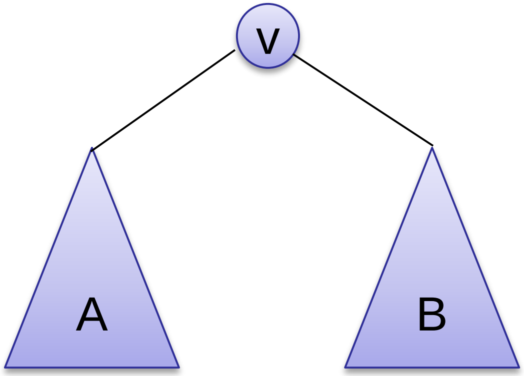
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Wegen AVL-Eigenschaft haben A und B Tiefe mindestens h-1≥0.
- Da T ein AVL-Baum ist, sind auch A und B AVL-Bäume.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

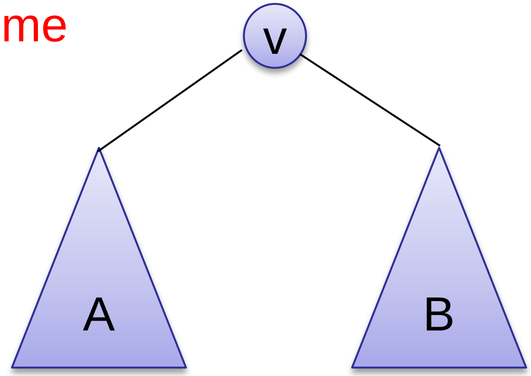
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Wegen AVL-Eigenschaft haben A und B Tiefe mindestens h-1≥0.
- Da T ein AVL-Baum ist, sind auch A und B AVL-Bäume.
- Kann also (I.V.) anwenden, da A und B AVL-Bäume der Tiefe ≥0 sind



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

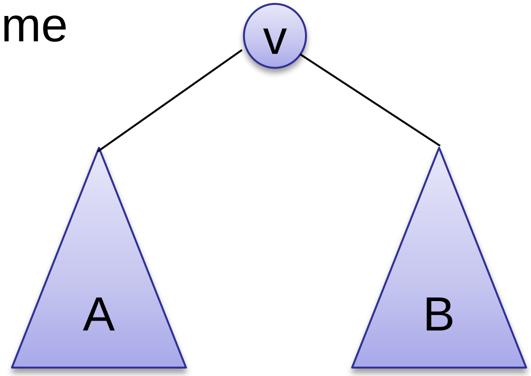
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \leq n$:

- Wegen AVL-Eigenschaft haben A und B Tiefe mindestens h-1≥0.
- Da T ein AVL-Baum ist, sind auch A und B AVL-Bäume.
- Kann also (I.V.) anwenden, da A und B AVL-Bäume der Tiefe ≥0 sind
- Es gibt drei Fälle:
  1) A,B haben Höhe h
  2) A hat Höhe h und B Hat Höhe h-1
  3) A hat Höhe h-1 und B hat Höhe h



INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

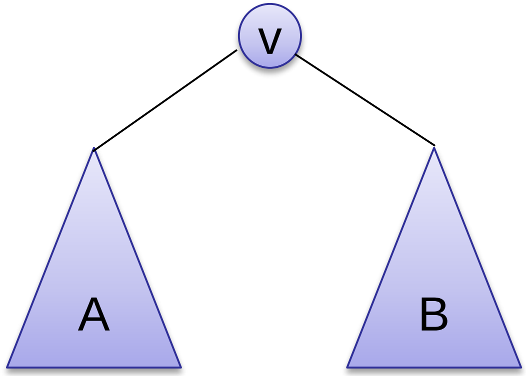
Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \le n \le 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \le n$:

- Sei T(h) die minimale Anzahl Knoten in einem AVL-Baum der Tiefe h.



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

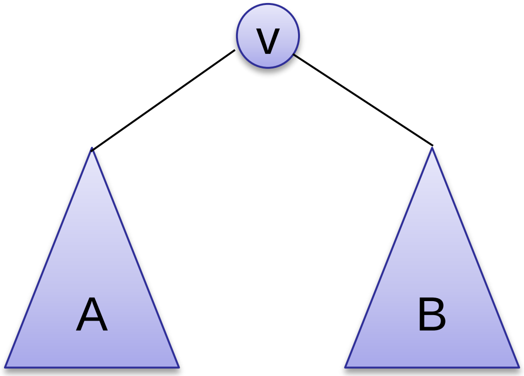
$$(3/2)^h \le n \le 2^{h+1}-1$$

Beweis

b) $(3/2)^h \le n$:

- Sei T(h) die minimale Anzahl Knoten in einem AVL-Baum der Tiefe h.
  Nach (I.V.) gilt in allen drei Fällen

$$T(h+1) \ge T(h) + T(h-1) + 1 \ge \left(\frac{3}{2}\right)^h + \left(\frac{3}{2}\right)^{h-1} + 1$$



AVL-Bäume: Höhe – Untere Schranke

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe h≥0 mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \le n \le 2^{h+1}-1$$

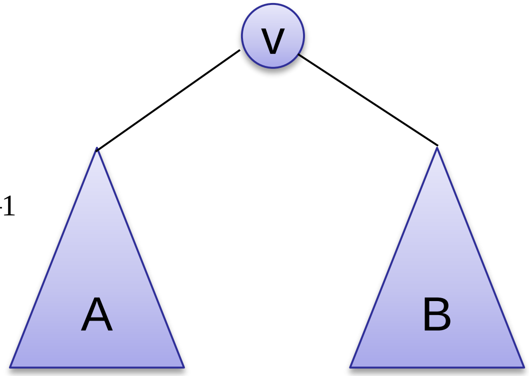
Beweis

b) $(3/2)^h \le n$:

- Sei T(h) die minimale Anzahl Knoten in einem AVL-Baum der Tiefe h. Nach (I.V.) gilt in allen drei Fällen

$$T(h+1) \ge T(h) + T(h-1) + 1 \ge \left(\frac{3}{2}\right)^h + \left(\frac{3}{2}\right)^{h-1} + 1$$

$$\ge (1+3/2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{h-1} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{h-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{h+1}$$



AVL-Bäume: Höhe

Satz

Für jeden AVL-Baum der Höhe $h \geq 0$ mit n Knoten gilt:

$$(3/2)^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

Korollar

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat Höhe $\Theta(\log n)$.

AVL-Bäume Einfügen: Beweis für Höhe

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein Element in einen AVL-Baum der Höhe h eingefügt, so ist der resultierende Baum ein AVL-Baum der Höhe h oder h+1.

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AV

AVL-Einfügen(t,x)
1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➤ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
eingefügt, so ist der resultiere
h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.
- (I.V.): Der Satz gilt für Bäume der Höhe j, -1≤j≤h.

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➤ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.
- (I.V.): Der Satz gilt für Bäume der Höhe j, $-1 \leq j \leq h$.
- (I.S.): Betrachte den Aufruf von AVL-Einfügen in einem AVL-Baum der Höhe $h+1 \geq 0$.

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return     ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
eingefügt, so ist der resultiere
h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.
- (I.V.): Der Satz gilt für Bäume der Höhe j, $-1 \leq j \leq h$.
- (I.S.): Betrachte den Aufruf von AVL-Einfügen in einem AVL-Baum der Höhe $h+1 \geq 0$.
- Sei o.b.d.A. key[x]<key[t] (der andere Fall ist symmetrisch).

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AV

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➤ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
eingefügt, so ist der resultiere
h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.
- (I.V.): Der Satz gilt für Bäume der Höhe j, $-1 \leq j \leq h$.
- (I.S.): Betrachte den Aufruf von AVL-Einfügen in einem AVL-Baum der Höhe $h+1 \geq 0$.
- Sei o.b.d.A. key[x]<key[t] (der andere Fall ist symmetrisch).
- Da $h+1 \geq 0$ ist, wird Zeile (3) ausgeführt.

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
1. if t=nil then
2.     t ← new node(x); h[t]←0 ; return
3. else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. else return     ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Induktion über die Höhe des Baumes.
- (I.A.): Für Bäume der Höhe -1 und 0 ist die Aussage korrekt.
- (I.V.): Der Satz gilt für Bäume der Höhe j, $-1 \leq j \leq h$.
- (I.S.): Betrachte den Aufruf von AVL-Einfügen in einem AVL-Baum der Höhe $h+1 \geq 0$.
- Sei o.b.d.A. key[x]<key[t] (der andere Fall ist symmetrisch).
- Da $h+1 \geq 0$ ist, wird Zeile (3) ausgeführt.

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.

INTERNET NETWORK ARCHITECTURES

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
if t=nil then
    t ← new node(x); h[t]←0 ; return
else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
else return    ➢ Schlüssel schon vorhanden
h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
eingefügt, so ist der resultiere
h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.

AV

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2.   t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h+1, so ist t u.U. ein beinahe-AVL-Baum.

AV

AVL-Einfügen(t,x)
1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El eingefügt, so ist der resultiere h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h+1, so ist t u.U. ein beinahe-AVL-Baum.
- Dies wird durch in Zeile 7 durch Balance korrigiert.

AV

AVL-Einfügen(t,x)

1. **if** t=**nil then**
2. t $\leftarrow$ new node(x); h[t]$\leftarrow$0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] $\leftarrow$ 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
eingefügt, so ist der resultiere
h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h+1, so ist t u.U. ein beinahe-AVL-Baum.
- Dies wird durch in Zeile 7 durch Balance korrigiert.
- Außerdem erhöht Balance die Höhe nicht und verringert sie maximal um 1.

AV

AVL-Einfügen(t,x)
1. **if** t=**nil then**
2. t ← new node(x); h[t]←0 ; **return**
3. **else if** key[x]<key[t] **then** AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. **else if** key[x]>key[t] **then** AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. **else return** ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h+1, so ist t u.U. ein beinahe-AVL-Baum.
- Dies wird durch in Zeile 7 durch Balance korrigiert.
- Außerdem erhöht Balance die Höhe nicht und verringert sie maximal um 1.
- Also hat der Baum nach dem Einfügen Höhe h+1 oder h+2.

AV

```
AVL-Einfügen(t,x)
1. if t=nil then
2.     t ← new node(x); h[t]←0 ; return
3. else if key[x]<key[t] then AVL-Einfügen(lc[t],x)
4. else if key[x]>key[t] then AVL-Einfügen(rc[t],x)
5. else return    ➢ Schlüssel schon vorhanden
6. h[t] ← 1 + max{h[lc[t]], h[rc[t]]}
7. Balance(t)
```

Satz

- Wird mit AVL-Einfügen ein El
  eingefügt, so ist der resultiere
  h+1.

Beweis

- Nach (I.V.) ist der Baum lc[t] nach Einfügen ein AVL-Baum mit Höhe r oder r+1, wobei r die Höhe *vor* dem Einfügen war.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h oder h-1, so ist t ein AVL-Baum.
- Hat lc[t] nach dem Einfügen Höhe h+1, so ist t u.U. ein beinahe-AVL-Baum.
- Dies wird durch in Zeile 7 durch Balance korrigiert.
- Außerdem erhöht Balance die Höhe nicht und verringert sie maximal um 1.
- Also hat der Baum nach dem Einfügen Höhe h+1 oder h+2.

AVL-Bäume Löschen: Aussage für Höhe

Korrektheit von AVL Löschen:

- Ähnlich wie beim Einfügen

Satz

Mit Hilfe von AVL-Bäumen kann man Suche, Einfügen, Löschen, Minimum und Maximum in einer Menge von n Zahlen in $\Theta(\log n)$ Laufzeit durchführen.

Bäume (allgemein)

- *Def.:* Ein **t-ärer Baum** ist entweder die leere Menge oder ein Knoten (ein Objekt) welcher ein Datum und t Kindbäumen enthält, welche t-äre Baume sind.

- *Def.:* Ein **binär Baum** ist entsprechend ein 2-ärer Baum.

Bäume (allgemein)

- Knotenorientierte Bäume: Daten liegen in den Knoten.
- Blattorientierte Bäume: Daten liegen nur in den Blättern.
  - Innere Knoten enthalten nur Zugriffsinformation
- Kantenorientierte Bäume: Daten in den Kanten

Bäume Implementierung

- In einem Array – Dichte Speicherung
  - Vorgänger und Nachfolger werden durch Indexrechnung bestimmt
  - Gut für linksvolle oder rechtsvolle Bäume

- Per Pointer – Gestreute Speicherung
  - Baumklasse hat eine Referenz auf die Wurzel
  - Zeiger zu den Kindern
  - Möglichkeiten
    - Mit/ohne Nullelement
    - Mit/ohne Rückverzeigerung von den Blättern zur Wurzel
    - Statische oder dynamische Methoden zur Veränderung

Traversierung von Bäumen

- Pre-order: Knoten -> Links -> Rechts
- Post-order: Links -> Rechts -> Knoten
- In-order: Links -> Knoten -> Rechts
- Level-order: Schicht nach Schicht von der Wurzel aus
- Erste drei Varianten: Depth first
- Letzte Variante: Breadth first

Traversierung von Bäumen

- Pre-order: Knoten -> Links -> Rechts
- Post-order: Links -> Rechts -> Knoten
- In-order: Links -> Knoten -> Rechts

- Level-order: Schicht nach Schicht von der Wurzel aus

- Erste drei Variante: Depth first
  - Rekursiv implementierbar
  - Iterative Implementierung: Mittels Stack

- Letzte Variante: Breadth first
  - Iterative Implementierung: Mittels Queue (ähnlich zu pre-order)

Formoptimierung bei Bäumen

- Der Baum verliert seine besonderen Eigenschaften, wenn er degeneriert, d.h. kein angemessenes Breiten-Höhen-Verhältnis mehr besitzt, also z.B. zur linearen Kette wird.
  - Formgebung und –erhaltung sind essenziell für die Effizienz

- Freie Bäume:
  - Hier kann sich der Baum frei entwickeln. Beliebige, auch degenerierte Formen können entstehen

Formoptimierung bei Bäumen

- Dynamisch optimierte Bäume
  - Die Operationen Entfernen und einfügen wirken form-erhaltend:
  - Droht der Baum zu degenerieren, so wird eine Umstrukturierung durchgeführt, z.B: AVL.
- Dynamisch optimierte Bäume mit Gewichten
  - Wird auf die im Baum gespeicherten Elemente mit unterschiedlicher Häufigkeit zugegriffen, so kann dies bei der Gestaltung und Platzierung berücksichtigt werden, z.B. Splay Trees.
- Statisch konstruierte Bäume
  - Hier wird Formerhaltung nicht im laufenden Betrieb vorgenommen, sondern bei Bedarf der Baum neu strukturiert.

.

Selbst-balancierende Bäume

- Balancierter Baum: Länge der Pfade von der Wurzel zu jedem Blatt unterscheidet sich um maximal 1

- Selbst-balancierende Bäume
  - Es wird bei jeder Operation auf dem Baum sichergestellt, dass dieser relativ balanciert bleibt
  - Einfügen und Löschen werden teurer, aber dafür kann beim Suchen eine Komplexität von O(log(n)) garantiert werden

  - Beispiele
    - AVL Bäume
    - 2-3 Bäume
    - 2-3-4 Bäume
    - Rot-Schwarz Bäume (red-black trees)

Bäume – Zusammenfassung

- Abbildung von Daten in einer Baumstruktur
  - Natürliche Ordnung der Daten.
  - Für effiziente Verarbeitung: O(log(n)) anstelle von O(n)

- Vier Haupttypen der Traversierung
  - Implementierbar: Rekursiv, stack/queue

- Suchbäume ermöglichen das Suchen in O(log(n))
  - Zusätzlicher Aufwand notwendig, um den Baum beim Einfügen, Löschen balanciert zu halten