Discretização de Filtros Analógicos via Transformada Bilinear

Pedro Paulo Fontolan de Faria

13 de dezembro de 2025

1 Introdução e definições

A implementação digital de filtros contínuos (analógicos) geralmente é realizada através da **transformada bilinear**. Este método mapeia o plano complexo s (domínio de Laplace) no plano complexo z (domínio discreto).

A relação fundamental da transformada bilinear é dada pela substituição:

$$s \leftarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \tag{1}$$

onde T_s é o período de amostragem ($T_s = 1/f_s$).

1.1 O fenômeno de *frequency warping*

A transformada bilinear introduz uma distorção não-linear na escala de frequências. Para garantir que a frequência de corte do filtro digital (ω_d) coincida exatamente com a frequência de corte desejada do filtro analógico (ω_c), deve-se aplicar o *pre-warping*.

A frequência analógica "deformada"(ω_{pre}) utilizada para o projeto é calculada como:

$$\omega_{pre} = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right) \tag{2}$$

Para simplificar a álgebra nas seções seguintes, definiremos a constante K como:

$$K = \tan\left(\frac{\pi f_c}{f_s}\right) = \frac{\omega_{pre} T_s}{2} \tag{3}$$

Assim, a substituição de s normalizada pela frequência pode ser simplificada. Note que s/ω_{pre} torna-se:

$$\frac{s}{\omega_{pre}} = \frac{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T_s}K} = \frac{1}{K}\frac{z-1}{z+1} \tag{4}$$

2 Filtro passa-baixa de 1ª ordem

A função de transferência de um filtro passa-baixa analógico de primeira ordem é:

$$H(s) = \frac{\omega_{pre}}{s+\omega_{pre}} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_{pre}}+1} \tag{5}$$

Substituindo a Eq. (4):

$$H(z) = \frac{1}{\frac{1}{K}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} \tag{6}$$

Multiplicando numerador e denominador por $K(z+1)$:

$$H(z) = \frac{K(z+1)}{(z-1) + K(z+1)} \tag{7}$$

Agrupando os termos em z:

$$H(z) = \frac{Kz + K}{z(1+K) + (K-1)} \tag{8}$$

Para obter a equação de diferenças, normalizamos pelo coeficiente de z no denominador $(1+K)$ e o expressamos em potências negativas de z (z^{-1}):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{K}{K+1} + \frac{K}{K+1}z^{-1}}{1 + \frac{K-1}{K+1}z^{-1}} \tag{9}$$

Desta forma, os coeficientes da equação de diferenças $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] - a_1y[n-1]$ são:

$$\begin{aligned} \text{Divisor comum (norm): } \Delta &= K + 1 \\ b_0 &= K/\Delta \\ b_1 &= b_0 \\ a_1 &= (K-1)/\Delta \end{aligned}$$

3 Filtro genérico de 2ª ordem (Biquad)

A função de transferência genérica de segunda ordem no domínio s pode ser escrita como:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{s^2 + \frac{\omega_{pre}}{Q}s + \omega_{pre}^2} \tag{10}$$

Onde $Q = 1/(2\zeta)$ é o fator de qualidade e ζ é o amortecimento. Para um filtro *Butterworth*, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107$.

Dividindo tudo por ω_{pre}^2, temos a forma normalizada:

$$H(s) = \frac{c_2'(\frac{s}{\omega_{pre}})^2 + c_1'(\frac{s}{\omega_{pre}}) + c_0'}{(\frac{s}{\omega_{pre}})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_{pre}}) + 1} \tag{11}$$

Aplicando a substituição da Eq. (4), onde $\frac{s}{\omega_{pre}} \to \frac{1}{K}\frac{z-1}{z+1}$:

O denominador $D(z)$ será (após multiplicar por $K^2(z+1)^2$ para eliminar frações):

$$D(z) \propto (z-1)^2 + 2\zeta K(z-1)(z+1) + K^2(z+1)^2 \tag{12}$$

Expandindo:

$$(z^2 - 2z + 1) + 2\zeta K(z^2 - 1) + K^2(z^2 + 2z + 1) \tag{13}$$

Agrupando por potências de z:

- Termo z^2: $1 + 2\zeta K + K^2$ (Este será o fator de normalização Δ)
- Termo z^1: $-2 + 2K^2$ (Ou $2(K^2 - 1)$)
- Termo z^0: $1 - 2\zeta K + K^2$

3.1 Caso passa-baixa (PB)

No PB analógico, o numerador é apenas ω_{pre}^2. Na forma normalizada, o numerador é 1.

$$N(z) \propto K^2(z+1)^2 = K^2(z^2+2z+1) \tag{14}$$

Assim, os coeficientes finais para o PB de 2ª ordem são:

$$\begin{aligned}
\Delta &= K^2 + 2\zeta K + 1 \\
b_0 &= K^2/\Delta \\
b_1 &= 2b_0 \\
b_2 &= b_0 \\
a_1 &= (2(K^2-1))/\Delta \\
a_2 &= (K^2 - 2\zeta K + 1)/\Delta
\end{aligned}$$

3.2 Caso passa-alta (PA)

No PA analógico, o numerador é s^2.

$$N(z) \propto 1 \cdot (z-1)^2 = (z^2 - 2z + 1) \tag{15}$$

Os coeficientes do denominador (a_1, a_2) permanecem idênticos. Os do numerador mudam para:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1/\Delta \\
b_1 &= -2/\Delta \\
b_2 &= 1/\Delta
\end{aligned}$$

3.3 Caso passa-faixa (PF)

O filtro passa-faixa de 2ª ordem é caracterizado por permitir a passagem de frequências próximas à ressonância ω_c e atenuar as demais. A função de transferência analógica normalizada para ganho unitário na frequência central é:

$$H(s) = \frac{2\zeta(\frac{s}{\omega_{pre}})}{(\frac{s}{\omega_{pre}})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_{pre}}) + 1} \tag{16}$$

Realizando a substituição bilinear $\frac{s}{\omega_{pre}} \to \frac{1}{K}\frac{z-1}{z+1}$:

O denominador $D(z)$ é idêntico ao calculado anteriormente, resultando no fator de normalização $\Delta = K^2 + 2\zeta K + 1$.

O numerador $N(z)$ é transformado da seguinte forma:

$$N(z_{raw}) = 2\zeta \left[\frac{1}{K}\frac{z-1}{z+1}\right] \tag{17}$$

Para eliminar as frações parciais e igualar o denominador comum, multiplicamos por $K^2(z+1)^2$:

$$N(z) = 2\zeta\frac{1}{K}(z-1)(z+1) \cdot K^2 = 2\zeta K(z^2-1) \tag{18}$$

Expandindo o termo $(z^2 - 1)$, observamos que o termo em z^1 é nulo. Assim, os coeficientes para o filtro PF são:

$$\begin{aligned}
\Delta &= K^2 + 2\zeta K + 1 \\
b_0 &= \frac{2\zeta K}{\Delta} \\
b_1 &= 0 \\
b_2 &= -b_0 \quad \text{(Pois } 2\zeta K \cdot (-1) = -b_0 \cdot \Delta) \\
a_1 &= \frac{2(K^2 - 1)}{\Delta} \\
a_2 &= \frac{K^2 - 2\zeta K + 1}{\Delta}
\end{aligned}$$

3.4 Caso rejeita-faixa (RF ou Notch)

O filtro rejeita-faixa (também conhecido como Notch) remove uma banda específica de frequências. Sua função de transferência analógica possui zeros no eixo imaginário ($s = \pm j\omega_{pre}$), o que corresponde ao numerador $s^2 + \omega_{pre}^2$. Na forma normalizada:

$$H(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_{pre}})^2 + 1}{(\frac{s}{\omega_{pre}})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_{pre}}) + 1} \tag{19}$$

Substituindo na transformada bilinear e multiplicando por $K^2(z+1)^2$ para limpar o denominador:

$$N(z) = \left(\frac{1}{K}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \cdot K^2(z+1)^2 + 1 \cdot K^2(z+1)^2 \tag{20}$$

$$N(z) = (z-1)^2 + K^2(z+1)^2 \tag{21}$$

Expandindo os termos quadráticos:

$$\begin{aligned}
N(z) &= (z^2 - 2z + 1) + K^2(z^2 + 2z + 1) \\
&= (1 + K^2)z^2 + (2K^2 - 2)z + (1 + K^2)
\end{aligned}$$

Dessa expansão, obtemos os coeficientes para o filtro RF:

$$\begin{aligned}
\Delta &= K^2 + 2\zeta K + 1 \\
b_0 &= \frac{1 + K^2}{\Delta} \\
b_1 &= \frac{2(K^2 - 1)}{\Delta} \quad \text{(Note que } b_1 \text{ é idêntico ao } a_1 \text{ antes da divisão por } \Delta\text{? Quase.)} \\
b_2 &= b_0 \\
a_1 &= \frac{2(K^2 - 1)}{\Delta} \\
a_2 &= \frac{K^2 - 2\zeta K + 1}{\Delta}
\end{aligned}$$

4 Resumo dos coeficientes

As tabelas a seguir sintetizam os coeficientes não-normalizados para a implementação digital. A Tabela 1 apresenta os filtros de primeira ordem, onde o fator de normalização segue a relação linear $\Delta = K + 1$.

Já a Tabela 2 detalha os filtros de segunda ordem (biquads), cujo denominador comum e fator de normalização seguem a estrutura quadrática $\Delta = K^2 + 2\zeta K + 1$.

Em ambos os casos, os coeficientes finais implementados no código devem ser divididos pelo respectivo Δ de sua ordem.

Tipo	$\mathbf{b_0}$ $(\times\Delta)$	$\mathbf{b_1}$ $(\times\Delta)$	$\mathbf{a_1}$ $(\times\Delta)$
Passa-baixa (PB)	K	K	$K - 1$
Passa-alta (PA)	1	-1	$K - 1$

Tabela 1: Coeficientes para filtros de 1ª ordem ($\Delta = K + 1$).

Tipo	$\mathbf{b_0}$ $(\times\Delta)$	$\mathbf{b_1}$ $(\times\Delta)$	$\mathbf{b_2}$ $(\times\Delta)$
Passa-baixa (PB)	K^2	$2K^2$	K^2
Passa-alta (PA)	1	-2	1
Passa-faixa (PF)	$2\zeta K$	0	$-2\zeta K$
Rejeita-faixa (RF)	$1 + K^2$	$2(K^2 - 1)$	$1 + K^2$

Tabela 2: Coeficientes para filtros de 2ª ordem ($\Delta = K^2 + 2\zeta K + 1$).