powered by FKS

FX 5 – Starcraft

Ferko a Tomáš sú zažratí do svojej obľúbenej počítačovej hry, klikajú ostošesť, stavajú armády, schyľuje sa k veľkej bitke. Tomáš posiela do boja X jednotiek, Ferko Y rovnakých jednotiek. Nájdite časový priebeh počtu jednotiek na oboch stranách, čas trvania bitky i konečný stav.

Môžete predpokladať, že obaja hráči sú skúsení - jednotky po sebe strieľajú fotónovými delami optimálnou stratégiou, a (kým sa nevykynožia), je ich veľmi veľa. Jedna jednotka stálym strieľaním zabije druhú (nebrániacu sa) za čas a.

Najprv si musíme rozmyslieť, ako budú vlastne jednotky po sebe strieľať. Najvýhodnejšie je, keď budú všetci strieľať na tú istú súperovu jednotku - takto sa zrejme minimalizujú škody, ktoré môže nepriateľ spraviť nám. Inými slovami, minimalizujeme čas, ktorý má nepriateľ jednotky k dispozícii.

Nej má v istom čase Tomáš x jednotiek a Ferko y jednotiek. Ak zanedbáme Ferkove straty počas časového intrvalu, kým zabije jednu Tomášovu jednotku, bude mu to zrejme trvať čas a/y. Podobne, Ferkove jednotky budú ubúdať každých a/x. Ak predpokladáme, že jednotiek je veľmi veľa (až spojite veľa), môžeme povedať, že rýchlosť ubúdania Tomášových jednotiek je $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1/(a/y) = -y/a$. Podobne to bude s Ferkom. Pre jednoduchosť si označme $A = 1/a$, potom si môžeme napísať diferenciálne rovnice pre vývoj stavu bitky:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ay \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -Ax \tag{2}$$

Teraz už len stačí túto sústavu roníc vyriešiť, čo sa dá robiť viacerými spôsobmi - od trpezlivého šrotenia cez vysokovýkonné metódy až po znebaspadnuvšie "ľahko nahliadneme, že". Všimnime si najprv, akého pekného tvaru je táto sústava. Rýchlosť v každom bode (stave bitky, môžeme si ho reprezentovať i bodom v rovine) je pevne určená iba týmto bodom (jeho súradnicami x, y). V každom bode si vieme nakresliť, ktorým smerom sa bude bitka vyvíjať a potom ju iba chladnokrvne odsimulovať. Keď už nič iné, dostaneme aspoň predstavu o tom, čo sa tu deje. (Viď obrázok.)

Takéto predstavy nám napovedajú, že hneď z rovníc vieme povedať, ktorým smerom sa bude bitka vyvíjať. Nevšímajme si na chvíľu, ako rýchlo sa to bude diať, vieme však na isto, že

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-Ax}{-Ay} = \frac{x}{y} \tag{3}$$

Riešme túto rovnicu tak, ako každú inú (separovateľnú):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{x}{y} \\ y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x \\ \int_X^{x(t)} y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_Y^{y(t)} y\,\mathrm{d}y &= \int_X^{x(t)} x\,\mathrm{d}x \\ x^2 - y^2 &= X^2 - Y^2 = R^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Vidíme, že rozdiel štvorcov počtov jednotiek na oboch stranách zostáva konštantný. (Počiatočný rozdiel štvorcov označme R^2, bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $X > Y$) To znamená, že vo fázovom priestore sa bude stav bitky pohybovať po hyperbole. Takisto hneď vidíme, aký bude konečný stav, zrejme keď $Y = 0$, $X = R$.

Aký bude časový priebeh bitky? Dosaďme si do rovnice (1) za Y podľa (4):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ay = -A\sqrt{x^2 - R^2} \tag{5}$$

Toto môžeme znova riešiť ako obyčajnú separovateľnú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 - R^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -A \\ \int_X^{x(T)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - R^2}} &= \int_0^T -A\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Čo so škaredým integrálom naľavo? Buď sme makači a ten hyperbolický sínus v tom vidíme, alebo ... no, alebo nad tým chvíľu dumáme, a raz ho tam uvidíme. V škole nás učili, že integrál $1/\sqrt{1-x^2}$ je $\arcsin x$. Ako (sme) na to prišli? Ak si urobíme substitúciu $x = \sin u$, menovateľ sa nám kvôli $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ vyhubí s pozostatkom po substitúcii a už integrujeme iba du. Inšpirujme sa touto fintou, spomeňme si, že $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, dajme si substitúciu $x = R\cosh(u)$ a fičíme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \int \frac{R \sinh u}{\sqrt{R^2 \cosh^2 u - R^2}}\, \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u = u = \operatorname{arccosh}(x/R) + c = \ln\left(x + \sqrt{x + R^2}\right) + c' \tag{6}$$

Pričom ten posledný výraz síce nepotrebujeme, ale môžeme si ho derivovaním overiť, a je pekné vedieť, že sme ho získali iba z "definície" hyperbolického kosínusu: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Vráťme sa ale naspäť ku našej rovnici:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccosh}(x/R) - \operatorname{arccosh}(X/R) &= -AT \\ \operatorname{arccosh}(x/R) &= \operatorname{arccosh}(X/R) - AT \\ x &= R\cosh\left(\operatorname{arccosh}(X/R) - AT\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Fúj, aká škaredá rovnica. Ale aspoň máme explicitné vyjadrenie počtu Tomášových jednotiek od času. Z rovnice (4) vieme vytĺcť aj Ferkov stav, určite i trvanie bitky, ale na to sa radšej ani nepýtajme...

Sme predsa nejakí fyzici, musíme nájsť nejaký krajší spôsob riešenia[1] - zamyslime sa nad tým, ako jednotky vlastne ubúdajú. V každom momente nejaká jednotka kynoží nejakú inú. Ak teda zabudneme na farby, celkový počet jednotiek ubúda úmerne sám sebe. Podobne si môžeme rozmyslieť, že (neformálne povedané) Ferkove jednotky ubúdajú o toľko rýchlejšie, koľko má Tomáš naviac jednotiek, teda rozdiel počtov jednotiek za zvyšuje úmerne sám sebe. Alebo jednoducho, napíšme si súčet a rozdiel rovníc (1) a (2) a sledujme tie divy[2]:

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} = -A(x+y) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t} = A(x-y) \tag{9}$$

Ak sa na chvíľu budeme tváriť, že naše premenné sú $x+y$ a $x-y$, vyriešime dve naozaj jednoduché difky a dostávame

$$(x+y) = (X+Y)e^{-At} \tag{10}$$

$$(x-y) = (X-Y)e^{At} \tag{11}$$

sčítame, odčítame, ako v škôlke:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left((X+Y)e^{-At} + (X-Y)e^{At}\right) = \frac{1}{2}\left(X(e^{At} + e^{-At}) + Y(e^{-At} - e^{At})\right) \\ y &= \frac{1}{2}\left((X+Y)e^{-At} - (X-Y)e^{At}\right) = \frac{1}{2}\left(X(e^{-At} - e^{At}) + Y(e^{At} + e^{-At})\right) \end{aligned}$$

alebo ešte krajšie,

$$x = X\cosh(At) - Y\sinh(At) \tag{12}$$

$$y = Y\cosh(At) - X\sinh(At) \tag{13}$$

Vyšlo nám to pekne krásne symetricky (akoby nie!), kto chce, môže si overiť, ako z toho vypadne konečný stav, podumať nad súvislosťami s hyperbolami, my už len dodáme, že stav, keď bude $y = 0$, teda koniec bitky, nastane v čase

$$\begin{aligned} X\sinh(At) &= Y\cosh(At) \\ \frac{\sinh(At)}{\cosh(At)} &= \frac{Y}{X} \\ t &= \frac{1}{A}\operatorname{arctanh}\left(\frac{Y}{X}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{alebo} \quad t = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{X+Y}{X-Y}\right) \tag{15}$$

[1] Pekný spôsob Peťa Perešíniho, podobný vyššie uvedenému ale jednoduchší, je vyjadriť si z (1) a (2) druhé derivácie x a y.

[2] Pre tie silnejšie povahy - väčšina takýchto lineárnych sústav diferenciálnych rovníc prvého stupňa o n premenných sa dá riešiť takýmto spôsobom. Zavedieme si nové premenné, ktoré sú lineárnou kombináciou starých tak, aby sme zo zadaných rovníc vedeli vyrobiť rovnice obsahujúce iba po jednej novej premennej. Tie potom vieme jednoducho riešiť a poskladať naspäť staré premenné.