3.g Studieretningsprojekt 27/03 – 09/04 2025

Deltagende fag & niveau	Vejleder
Matematik	
Filosofi	

Område
Matematisk logik, sandhed og forståelse

Opgaveformulering
Forklar, hvordan man arbejder aksiomatisk-deduktivt inden for matematikken. Gennemgå forskellige metoder inden for bevisførelse, herunder direkte bevis, induktionsbevis og bevis ved kontraposition. Inddrag konkrete eksempler. Undersøg, hvordan matematikkens symbolsprog kan sammenlignes med John Searles idéer om semantik/syntaks, forståelse og intentionalitet samt Daniel Dennetts modsvar hertil. Vurdér, om matematikkens aksiomatisk-deduktive logiske system giver sandheder. Giv i denne forbindelse erkendelsesteoretiske og bevidsthedsfilosofiske modsvar. Inddrag herunder vedlagte bilag: Thomas Nagel: “Hvordan er det at være en flagermus?” (1974). *Opgaven forventes at have et omfang på 15-25 sider*
Vejlederne attesterer ved opgaveformuleringens upload til Netprøver.dk, at opgaveformuleringen og projektets område har været genstand for drøftelser med eleven og området er godkendt.

Resumé

Dette studieretningsprojekt undersøger det aksiomatisk-deduktive systems rolle i matematikken samt forholdet mellem logisk formalisme og filosofisk erkendelse. Den matematiske del forklarer, hvordan ræsonnement, bevisførelse og logiske systemer anvendes til at udlede matematiske sætninger fra aksiomer. Den filosofiske del undersøger, hvorvidt denne metode fører til egentlig forståelse. Her inddrages John Searles kritik af syntaks uden semantik, og Daniel Dennetts funktionalistiske modsvar. Derudover diskuteres Gödels ufuldstændighedssætning, som viser begrænsningerne i formelle systemer, og Thomas Nagels analyse af subjektivitet og qualia. Projektet konkluderer, at matematikken som formelt system ikke alene kan generere egentlig erkendelse eller sandhed – dette kræver en fortolkende bevidsthed, der tilskriver mening og betydning til det ellers syntaktiske indhold.

Indholdsfortegnelse

Resumé **1**

Indholdsfortegnelse **1**

Indledning **2**

Det aksiomatisk-deduktive system **3**

Ræsonnement *4*

Det deduktive ræsonnement 4

Det induktive ræsonnement 5

Indkapsling *7*

Generalisation *7*

Præsentation af beviser *7*

Logik **7**

Udsagn, sandhedstabeller og konnektiver *7*

Logiske relationer *9*

Inferensregler *10*

Aksiomer og aksiomsystemer *11*

Bevis indenfor et aksiomsystem for udsagnslogik 12

Mere om udsagn *14*

Medfører- og ensbetydende-pile *14*

Bevisførelse **15**

Direkte bevis *15*

Indirekte bevis *16*

Bevis ved kontraposition *17*

Kan matematikken, udsagnslogikken og det aksiomatisk-deduktive system bruges til at finde egentlig sandhed? **18**

Det kinesiske værelse eller: syntaks versus semantik fra det bevidsthedsfilosofiske perspektiv *18*

Systemsvaret *20*

Gödels ufuldstændighedssætning *21*

Nagel, qualia og flagermusen *22*

Konklusion **23**

Litteraturliste **23**

Indledning

Matematik er mere end bare tal og symboler. Det er et sprog, vi bruger til at forstå verden. Den aksiomatisk-deduktive metode er det, vi i matematikken bruger til at søge efter sandheden. Men hvordan kan vi egentlig blive enige om, hvad der er sandt? Kan denne aksiomatisk-deduktive metode, som danner rygraden for al matematik i dag, producere egentlige sandheder? Er der tale om udelukkende syntaks, symbolsprog som ikke i sig selv har nogen betydning uden vores fortolkninger, eller kan dette bære sandheder i sig selv? Det hele bygger på logik, som er noget, matematikken og filosofien har tilfælles. Filosofisk må vi overveje, om vi overhovedet kan erkende sandheder på en intuitiv måde. Begrebet *qualia* giver os en del problemer her; vi kan ikke stole på, at vores omverden objektivt stemmer overens med, hvordan vores hjerner behandler dataene fra vores sanseorganer. Vi kan ikke engang formulere vores subjektive oplevelser fuldstændigt til hinanden. Det er umådeligt vigtigt og interessant, at undersøge dette problem, både i matematikken og filosofiens forstand, for begge fag har det tilfælles, at de søger forklaringer på, hvordan ting hænger sammen. Jeg vil starte med en grundig gennemgang af matematikkens fundament: det aksiomatisk-deduktive system, og den logik, dette system benytter. Her vil vi gennemgå forskellige bevismetoder, vi bruger til at danne nye sætninger ud fra de allerede etablerede. Herefter diskuteres fra et filosofisk perspektiv, hvorvidt dette giver grundlag for at mene, at der faktisk findes sandheder, vi alle kan være enige om trods qualia-problematikken.

Det aksiomatisk-deduktive system

Matematikken er, i bund og grund, en stadig søgen efter sandhed. Disse sandheder, såsom $1+1=2$ og $4x-11=5 \Leftrightarrow x=4$, kan forstås som udsagn, der er afledte af andre udsagn, der allerede er kendt som sande. Sandheden kendes ved korrekte, logiske argumenter. Dette er kendt som ræsonnement, og findes i flere varianter. Oldtidens Grækenlands Euklid (4.-3. årh. f.v.t.) var en af de første til at anvende dette for at bevise nogle matematiske påstande – noget af det første, han påstod, var:

(1) Man kan trække en ret linje fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt.

Grækerne forstod, at sandhederne i matematikken kommer med varierende selvfølgelighed. For eksempel ville nok de færreste ville have indvendinger mod udsagn (1) – det giver sig selv, og føles naturligt. Der er dog nogle problemer med dette udsagn: det kræver, at man kender betydningen af, hvad en "ret linje" og et "punkt" er. Derfor udvider Euklid på dette med nogle definitioner:

(2) Et punkt er det, der ikke kan deles.
(3) En linje er en længde uden bredde.
(4) En ret linje er en linje, som ligger lige mellem punkterne på den.

Disse definitioner kommer med en helt ny række af lignende definitionsproblemer; for hvad er det at "dele", hvad er en "længde" og en "bredde", og hvad vil det sige at "ligge lige"? Man kan blive ved med at grave sig dybere i definitionskaninhullet *ad nauseam*. Her kommer vores første vigtige begreb indenfor bevisførelsen: *primitiver*. Primitiver er de begreber, man vælger ikke at definere. Euklid kunne derfor sagtens have valgt at springe over udsagn 2-4, og bare angive en "ret linje" og et "punkt" som primitiver – hans intention med teksten var tilsyneladende at bruge nogle mere almindelige begreber.

Det første udsagn giver mening, når man har definitionerne på et punkt og en ret linje. Men (1) er ikke selv en definition – det er et ubevist udsagn; en påstand. Euklid argumenterer imidlertid overhovedet ikke for validiteten af påstanden. I stedet accepteres påstanden som en selvfølgelighed, for alting skal begynde et eller andet sted. Man kan ikke blive ved med at bevise ting i uendelighed – dette ville resultere i en uendelig argumentationskæde, som ikke beviser noget som helst alligevel. Altså må det accepteres, at ligesom ikke alt kan defineres, så kan ikke alt bevises. Dette får, ligesom primitiver, et begreb: *aksiomer*.[1] Dette er den første halvdel af begrebet *aksiomatisk-deduktiv* – den anden halvdel, *deduktiv*, finder man i de forskellige typer af *ræsonnement*.

Ræsonnement

Definitionen af ræsonnement er det at ræsonnere. Det lyder vildt overflødigt; mere væsentligt er underdefinitionen: den *"række af argumenter, slutninger m.m. som indgår i denne proces."*[2] Måden, man sammenkobler sine argumenter og drager sine slutninger, kan variere, og findes generelt på to former.

Det deduktive ræsonnement

Når man har valgt nogle aksiomer og nogle primitiver til sin matematiske teori, så er det næste trin at benytte logiske regler til at opnå nye, forskellige sandheder ud fra aksiomerne og primitiverne. Deduktivt ræsonnement handler om at konkludere *noget* med udgangspunkt i en række antagelser (i.e. aksiomer). Der gør man alene af det faktum, at antagelserne er, som de er – altså afhænger det ikke af noget. Et eksempel på en sådan proces er, hvad oldtidens grækere kaldte *syllogisme* – det ærketypiske eksempel er således:

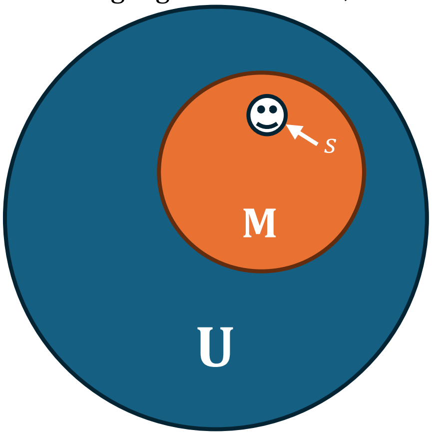
Alle mennesker er dødelige	(1)
Sokrates er et menneske	(2)
Sokrates er dødelig.	(K)

De to øverste udsagn, (1) og (2), er de antagelser, man bruger til at drage konklusionen (K). Dette kan sammenlignes med Toulmins argumentationsmodel, hvor (K) er påstanden, (2) er belægget og (1) er hjemlen. Så længe, man accepterer antagelserne, så må man nødvendigvis også acceptere konklusionen – hvis nu der er tale om et gyldigt argument med solid logisk sammenhæng. Betragt et lignende argument, men med andre antagelser:

Alle mennesker er udødelige	(1)
Sokrates er et menneske	(2)
Sokrates er udødelig.	(K)

[1] (Brandt & Nissen, 1995, s. 7-8)
[2] ordnet.dk. "ræsonnement – Den Danske Ordbog". https://ordnet.dk/ddo/ordbog?query=ræsonnement (dato 2025-03-28)

Here er der også tale om en korrekt logisk slutning, selvom det selvfølgelig ikke er sandt, at alle mennesker er udødelige. Om antagelserne er sande, er altså ikke afgørende for korrektheden af argumentet. Det er udelukkende formen, der afgør dette. Det medfører, at hvorvidt antagelserne er sande, kun påvirker, om konklusionen er sand. Man kan med fordel visualisere dette ved at påføre et "hvis" foran: "Hvis alle mennesker er udødelige, så må Sokrates være udødelig, for Sokrates er et menneske." Denne sætning er tydeligvis et eksempel på en korrekt logisk slutning, selvom præmissen ikke holder. En anden måde at visualisere et syllogistisk argument på, er gennem delmængder;[3] lad $s \in \mathbf{M} \subseteq \mathbf{U}$, hvor s er Sokrates, **M** er en mængde ("alle mennesker") og **U** er en mængde ("udødelige væsener"); da s er et element i mængden **M**, og mængden **M** er en delmængde af **U**, må s også være et element i mængden **U** – Sokrates er udødelig, ifølge antagelserne samt deduktionen. Dette er illustreret i Figur 1.



Figur 1: en illustration af en syllogisme gennem delmængder.

Som tidligere nævnt, er antagelserne i deduktivt ræsonnement som dette, repræsentativt for aksiomerne i en matematisk teori. Det vil sige, at aksiomerne i en matematisk teori faktisk ikke behøver at være sande. Rollen af aksiomerne er altså at danne et grundlag for at drage konklusioner gennem deduktivt ræsonnement. Hvis man accepterer aksiomerne som sande, så tvinger det ræsonnement os til at acceptere konklusionerne som sande. Processen af at ræsonnere deduktivt beskæftiger sig altså ikke med validiteten, sandhedsværdien, af aksiomerne. I den aksiomatisk-deduktive metode er det, som navnet hentyder til, udelukkende det deduktive ræsonnement, man skal bruge for at drage konklusioner for at optage dem i en matematisk teori. Konklusionerne går under navnet *sætninger*, og deduktionerne kaldes sætningens *bevis*. Dette princip blev opfattet af Aristoteles som den ideelle metode, og det har den været lige siden. Metoden er stort set uændret i dag.[4]

Det induktive ræsonnement

Den aksiomatisk-deduktive metode er standarden for matematisk teori. Som fornævnt skal der udelukkende et deduktivt argument til for, at en sætning kan accepteres i en sådan teori. Det betyder imidlertid ikke, at det induktive ræsonnement ikke har sin plads i matematikken. Det induktive ræsonnement handler om at drage en generel konklusion på baggrund af en række iagttagelser; altså går man fra noget specifikt til noget generelt, i modsætning til det deduktive

[3] (Euler diagram - Wikipedia, u.d.)
[4] (Brandt & Nissen, 1995, s. 8-9)

ræsonnement. Det er noget, man hele tiden ser i fx naturvidenskaben, hvor man ved brug af empiri i.e. eksperimenter/forsøg samler noget data, man kan bruge til at bestemme gyldigheden af en relevant hypotese. Tag for eksempel Galileis faldlove, som beskriver den tilbagelagte vejlængde ved et frit fald i vakuum, som er et resultat af bruget af induktivt ræsonnement. Man har ved forsøg gang på gang kunne vise, at der gælder sammenhængen $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, med g som tyngdeaccelerationen og t som tiden. Ikke et eneste forsøg har givet data, der modstår sammenhængen. Derfor sluttes der induktivt, at sammenhængen gælder for alle frie fald i vakuum.

Som sagt har denne type ræsonnement også en vigtig rolle i matematikken, selvom den ikke i sig selv kan bruges til at bevise en påstand; i stedet har det rollen som metode til at opdage resultater og sammenhænge. For eksempel kan man observere, at summen af de to første ulige tal, 1 og 3, er 4, summen af de første tre ulige tal er 9, og summen af de første fire ulige tal er 16. Her ser det ud til, at summen altid er et kvadrattal:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Her kan man se et mønster – men kan man slutte noget som helst generelt ud fra det? Man skulle tro, at det samme mønster vil fremkomme for enhver sum af de første n ulige tal, hvor n er et vilkårligt naturligt tal. Et induktivt argument ville altså føre til konklusionen, at følgende gælder for alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Det er selvfølgelig ikke garanteret, at konklusionen holder for et vilkårligt n blot ud fra faktummet, at den holder i 3 specielle tilfælde. Så snart man finder et enkelt naturligt tal for hvilket konklusionen ikke holder, så må hele konklusionen forkastes. Da man ikke kan prøve alle naturlige tal ud (der er uendeligt mange af dem), så må det eneste, der kan føre til accept af konklusionen, altså være et deduktivt argument.

De to metoder, deduktivt og induktivt ræsonnement, går hånd i hånd i matematikken. Man bruger det induktive ræsonnement til at opdage sammenhængene, og så bruger man det deduktive ræsonnement til at argumentere for sætningens gyldighed. Det deduktive ræsonnement tager udgangspunkt i de aksiomer, der findes indenfor den matematiske teori, påstanden er formuleret i.[5]

[5] (Brandt & Nissen, 1995, s. 9-10)

Indkapsling

Generalisation

Præsentation af beviser

(1.4: serveringen, begreber lemma, korollar, sætning. Gør dette kort, måske)

Logik

Ræsonnement bygger på logik. Matematisk teori bygger på ræsonnement. Ergo må matematisk teori bygge på logik. Dette er i sig selv en logisk slutning, og er absolut essentielt til det deduktive ræsonnement. For at tage den intuitive logik, mennesker har, og gøre den anvendelig i den aksiomatisk-deduktive metode, må den abstrakteres og derved transformeres til et symbolsprog. Logisk symbolsprog begynder med konceptet om *udsagn*.

Udsagn, sandhedstabeller og konnektiver

I sin simpleste forstand kan logiske udsagn forstås som elementer i en vis mængde **U**, som hver især har en *sandhedstildeling* v:

$$v\colon \mathrm{U} \to \{\text{sand}, \text{falsk}\}$$

Altså kan der knyttes enten værdien **sand** eller værdien **falsk** til ethvert udsagn. Disse udsagn betegnes som "simple" – senere hen indføres begrebet *sammensatte udsagn*, som er mere komplette. For simple udsagn betragtes kun den helt abstrakte situation. Sammensatte udsagn dannes ved at kombinere simple udsagn med *logiske konnektiver*, som er symboler, man bruger til at forbinde to udsagn, og parenteser, som bruges til at sætte hierarki i formlerne, præcist som i den øvrige matematik. Betydningerne af de logiske konnektiver er som følgende:

Symbol og syntaks	Navn	Betydning
$\neg$ A	Negation	ikke A
(A $\wedge$ B)	Konjunktion	A og B
(A $\vee$ B)	Disjunktion	A eller B
(A $\rightarrow$ B)	Implikation	B hvis A
(A $\leftrightarrow$ B)	Bi-implikation	A hvis, og kun hvis, B

Figur 2: Logiske konnektiver og deres betydning.

Her er A og B selv sammensatte udsagn, altså kan dette bruges i et vilkårligt antal lag. For at forstå den sandhedsmæssige betydninger af disse forbindelser, anskues såkaldte *sandhedstabeller*. Starter man med at konstruere en komplet sandhedstabel ud fra ét enkelt udsagn **A**, får man:

A	¬ A
sand	**falsk**
falsk	**sand**

Figur 3: Sandhedstabel for alle sandhedstildelinger til et enkelt udsagn **A**.

”Ikke”-konnektivet er det eneste, man kan sætte på et enkelt udsagn. For hver mulige sandhedsværdi for **A** (som set i første kolonne), må det modsatte gælde for ¬ **A.** Indfører man et sekundært udsagn **B**, kan man bruge de andre konnektiver, og se, hvordan det forholder sig for alle kombinationer af sandhedstildelinger:

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B
sand	**sand**	**sand**	**sand**	**sand**	**sand**
sand	**falsk**	**falsk**	**sand**	**falsk**	**falsk**
falsk	**sand**	**falsk**	**sand**	**sand**	**falsk**
falsk	**falsk**	**falsk**	**falsk**	**sand**	**sand**

Figur 4: Sandhedstabel for ethvert konnektiv mellem alle kombinationer af sandhedstildelinger for **A** og **B**.

Ud fra sandhedstabellen kan man skue opførslen af de forskellige konnektiver. Fx er det sandt, at et sandt udsagn implicerer et andet sandt udsagn, men forbløffende nok er det også sandt, at et falsk udsagn implicerer et sandt udsagn. Disse tabeller kan, ligesom de sammensatte udsagn, gå vilkårligt dybt i lagene af sammensætning, altså kan man fx konstruere en sandhedstabel for (**A** → (**A** ∨ **B**)) ∧ (**B** → **A**) eller noget endnu skørere. Måden, man gør dette på, er blot at starte udefra, og dele det sammensatte udsagn op i to sammensatte deludsagn og ét konnektiv, i.e. (**A** → (**A** ∨ **B**)), ∧ og (**B** → **A**). Man bliver ved med denne proces indtil man har to simple udsagn og ét konnektiv, i.e. **B**, → og **A**, som set på højresiden af ovenstående udsagn. På venstresiden ville man opdele to gange: **A,** → og (**A** ∨ **B**), og derefter på højresiden af denne **A**, ∨ og **B**. Fra dette punkt af kan man bruge opslag i ovenstående tabel til at finde sandhedsværdierne, og gå op gennem lagene derfra. Den resulterende sandhedstabels søjler skal bestå af de to simple udsagn samt hvert deludsagn, opdelingerne giver anledning til. Altså ville søjlerne i dette eksempel være **A**, **B**, **A** ∨ **B**, **A** → (**A** ∨ **B**), **B** → **A** og til sidst det fulde udsagn, (**A** → (**A** ∨ **B**)) ∧ (**B** → **A**).

Et sidste for nu relevant par symboler er **T** og **K**. Et sammensat udsagn **A** kaldes en *tautologi* (**T**), hvis $v(\mathbf{A}) =$ **sand** for enhver sandhedstildeling v på **U**. Tilsvarende kaldes det en *kontradiktion* (**K**), hvis $v(\mathbf{A}) =$ **falsk** for det samme. Man kan vise, at **A** ∨ ¬ **A** er en tautologi ved brug af sandhedstabellerne således:

A	¬ A	A ∨ ¬ A
sand	**falsk**	**sand**

falsk	**sand**	**sand**

Figur 5: Sandhedstabel, der viser, at $A \vee \neg A \equiv T$.

Her bliver det tydeligt, at det for enhver sandhedstildeling til **A** gælder, at $\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{A}$ er sandt. Det modsatte, at $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{A}$ er en kontradiktion, kan vises på tilsvarende vis.[6]

Logiske relationer

Forskellige sammensatte udsagn med identiske sandhedstabeller siges at være *logisk ækvivalente*. Mere specifikt, hvis **A** og **B** er to sammensatte udsagn, og $v(\mathbf{A}) = v(\mathbf{B})$ for enhver sandhedstildeling v, så bruger man et "tredobbelt lighedstegn", og skriver, at $A \equiv B$. Det vil også sige, at man for ethvert forekomst af **A** kan erstatte det med **B**, hvis $A \equiv B$, og vice versa. Der er mange logiske ækvivalenser, man med fordel kan bruge i deduktivt ræsonnement, som alle er efterviselige gennem sandhedstabeller. Nogle eksempler:

$$\neg(\neg A) \equiv A$$

Loven om dobbelt negation

$$A \vee T \equiv T$$

$$A \wedge K \equiv K$$

Dominationslovene

Derudover er det sandt, at hvis **A** og **B** er logisk ækvivalente, så må deres sandhedsværdier være identiske for den samme sandhedstildeling v. De har altså altid samme sandhedsværdi, enten er begge falske eller begge sande. Ud fra definitionen af konnektivet $\leftrightarrow$, som set i Figur 4, må det gælde, at $A \leftrightarrow B \equiv T$ hvis $A \equiv B$. Omvendt passer det også, at hvis $A \leftrightarrow B \equiv T$, så $A \equiv B$. Det må derfor passe, at

$$A \equiv B \text{ hvis, og kun hvis, } A \leftrightarrow B \equiv T,$$

Altså er der en logisk bi-implikation mellem relationerne.[7] Tegnet $\equiv$ er en *relation*, og er et niveau højere end konnektiver, da de forklarer noget om relationen mellem to udsagn sammensat af konnektiver. [citation needed]

Tilsvarende findes der en relativ ækvivalent af konnektivet "implikation", nemlig *logisk implikation*. Hvis $v(\mathbf{B})$ altid er sand, når $v(\mathbf{A})$ er sand, skriver man, at $\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$, hvilket betyder, at **A** *logisk implicerer* **B**. Hvis $\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$, så kan situationen, hvor $v(\mathbf{A}) = \mathbf{sand}$ og $v(\mathbf{B}) = \mathbf{falsk}$, ikke forekomme. Af sandhedstabellen i Figur 4 ses det, at implikationen $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ da altid vil være sand – det ene tilfælde, hvor denne er falsk, kan ikke forekomme af ovenstående grunde. Med andre ord må det passe, at hvis $\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$, så $A \rightarrow B \equiv T$. Omvendt passer det også, at hvis $A \rightarrow B \equiv T$, så

[6] (Brandt & Nissen, 1995, s. 17-20)
[7] (Brandt & Nissen, 1995, s. 21-24)

$\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$, da det ses på sandhedstabellen i Figur 4, at situationen $v(\mathbf{A}) = \mathbf{sand}$ og $v(\mathbf{B}) = \mathbf{falsk}$ ikke kan forekomme, hvis $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ er en tautologi. Med dette har vi vist, at

$\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$ hvis, og kun hvis, $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \equiv \mathrm{T}$

Slutteligt forbindes de to tegn $\equiv$ og $\vDash$ af følgende grunde. Hvis $\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$, så siges **A** at være en *tilstrækkelig betingelse* for **B**. Modsat siges **B** at være en *nødvendig betingelse* for **A**. Dette er jo fordi, at hvis $v(\mathbf{B}) = \mathbf{sand}$, så skal det nødvendigvis gælde, at $v(\mathbf{A}) = \mathbf{sand}$. **B** kan ikke være sand uden, at **A** også er, men **B** kan godt være falsk, selvom **A** er sand. Når $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$, så er der tale om en *nødvendig og tilstrækkelig betingelse* mellem begge udsagn. Altså gælder det, at

$\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ hvis, og kun hvis, $\mathbf{A} \vDash \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \vDash \mathbf{A}$.[8]

Inferensregler

Måden, man bestemmer gyldigheden af en logisk implikation, kan naturligvis sagtens være at bruge sandhedstabeller. Lettere dog er det ofte at bruge andre logiske implikationer. Eksempelvis viser den logiske ækvivalens $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \equiv \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ ved kombination med den logiske implikation $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vDash \mathbf{B}$, at der er en logisk implikation $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vDash \mathbf{B}$. Denne implikation sikrer, at **B** er sand, når venstresiden er det, og er et vigtigt eksempel på en *inferensregel*, nemlig *Modus Ponens*. Inferensregler som Modus Ponens kan skrives enten på formen

Fra **A** og $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ slut **B**,

eller på skematisk form som

<u>Modus Ponens</u>

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \\ \hline \therefore \mathbf{B} \end{array} \qquad\qquad \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \vDash \mathbf{B}$$

Alle inferensregler kommer fra en logisk implikation eller en logisk ækvivalens. En inferensregel eksisterer netop hvis $(\mathbf{U}_1 \wedge \mathbf{U}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{U}_\mathrm{n}) \vDash \mathbf{U}$, og følger følgende format:

$$\begin{array}{l} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_\mathrm{n} \\ \hline \therefore \mathbf{U} \end{array}$$

[8] (Brandt & Nissen, 1995, s. 24)

Der findes en masse nyttige inferensregler. Her nævner jeg tre specielt relevante:

Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \\ \neg \mathbf{B}\end{array}}{\therefore \neg \mathbf{A}} \qquad (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge \neg \mathbf{B} \vDash \neg \mathbf{A}$$

Syllogismereglen

$$\frac{\begin{array}{l}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}\end{array}}{\therefore \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}} \qquad (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}) \vDash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})$$

Reductio ad Absurdum

$$\frac{\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}}{\therefore \mathbf{A}} \qquad (\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}) \vDash \mathbf{A}$$

Syllogismereglen er, som navnet hentyder til, den inferensregel, der giver syllogismer deres format. Det tidligere eksempel med Sokrates fungerer derfor netop gennem syllogismereglen, hvor **A** er "man er Sokrates", **B** er "man er menneske" og **C** er "man er dødelig". Altså er det opstillet som "at man er Sokrates implicerer, at man er menneske. At man er menneske implicerer, at man er dødelig. Derfor implicerer det, at man er Sokrates, at man er dødelig." Reductio ad Absurdum er en inferensregel, man også kender som modstrid; kerneelementet ved et indirekte bevis – dette vender vi tilbage til senere.[9]

Aksiomer og aksiomsystemer

Det er muligt at opbygge udsagnslogikken rent aksiomatisk. Det vil sige, at man bruger den selv samme aksiomatiske metode, som afsnittet "Den aksiomatisk-deduktive metode" omhandler. Her tilføjes kun den aksiomatiske del; udsagnslogikken er i sig selv allerede udelukkende deduktiv. Den aksiomatiske metode opererer med begrebet *beviselighed*. Visse udtryk kan bevises ud fra

[9] (Brandt & Nissen, 1995, s. 25-27)

aksiomerne. Selvom begreberne ”sand” og ”falsk” ikke nævnes, vil det dog vise sig, at alt, der *kan* bevises, helt af sig selv bliver sandt efter en sandhedstildeling er valgt. Altså kan sande udsagn produceres helt uden brug af sandhedstabeller eller lignende.

Når man skal arbejde aksiomatisk med udsagnslogikken må man vælge et sæt primitiver, inferensregler og aksiomer, der skal være til rådighed til at arbejde med indenfor systemet. Man behøver blot de to konnektiver $\neg$ og $\rightarrow$ for at kunne udtrykke de øvrige almindelige konnektiver $\wedge$, $\vee$ og $\leftrightarrow$ – beviset for dette findes, men er ikke relevant for opgaven. Mindst én inferensregel og nogle aksiomer skal vælges, for at vi kan udlede nye resultater og sætte deduktionsprocessen i gang. Lad os vælge systemet som sådan:

- **Primitiver** $\neg$, $\rightarrow$, (,) og en mængde **U** med udsagnssymboler såsom **A**, **B**, osv.
- **Inferensregler** Modus Ponens
- **Aksiomer**
    - $\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A})$
    - $\big(\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C})\big) \rightarrow \big((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C})\big)$
    - $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\, \mathbf{B} \rightarrow \neg\, \mathbf{A})$

Aksiomerne skal, som pr deres definition, ikke bevises. Lad os nu anskue egenskaberne ved dette system. Mængden af *velformede udtryk* (vilkårlige sammensatte udsagn) består af indholdet af mængden **U**, og alle udtryk på formen $\neg\, \mathbf{A}$ og $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$, hvor **A** og **B** begge selv er velformede udtryk. Alle tre valgte aksiomer er dermed velformede udtryk. Fremover vil udtryk blot være en forkortelse for velformede udtryk.

Bevis indenfor et aksiomsystem for udsagnslogik

Et bevis for et udtryk **B** ud fra en række udtryk $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\mathrm{n}$ forstås som en kæde af velformede udtryk, som slutter med **B**. Hvert led er enten et aksiom, en del af udtryksrækken $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\mathrm{n}$, eller følger af to tidligere udtryk i kæden gennem inferensreglen Modus Ponens. I så fald kaldes udtrykket **B** beviseligt. Dette noteres som $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_\mathrm{n}\} \vdash \mathbf{B}$. Symbolet $\vdash$ betyder altså, venstresiden beviser højresiden *syntaktisk*. At det er syntaktisk betyder, at bevis indenfor denne kontekst er noget rent formelt. Der er ikke tale om sandhed eller det modsatte, men udelukkende symbolmanipulation. Det er kun hvis elementerne i mængden **U** opfattes som simple udsagn, at der kan tales om sandhedstildelinger. Hvis dette gælder, bliver aksiomerne automatisk sande, da de faktisk er tautologier. De inferensregler, der er valgt som værktøj til at lave udledninger, bevarer sandhed. Derfor bliver alle udledningerne, man har lavet indenfor sit aksiomsystem, dvs. de beviselige udtryk, man har fundet frem til, sande under en vilkårlig sandhedstildeling v.

Rækken af udtryk i et bevis, der beviser $\mathbf{B}$, altså rækken $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$, kaldes antagelserne. Antagelserne har ved deres natur den egenskab, at hvis de er sande under en givne sandhedstildeling v, så må $v(\mathbf{B}) = \mathbf{sand}$. Altså er et beviseligt udsagn som $\mathbf{B}$ i et bevis $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\} \vdash \mathbf{B}$, logiske implikationer af deres antagelser. Altså følger $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{A}_n \vDash \mathbf{B}$ af $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n\} \vdash \mathbf{B}$. Bevis er altså på samme form som en inferensregel! Uden disse antagelser kan vi kun bevise tautologier. Dvs. ud fra blot aksiomerne og inferensreglerne i aksiomsystemet, er det kun muligt at bevise udsagn, der vil være sande under enhver sandhedstildeling.

Et eksempel på en tautologi, vi i dette aksiomsystem kan bevise udelukkende ud fra de valgte aksiomer og inferensreglen Modus Ponens, er $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Det er ret intuitivt at indse, at det altid er sandt, at et udsagn implicerer sig selv – men aksiomatisk må vi bevise det ved at starte med aksiomsystemets første aksiom, $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$. Erstatter vi $\mathbf{B}$ med $\mathbf{A}$ i dette får vi

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A}).$$

Dette er gyldigt at gøre på præcist samme måde, som det er gyldigt at bruge en anden variabel (i.e. x_0) som argument for en funktion af x. Lad dette være første led af argumentationskæden. Næste led får vi ved at erstatte $\mathbf{B}$ i det første aksiom med $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \to \big((\mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}\big)$$

Det tredje led får vi så ved at tage det andet aksiom i systemet,

$$\big(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})\big) \to \big((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})\big),$$

og erstatte $\mathbf{B}$ med $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ og $\mathbf{C}$ med $\mathbf{A}$:

$$\Big(\mathbf{A} \to \big((\mathbf{A} \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}\big)\Big) \to \Big(\big(\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})\big) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})\Big)$$

Når vi bruger inferensreglen Modus Ponens med det andet og tredje led, får vi

$$\big(\mathbf{A} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})\big) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{A})$$

Efter endnu en gang Modus Ponens (den er ret nyttig, og er vores eneste værktøj) med det fjerde og første led, fås

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}.$$

Vi har uden brug af antagelser godtgjort beviseligheden af $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Det formuleres som $\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{A})$. Den manglende række udtryk før symbolet $\vdash$ symboliserer, at udsagnet til højre for det holder uden antagelser, fordi det er en tautologi. Der findes dog en meget lettere metode til at bevise denne implikation, og andre implikationer på formen $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Det gør man gennem *deduktionslemmaet*, hvilket siger, at

Hvis $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$, så $\mathbf{X} \vdash (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$,

hvor **X** er en mængde af antagelser. Et *lemma* er en hjælpesætning, et teknisk resultat, der skal bruges i en efterfølgende sætning.[10] Beviset for dette er alt for kompliceret til at gennemgå her, men den giver muligheden for at etablere en implikation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ved at antage **A** og bevise **B**, dvs. $\{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$. Beviser bliver ret komplicerede at føre i det system, vi har valgt. Der er en ret minimal mængde aksiomer, primitiver og inferensregler til rådighed, så selvom alt egentlig kan bevises gennem dette system (i.e. de øvrige konnektiver og andre gængse aksiomer), så kan det være givtigt at benytte et aksiomsystem med flere egenskaber. Det er dog ret almindeligt, at man med et aksiomsystem ikke begynder med aksiomer, der kan bevises vha. de øvrige. Fx har den amerikanske logiker Stephen C. Kleene udviklet et aksiomsystem med 10 aksiomer, Modus Ponens og primitiverne $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, (,) og **U**. Hele udsagnslogikken kan, ligesom med det aksiomsystem vi lige har undersøgt, udvikles gennem Kleenes system. Forskellen er blot, at det ikke er nær så besværligt at udføre bevis i dette system.[11]

Mere om udsagn

Alt mellem s. 33-44 i QED overvejer jeg at tilføje her.

Medfører- og ensbetydende-pile

Man kan forkorte notationen

$$\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m, \mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B},$$

hvor $\mathbf{A}_i$ er vores aksiomer og $\mathbf{S}_j$ er tidligere beviste sætninger, som viser, at udsagnet **B** følger fra udsagnet **A**, til notationen

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}.$$

Denne notation gør det meget lettere at opskrive beviser, fordi det ikke længere bliver nødvendigt at opskrive samtlige velkendte aksiomer osv. Vi kan fx aritmetisk skrive

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

fordi symbolet $\Rightarrow$ forkorter den langsommelige proces af at opskrive de distributive og kommutative love for hele tal op, væk. $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ har egenskaber, der minder om inferensregler hvad angår beviselighed, fx sætningen:

Hvis **A** er beviselig og $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, så er **B** beviselig.

[10] (Brandt & Nissen, 1995, s. 15)
[11] (Brandt & Nissen, 1995, s. 27-33)

Dette følger definitionen af medfører-pilen ($\Rightarrow$). Hvis **A** er beviselig, kan et bevis for **A** blot indsættes ved første forekomst af **A** i beviset $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{A}\} \vdash \mathbf{B}$, hvor **X** er vores aksiomer og de tidligere beviste sætninger, for at opskrive et bevis for **B**. Helt tilsvarende med, at der findes en bi-implikationspil ($\leftrightarrow$) til konnektivet implikation ($\rightarrow$), og den logiske ækvivalens $\equiv$ i forhold til den logiske implikation $\vDash$, så er der også en tovejs-udgave at medfører-pilen, nemlig ensbetydende med-pilen, $\Leftrightarrow$. Denne fungerer på helt tilsvarende måde som de øvrige par:

> $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$ hvis, og kun hvis, $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$.[12]

Bevisførelse

Det system, vi gennemgik tidligere, hvor man kan formå at føre bevis gennem et aksiomsystem for udsagnslogik, fungerer. Det er endda ret præcist. Men det er ikke særligt praktisk. Selv simple sætninger bliver hurtigt komplicerede at bevise i et sådant system. Så selvom systemet er rygraden for alt matematisk bevisførelse – for det er jo bygget på grundlaget af logik og aksiomers reneste form – så er det ikke noget, der egentlig bruges til bevisførelse i praksis. Systemet har hverken matematisk intuition eller nogen fremgangsmetode for rent faktisk at finde et bevis for en given sætning. Imidlertid findes der dog nogle metoder, som kan hjælpe.[13]

Når en sætning er bevist, skriver vi Q.E.D. eller symbolet ■.

Direkte bevis

Den første metode, man kan bruge til bevisførelse, er *direkte bevis*. Mange matematiske sætninger er på formen

> Hvis **A**, så **B**.

Dette kan forstås som en implikation, her en medførelse $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$. Et direkte bevis for en sådan sætning består af at etablere en slutningskæde fra **A** til **B** som

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}.$$

Hvert trin i kæden skal være resultatet af en korrekt logisk slutning, dvs. at man anvender en logisk slutningsregel, hvori aksiomer og tidligere beviste sætninger, præcis som, hvad medfører-pilen forkorter.[14] Lad os gennemgå et direkte bevis for sætningen:

> For alle positive reelle tal a og b gælder $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

[12] (Brandt & Nissen, 1995, s. 41-42)
[13] (Brandt & Nissen, 1995, s. 45)
[14] (Brandt & Nissen, 1995, s. 46)

Dette kan vi bevise ved følgende argumentationskæde:

(1) Siden $a > 0$ og $b > 0$ kan vi gange med ab på begge sider af ulighedstegnet og stadig bevare uligheden. Efter dette får vi $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
(2) Omskrives dette til $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ (ved at trække $2ab$ fra på begge sider) fås $(a - b)^2 \geq 0$.
(3) $(a - b)^2 \geq 0$ er et sandt udsagn for alle reelle tal a og b.[15] ■

Bemærk, at argumentet (2) afhænger af 2. kvadratsætning – dette er et eksempel på en tidligere bevist sætning (som en del af mængden **X**, som tidligere beskrevet), der er gyldig at bruge i et bevis. Ligeledes afhænger argumentet (3) af, at kvadrattal altid er positive – noget, der også her antages at være en tidligere bevist sætning i teorien. Det sidste argument beviser sætningen, da det slutter, at hvis $\{a, b\} \in \mathbb{R}_+$ (altså udsagnet **A**), så er det altid sandt, at $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (altså udsagnet **B**). Der er nemlig netop vist, at $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, såfremt $\{a, b\} \in \mathbb{R}_+$, og da de to sider er ensbetydende med hinanden, og højresiden er en tautologi, så må venstresiden være en tautologi.

Indirekte bevis

Eksistensen af et såkaldt direkte bevis vækker mistanke om eksistensen af en indirekte af slagsen. Sådan en findes også – her viser man **A** indirekte ved at etablere implikationen $\neg$ **A** $\Rightarrow$ **K**. Dette kaldes også et modstridsargument eller *reductio ad absurdum*, som også er en af inferensreglerne, vi tidligere gennemgik. Dette betyder på latin en reduktion, som fører til det absurde. Antagelsen $\neg$ **A** kaldes *antitesen*. Et indirekte bevis afsluttes ofte med en kort sætning: ”Modstrid.” Udover at have en utrolig mængde aura, så fortæller det os, at et sådant bevis afsluttes så snart, vi har opnået modstrid, altså efter det er etableret, at antitesen medfører falskhed, $\neg$ **A** $\Rightarrow$ **K**. Gyldigheden af denne form for bevis kan vi vise gennem et genbesøg til deduktionslemmaet.[16]

Af deduktionslemmaet kan vi slutte, at hvis $\mathbf{X} \cup \{\neg \mathbf{A}\} \vdash \mathbf{K}$, så gælder $\mathbf{X} \vdash (\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K})$. Da $\neg \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{K}$ er en tautologi, opnår vi ved brug af Modus Ponens, at $\mathbf{X} \vdash \mathbf{A}$.[17]

Ærkeeksemplet for indirekte bevis er Aristoteles' oldgamle bevis for, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. For at opskrive dette bevis antager vi først og fremmest, at det allerede er bevist, at hvis n er lige, så er n^2 også lige. For at starte beviset gennemgår vi først definitionen af et rationalt tal: et reelt tal x siges at være rationalt, hvis det kan skrives på formen

[15] (Brandt & Nissen, 1995, s. 50)
[16] (Brandt & Nissen, 1995, s. 53)
[17] (Brandt & Nissen, 1995, s. 42)

$$x = \frac{a}{b},$$

hvor a og b er hele tal, og $b \neq 0$. Hvis det ikke kan skrives på denne form, så siges tallet at være irrationalt. Hvis vores tese **A** er, at $\sqrt{2}$ er irrationalt, så må vores antitese ¬ **A** være, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal. Det vil sige, at antitesen er, at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ hvor $a, b \in \mathbb{Z}$ og $b \neq 0$. Lad os yderligere antage, at brøken $\frac{a}{b}$ er uforkortelig. I så fald har vi et udsagn **S**, der siger, at det eneste hele positive tal, der går op i både a og b, er 1. Med dette har vi implikationen ¬ **A** ⇒ **S**. For at opnå modstrid skal vi vise, at vores antitese fører til ¬ **S**, at brøken faktisk kan forkortes yderligere. Vi starter med en omskrivning af antitesen:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

Med vores antagne tidligere bevis kan vi slutte, at a er lige, siden a^2 er lige, for et tal a er lige hvis det kan skrives som $a = 2k$, hvor k er et vilkårligt helt tal. For at vise, at b også er et lige tal, bruger vi det nyligt etablerede faktum, at a er lige. Siden a er lige må der findes et helt tal c, således at $a = 2c$. Af dette får vi

$$a^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(2c)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot c^2 = 2c^2.$$

Når vi igen benytter, at et tal er lige, hvis det kan skrives som $a = 2k$, og at hvis n^2 er lige, så er n også lige, så kan vi slutte, at b må være lige. Siden både a og b er lige, så må brøken $\frac{a}{b}$ kunne forkortes med 2. Alle lige tal er jo dividerbare med 2. Med dette har vi etableret implikationen ¬ **A** ⇒ ¬ **S**.

Af ¬ **A** ⇒ **S** og ¬ **A** ⇒ ¬ **S** kan vi slutte ¬ **A** ⇒ **S** ∧ ¬ **S**. Da **S** ∧ ¬ **S** ≡ **K**, har vi etableret implikationen ¬ **A** ⇒ **K**. *Modstrid.* ■[18]

Bevis ved kontraposition

Den sidste bevismetode, vi ser på, er bevis ved kontraposition. Et sådant bevis for et udsagn af formen **A** ⇒ **B** er baseret på inferensreglen

$$\frac{\neg \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A}}{\therefore\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}$$

Denne inferens giver os bevisreglen

Hvis ¬ **B** ⇒ ¬ **A**, så kan **A** ⇒ **B** bevises.

[18] (Brandt & Nissen, 1995, s. 53-55)

Metoden bruges ofte som en del af et større bevis – for eksempel i det bevis, vi lige gennemgik som eksempel på et indirekte bevis. Her benyttede vi, at hvis n^2 er lige, så er n også lige. Måden, man beviser dette på, er oftest et bevis ved kontraposition, så lad os gøre dette. Sætningen er

n^2 er et lige tal $\Rightarrow n$ er et lige tal, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Kontrapositionen for dette er så

n er et ulige tal $\Rightarrow n^2$ er et ulige tal.

Det er let at vise dette direkte, for hvis n er et ulige tal, så findes der et tal $k \in \mathbb{N}$, således at $n = 2k + 1$. Sætter vi n i anden får vi

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1.$$

Da $2k^2 + k$ kan betragtes som én konstant c, har vi vist, at n^2 er et ulige tal som pr den lige etablerede definition af et ulige tal. ■[19]

Kan matematikken, udsagnslogikken og det aksiomatisk-deduktive system bruges til at finde egentlig sandhed?

Nu hvor vi har etableret, at matematikken i bund og grund handler om at søge sandheden gennem korrekte logiske slutninger på baggrund af aksiomer, primitiver og bevisregler, bliver vi nødt til at stille et ubehageligt spørgsmål: opnås nogen egentlig sandhed overhovedet gennem matematikken, og dermed den aksiomatisk-deduktive metode? Da hele processen, man gennemgår i aksiomatisk-deduktiv bevisførelse, stadig afhænger af antagelser om, at noget er sandt (i.e. aksiomerne), er der så overhovedet opnået nogen sandhed gennem denne?

Spørgsmålet kan koges ned til: leder den syntaktiske, formelle natur af matematikken, med dens symboler, regler og systemer, egentlig til nogen semantisk betydning? For at begynde med at undersøge dette, besøger vi først den amerikanske sprog- og bevidsthedsfilosof John Searles berømte argument, "Det kinesiske værelse."

Det kinesiske værelse eller: syntaks versus semantik fra det bevidsthedsfilosofiske perspektiv

Når vi vender os mod en bevidsthedsfilosofi for at undersøge vores spørgsmål, er det vigtigt at skelne mellem de dele, vi kan bruge, og de dele, vi ikke kan. Bevidsthedsfilosofiske idéer som Searles fungerer nemlig primært som måder at forklare, eller komme nærmere på, hvad der gør bevidste væsener forskellige fra den ret tydeligvis ikke-bevidste omverden af ikke-levende

[19] (Brandt & Nissen, 1995, s. 57)

objekter. Her er det relevant, at Searles ”Kinesiske værelse” argument er et modsvar til Alan Turings behavioristiske forestilling om, at det er muligt at skabe *stærk KI*. Stærk KI, eller stærk kunstig intelligens, er hvad Turing kaldte idéen om en maskine, der er perfekt programmeret til at efterligne et menneske. Denne maskine ville kunne tænke og forstå præcis på samme måde, som mennesker antages at kunne, mente Turing. Hele idéen ved behaviorisme er nemlig, at hvis det er umuligt at skelne mellem de ydre træk af en maskine og et menneske, så må maskinen også være helt ens indeni. Det eneste, der karakteriserer noget væsen, ifølge behaviorismens tanker, er de ydre træk. Et menneskes indre sjæleliv kommer altid til udtryk i dets ydre adfærd. Modargumentet fra Searle lyder på, at det er muligt at forestille sig sproglige udsagn (altså et eksempel på ydre adfærd), som ikke er udtryk for en bevidsthed, altså en egentlig tænkning og forståelse. En egentlig intelligens kræver nemlig forståelse, mener Searle. En maskine, altså fx en computer, et AI, kan, som vi i nutiden har set, vise en ydre sproglig adfærd – men dette tyder ikke på nogen egentlig indre forståelse eller intelligens.[20]

I komplet overensstemmelse med den logik, vi har gennemgået tidligere, bringer Searle inferensregler og logiske slutningsregler ind i argumentet. En computer, fremhæver han, bygger på en formalisering af viden på disse slutningsregler. Altså ville en computer fx kunne sige, at det tordner, som svar på brugerens input, at det lyner. Det kan den med Modus Ponens, hvor den er programmeret til at forstå **A** som ”det lyner”, og **B** som ”det tordner”, så den ved bekræftelse fra brugeren, at **A** gælder (i.e. bekræftelse på, at det lyner), kan svare, at det derfor også må tordne. Med en tilstrækkelig mængde logik pakket ind i computerens system, må denne kunne efterligne et menneske med forståelse, ved at have et passende output til ethvert input fra brugeren. Det er så her, hvor Searle trækker stregen; det, at computeren kan give overbevisende svar til brugerens input, skal ikke tages som et udtryk for, at computeren faktisk forstår, hvad der foregår. Computeren ved ikke, hvad det egentlig betyder, at det tordner. Den ved ikke, hvad lyn er. Den forstår heller ikke sammenhængen mellem de to. Computeren har blot fulgt den formelle logik, den er udstyret med. Her er der blot tale om syntaks; om symbolmanipulation.[21]

Searle viser sin pointe gennem et *Gedankenexperiment*, hvor en engelsktalende lukkes inde i et værelse, hvor han modtager sendinger af kinesiske tegn, samt regler på engelsk, der fortæller ham, hvordan man korrelerer sendingerne med hinanden. Nogle af sendingerne indeholder også instrukser på, hvordan han skal respondere med bestemte kinesiske tegn som svar på det kinesiske, han har modtaget i sendingen. Disse forskellige sendinger er i virkeligheden fx historier, eller spørgsmål, hvis de skal svares på, men det er ikke noget, han ved. Hvis denne engelsktalende mand ovenikøbet modtager spørgsmål og historier på engelsk, vil man finde, at hvis han er blevet

[20] (Sparsø, 2013, s. 150-151)
[21] (Sparsø, 2013, s. 151-153)

god nok til at følge instrukserne for manipulationen med de kinesiske symboler, så er svarene på engelsk og kinesisk af samme kvalitet. De kinesiske svar vil ikke kunne skelnes fra de svar, en indfødt kineser ville give. Forskellen mellem det engelske og det kinesiske tilfælde må nødvendigvis være følgende: på engelsk har manden produceret svarene med forståelse. På kinesisk har manden produceret svarene som resultat af at manipulere med formelle symboler, som han egentlig ikke forstår. I det kinesiske tilfælde opfører manden sig helt tilsvarende en computer, mener Searle.[22]

Searles pointe er altså, at symbolmanipulation ikke er det samme som forståelse – at syntaks aldrig i sig selv giver semantik. Og her rammer vi noget centralt i forhold til matematikken: selv det mest perfekte aksiomatisk-deduktive system – som jo netop er baseret på formelle regler og symbolmanipulation – garanterer ikke, at nogen forstår dets betydning. Det kan udledes, at $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ er en gyldig konklusion, men det siger intet om, hvad **A** eller **B** betyder, eller om vi overhovedet forstår, hvad konklusionen indebærer. Er matematisk sandhed så blot syntaktisk gyldighed? Og hvis ja – er det overhovedet sandhed, sådan som vi normalt forstår begrebet? Searle ville formentlig mene, at den aksiomatisk-deduktive metode i sig selv ikke kan føre til forståelse eller egentlig semantisk indsigt. Der er behov for en bevidst, intentionel agent (i.e. et menneske), der forstår symbolerne og relationerne mellem dem. Uden denne forståelse bliver det blot tom symbolmanipulation, ligesom i det kinesiske værelse. Her åbnes der også op for spørgsmålet: er matematikkens struktur afhængig af os, altså vores bevidsthed og intentioner, for at have mening? Eller er det et system, der eksisterer uafhængigt, med sine egne "sandheder"?

Systemsvaret

Der findes et modsvar til Searles argument med det kinesiske værelse. Dette kaldes ”systemsvaret”, og er formuleret af den amerikanske filosof Daniel Dennett. Dennett mener, at Searles argument er alt for simpelt – der tages ikke højde for kompleksiteten af systemet. I stedet for at forestille sig, at manden i værelset modtager kinesisk skrift, må man forestille sig, at han modtager binære 0’er og 1-taller. Det giver nemlig ifølge Dennett ingen mening, at inputtet af kinesiske bogstaver skulle kunne svare til outputtet af kinesiske bogstaver – et kort spørgsmål kan have et meget langt svar, og da vil det være svært at påstå, at svarets vitterlige indhold direkte svarer til spørgsmålets. Med 0’erne og 1-tallerne forestiller man sig i stedet, at det kinesiske værelse er et meget komplekst system med milliarder af funktioner, der skal kunne dække over alt muligt viden i verden, for at kunne føre en dialog om en vilkårlig ting på kinesisk. I Searles argument er manden faktisk blot ”et lille hjul i det store maskineri”, ifølge Dennett. Manden i værelset har ganske vist ikke selv nogen forståelse; men i stedet opstår der en forståelse, som

[22] (Sparsø, 2013, s. 154-155)

summen af de mange dele af systemet. Delene, altså de formentligt mange milliarder af små komponenter, systemet må have, skal siges at have en ”delforståelse,” der tilsammen giver systemet en egentlig forståelse, i strid med Searles mening. [23]

For Dennett er spørgsmålet ikke, om der findes en magisk bevidst kerne bag symbolmanipulationen, men om systemet opfører sig meningsfuldt og konsekvent i forhold til sine regler og input. Hvis vi får nyttige, præcise og forudsigelige resultater ud af et matematisk system, er det nok til at tale om dets "intelligens" – og måske også dets *sandheder*. Så hvor efterlader det os ift. den aksiomatisk-deduktive metode? Hvis vi følger Searle, må vi sige, at matematikkens "sandheder" kun er sande i en syntaktisk forstand, og først får egentlig betydning, når de fortolkes af en bevidst hjerne. Hvis vi følger Dennett, kan vi sige, at matematikken er meningsfuld netop fordi den virker – fordi dens systematiske struktur *lader sig bruge* i praksis. Her finder jeg mig tilbøjelig til at forkaste Dennetts fortolkning, for hvis matematikkens (altså reglernes) semantiske betydningsfuldhed følger af dets brug i praksis, så ligner det, at det alligevel blot er fordi, det bliver brugt af et forstående væsen. Men hvis vi nu finder os enige med Searle i, at et system med regler såsom matematikken og den aksiomatisk-deduktive metode ikke giver nogen semantisk betydning, eller sandhed, i sig selv, hvordan kan vi så finde det? Et muligt svar finder vi i Gödels ufuldstændighedssætning.

Gödels ufuldstændighedssætning

Den østrig-ungarske logiker Kurt Gödel viste i det tidlige 1900-tal, at der faktisk findes sætninger indenfor matematikken, som er sande, men ikke beviselige. Dette er en konsekvens af Gödels ufuldstændighedssætning fra 1931, hvis bevis er alt for langt og kompliceret til, at vi kan gennemgå det her. Kort sagt opnåede Gödel dette ved at kode vores formelle logiske sprog ved naturlige tal, hvilket tillader en sætning at have en selvreference, en sætning, der i det formelle system udtrykker noget om systemet selv. Den væsentlige konsekvens af denne åbenbaring er for os, at der findes egentlige sandheder indenfor matematikken, som ikke er mulige at bevise gennem blot vores formelle, syntaktiske logik og bevisførelse.[24]

Dette viser, at beviselighed og sandhed ikke er det samme – dette støtter egentlig Searles argument, da vi ikke gennem et formelt, logisk system kan bevise alle sandheder. Det tyder på, at nogle sandheder kræver, at vi bruger vores semantiske intuition og betragter systemet udefra. Derfor mener jeg, at matematikken og den aksiomatisk-deduktive metode i sidste ende stadig kræver en forstående bevidsthed – intentionalitet og forståelse er nødvendige komponenter i matematisk erkendelse. Det er ikke nok, at et system blot ”virker”, som Dennett foreslår; det skal

[23] (Sparsø, 2013, s. 167-173)
[24] (Brandt & Nissen, 1995, s. 193-198)

forstås, og et bevidst væsen må være der for at kunne forstå det. Med dette vender vi endelig tilbage til qualia-problematikken.

Nagel, qualia og flagermusen

Der er en barriere, der gør det umuligt at forklare nogle ting overfor hinanden. Hvordan ser farven rød ud? Hvordan føles smerten af en hovedpine? Disse subjektive oplevelser er noget, man ikke med nogle ord kan formidle uden at sammenligne det med noget andet tilsvarende. Der er en barriere mellem vores omverden og vores hjerner, gennem vores sanser. De empiriske data, vores sanseorganer opsamler, behandles på en eller anden måde af vores hjerner og gør dem til subjektive oplevelser. Den amerikanske filosof Thomas Nagel er højt beskæftiget med subjektive oplevelser – i hans tekst ”Hvordan er det at være en flagermus?” fra 1974 kommer vi gennem relationen mellem væsener, der har subjektive oplevelser, de slet ikke kan overføre til hinanden semantisk. Ved antagelsen om, at en organisme har bevidste oplevelser, slutter Nagel: ”*Men hvordan formen end måtte variere, så må den kendsgerning, at en organisme overhovedet har bevidste oplevelser, grundlæggende betyde, at der er noget, som er at være ligesom den organisme.*”[25] Idet meget af teksten handler om at vise, hvordan mange forskellige filosofiske synspunkter ikke kan besvare titlens spørgsmål, postulerer Nagel: ”*[…] ethvert subjektivt fænomen i grunden er forbundet med et enkeltstående synspunkt, og det synes uundgåeligt, at en objektiv fysisk teori vil forlade dette synspunkt.*”[26] Her argumenterer Nagel for, at det faktisk ikke er muligt at give en objektiv forklaring på en subjektiv oplevelse, i.e. at reducere den subjektive oplevelse til ord og syntaks. Efter en lang argumentationskæde om valget af eksempel og forskellene mellem mennesker og flagermus, kommer Nagel frem til kernen af problemet: ”*Jeg vil gerne vide, hvad det vil sige at være ligesom en flagermus for en flagermus. Hvis jeg imidlertid prøver at forestille mig dette, så er jeg begrænset af de muligheder min egen bevidsthed giver mig, og disse muligheder er ikke tilstrækkelige til opgaven. Jeg kan hverken gøre dette ved at forestille mig, at der blev tilføjet noget til mine aktuelle oplevelser, ved at forestille mig, at visse dele af den gradvist fjernes fra den eller ved at forestille mig en eller anden kombination af tilføjelser, fjernelse og forandringer.*”[27] Begrænsningerne af den omverden-hjerne-barriere, vores bevidsthed sidder fast bag, forårsager, at det faktisk er helt igennem og komplet umuligt rent faktisk at sætte sig ind i et andet væsens indre subjektive oplevelse. Således kan vi slet ikke vide, hvordan hinanden oplever den samme farve, og ved udvidelse af dette egentlig hele omverden i sig selv. Tilbage ligger kun det abstrakte, den aksiomatisk-deduktive metode, og de aksiomer, vi forhåbentlig alle kan blive enige om, bør være sande. Dette bliver vi, igen, enige om gennem vores semantiske intuition.

---

[25] (Jacobsen, 1974) l. 24-25
[26] (Jacobsen, 1974) l. 51-53
[27] (Jacobsen, 1974) l. 92-97

Konklusion

Igennem dette projekt har vi undersøgt, hvorvidt matematikken og det aksiomatisk-deduktive system kan give os sandheder, altså hvordan den aksiomatisk-deduktive metode fungerer som grundlag for matematikken, og hvordan logisk ræsonnement, bevisførelse og symbolsprog muliggør formelle matematiske sandheder. Denne formalisme leder ikke i sig selv til nogen egentlig forståelse eller sandhed – det er noget, som vi som bevidste, forstående væsener tilskriver til dette. Gennem Searles kinesiske værelse blev det tydeligt, at syntaktisk korrekt symbolmanipulation ikke garanterer semantisk mening, og dermed heller ikke egentlig erkendelse. Daniel Dennetts funktionalistiske tilgang tilbyder et alternativ, hvor meningsfuld adfærd er nok til at tilskrive forståelse, men denne tilgang synes utilstrækkelig, hvis man medregner Gödels ufuldstændighedssætning, som viser, at ikke alle sandheder kan bevises formelt. Dette støtter idéen om, at forståelse og intentionalitet er nødvendige komponenter i erkendelse, også i matematikkens verden. Thomas Nagels analyse af subjektiv erfaring viser endvidere, at erkendelse altid sker fra et bestemt synspunkt, og at fuldstændig objektiv forståelse ikke er mulig. På den baggrund må det konkluderes, at matematikken ikke alene kan producere sandheder i egentlig forstand, men at dens betydning og erkendelsespotentiale forudsætter en bevidst, fortolkende aktør.

Litteraturliste

Brandt, J., & Nissen, K. (1995). *Q.E.D - en introduktion til matematisk bevis.* Forlaget ABACUS.

Sparsø, M. G. (2013). *Teknologi og filosofi 2.* Systime.

ræsonnement – Den Danske Ordbog. Hentet fra Den Danske Ordbog d. 28. marts 2025: https://ordnet.dk/ddo/ordbog?query=r%C3%A6sonnement

Euler diagram - Wikipedia. (u.d.). Hentet fra Wikipedia d. 8. april 2025: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_diagram

Jacobsen, M. (1997). Hvordan er det at være en flagermus? I T. Nagel, *What is it like to be a bat?* (1974)