powered by FKS

FX 4 – Minca na dne bazéna

Ujo z príkladov o minci na dne bazéna sa pozerá na mincu na dne bazéna. Vidí ju v hlbke h a chce vedieť, v akej hĺbke sa nachádza naozaj. Stala sa mu však veľká galiba - nevidí ju totiž kolmo zhora, ako to už v takýchto príkladoch býva, ale pozerá sa na ňu pod uhlom α (vzhľadom na normálu hladiny). Pomôžte ujovi zrátať, v akej hĺbke sa nachádza minca naozaj!

Na to, aby sme vedeli vypočítať tento príklad, si musíme najprv uvedomiť, ako to celé videnie funguje. Ak vidíme na nejakom mieste mincu, čo to vlastne znamená? Znamená to to, že táto minca vysiela nejaké svetlo (taká minca sa väčšinou zmôže iba na odrazené, ale to je v princípe jedno, hlavne, že ide od nej), ktoré dopadá do našich očú. Naše oči musia toto svetlo v prvom rade správne zaostriť (aby sa na sietnici vytváral ostrý obraz), a takisto sa vnemy z každého oka musia zosynchronizovať (to je už automatika), pridávajúc vylepšený 3D obraz sveta okolo nás. Samozrejme, potom do toho vstupuje ďalšie podvedomé spracovanie obrazu, i s pomocou skúsenosti (odhad vzdialenosti pomocou veľkosti mince a jej uhlového priemeru, optické klamy, ...), ale to všetko závisí na tom, že do našich očí prichádza nejaké svetlo.

Toto svetlo normálne prichádza smerom z miesta, kde je minca. Keď je však minca na dne bazéna, svetlo sa na hladine láme a prichádza z iného smeru. Navyše, ich vzájomný uhol sa tiež môže zmeniť. Preto ujo vidí mincu v inej vzdialenosti a v inom smere, ako naozaj je.

Nech h je zdanlivá vzdialenosť mince od hladiny, H skutočná. α je uhol, ktorý zviera ujov pohľad s normálou hladiny, β je zase uhol ktorý zvierajú lúče z mince s normálou hladiny ešte vo vode. Pozrime sa na dva lúče vychádzajúce z mince, ktoré sa separujú vo vodorovnom smere o malý uhol. (Napríklad také dva lúče, z ktorých jeden dopadne do ujovho ľavého a jeden do pravého oka.)

Tieto lúče sa pri východe z vody zalomia. Všimnime si však, že každý z lúčov sa bude stále pohybovať v tej istej zvislej rovine. Roviny oboch lúčov sa pretínajú v zvislej priamke, ktorá zrejme obsahuje mincu. Ak si teraz predĺžime časti lúčov, ktoré vchádzajú do ujových očí, akoby sa nelámali na hladine (t.j. zdanlivý chod lúčov z ujovho pohľadu), zo symetrie sa musia niekde pretnúť, ale obe ležia vo svojej rovine, takže sa zrejme môžu pretnúť iba niekde na spomínanej priesečnici tých dvoch rovín, t.j. zvislo nad mincou.

Použijúc tento poznatok vidíme, že musí platiť

$$\frac{a}{h} = \operatorname{tg}\alpha \qquad \text{a podobne} \qquad \frac{a}{H} = \operatorname{tg}\beta$$

kde a je vodorovná vzdialenosť mince od bodu, kde lúče pretínajú hladinu. Vydelením týchto dvoch rovníc a aplikovaním Snellovho zákona lomu ($\sin\alpha = n\sin\beta$) dostávame:

$$\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \tag{1}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$H = h\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} \tag{2}$$

Toto je teda skutočná hĺbka mince.

Počkať počkať. Neskončíme hneď takto zarána. Čo by to bolo za hanbu, polstranový vzorák! V našom postupe sme uvažovali dva lúče, ktoré sa vzďalovali od seba v horizontálnom smere. Pozrime sa na dva lúče, ktoré sa vzďalujú vo vertikálnom smere.

Nech tieto dva lúče zvierajú maličký uhol $\mathrm{d}\beta$. Pri hladine bude ich odstup (kolmá vzdialenosť) x, pretnú hladinu v bodoch vzdialených d od seba a ich vzájomná vzdialenosť resp. uhol sa zmenia na y resp. $\mathrm{d}\alpha$.

Vyjadrime si teraz vzdialenosť d. Po troche hrania sa s geometriou a pravouhlými trojuholníkmi dostávame $d = x/\cos\beta$, ale keďže $\mathrm{d}\beta$ je malé, $x = \mathrm{d}\beta(H/\cos\beta)$. Podobným postupom zistíme, že $d = y/\cos\alpha$ a tiež $y = \mathrm{d}\alpha(h/\cos\alpha)$. Potom však

$$\frac{\mathrm{d}\beta\frac{H}{\cos\beta}}{\cos\beta} = \frac{\mathrm{d}\alpha\frac{h}{\cos\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} \tag{3}$$

Stále máme na pamäti, že $\mathrm{d}\alpha$ a $\mathrm{d}\beta$ sú malé, priam ich môžeme poslať do nuly. (Ľaľa, derivácia!) Vzťah medzi α a β nám poskytne Snellov zákon, potom môžeme rovnicu (3) upravovať rôznymi spôsobmi. Aby sme sa však vyhli derivovaniu arkussínusu, napíšme si $s = \sin\alpha = n\sin\beta$, potom dostávame

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\beta}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}} = \frac{n\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Teraz už len upravujeme a eliminujeme uhol β:

$$\frac{H}{h} = \frac{n\cos\beta}{\cos\alpha}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = n\frac{\cos^3\beta}{\cos^3\alpha}$$

$$\frac{H}{h} = n\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\cos\alpha}\right)^3 = n\left(\frac{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}{\cos\alpha}\right)^3$$

$$H = \frac{h}{n^2}\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)^3 \tag{4}$$

A máme problém. Naše výsledky nám nesedia... Urobili sme niekde chybu?

Nie. Ono to naozaj takto vychádza. Lúče sa inak rozbiehajú v horizontálnom a inak vo vertikálnom smere, a nedajú sa presne zaostriť. (Pre predstavu, niečo podobné by nastávalo, keby sme vzali obyčajnú šošovku, v jednom smere ju natiahli, a chceli vypočítať jej ohniskovú vzdialenosť.)

Prvý výsledok je pravdepodobne bližšie k realite, lebo odstup očí nám podáva lepšiu predstavu o "hĺbke sveta" ako zaostrenie jednotlivých očí, a ak ujo stojí vo veľkej vzdialenosti od hladiny, malé rozdiely v horizontálnom a vertikálnom zaostrení mu nebudú vadiť. Ak si však doma hodíte do umývadla mincu a budete sa na ňu pozerať pod veľkým uhlom α s okom tesne nad hladinou, zistíte, že na ňu neviete poriadne zaostriť. Tento efekt by bolo asi najlepšie zaznamenať fotograficky, ale na to treba kvalitné pomôcky...

Poznámka na koniec:

Ani jeden z výsledkov nie je úžasne jednoduchý, ale môžeme si ich aspoň ako-tak overiť na okrajových podmienkach. Pre $\alpha = 0$ dostávame $H = nh$, čo nám potvrdí ujo z príkladov o minci na dne bazéna. Ak naopak $\alpha \to \pi/2$, $H \to 0$. Nakoniec pre $n = 1$, keď nenastáva žiadny lom, dostávame očakávané $H = h$.